



Doctoral Thesis

## Hyperplane arrangements construction, visualization and application

**Author(s):**

Sleumer, Nora

**Publication Date:**

2000

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-003889994> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 13502

HYPERPLANE ARRANGEMENTS:  
CONSTRUCTION, VISUALIZATION AND  
APPLICATIONS

DISSERTATION

submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
ZURICH, SWITZERLAND

for the degree of  
DOCTOR OF TECHNICAL SCIENCES

presented by

NORA HELENA SLEUMER

Master of Mathematics, University of Waterloo, Canada  
born on December 8th, 1969, in Leiden, the Netherlands  
citizen of Germany and Canada

Accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Jürg Nievergelt, examiner  
Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert, co-examiner

2000

# Abstract

One of the main objects studied in computational geometry is the *hyperplane arrangement*, which consists of the components into which space is divided by a set of hyperplanes. The full-dimensional components are called cells. Enumerating the cells of an arrangement is an initial step for its construction and can be used to solve problems in other areas.

We present an algorithm for the enumeration of the cells of a hyperplane arrangement. It is output-sensitive and runs in time  $O(m \cdot |C|)$ , where  $m$  is the number of hyperplanes and  $|C|$  the number of cells. This is an improvement of  $m$  over an earlier algorithm. Degeneracies are handled without perturbing the whole arrangement. Due to the low memory requirements, the algorithm is able to process the cells of very large arrangements and is well-suited to be run in parallel.

We have created a benchmark test set containing simple and degenerate arrangements in dimensions two to six. We show that the algorithm is suitable for parallel implementation by using a library of parallel search algorithms to determine the speedup and isoefficiency.

The cell enumeration algorithm is the main component of `HypArr`, a program library for calculating and visualizing hyperplane arrangements. The module `HypArrSimple` is an interface to the library routine `HypArrLib`. It can be adapted to solve problems that can be transformed into a cell enumeration problem. Two and three dimensional arrangements can be visualized with the modules `HypArr2D` and `HypArr3D`. These programs make it possible to view other constructions, such as stellations of polyhedra and higher-order Voronoi diagrams. The module `HypArrMod` was created to investigate the use of hyperplane arrangements for modeling three-dimensional structures. It contains a new data structure for modeling the structure on a facet basis.

A modified version of the algorithm was applied to the field of mobile robotics. A mobile robot needs a map of the environment in which it is operating. By extending the wall line segments into lines, an arrangement is formed. The cells of this arrangement form a decomposition of the floor space that is practical for mobile robot navigation.

# Kurzfassung

Eine der wichtigsten Objekten in der Algorithmischen Geometrie ist das Arrangement von Hyperebenen, das aus denjenigen Komponenten besteht, in die der Raum durch eine Menge von Hyperebenen aufgeteilt wird. Die Komponenten der maximalen Dimension sind die sogenannte Zellen. Das Aufzählen aller Zellen eines Arrangements ist der erste Schritt zu seiner Konstruktion und kann auch zur Lösung von Problemen aus anderen Gebieten verwendet werden.

Wir geben einen Algorithmus für das Aufzählen der Zellen eines Arrangements von Hyperebenen an. Seine asymptotische Laufzeit hängt von der Grösse des berechneten Resultats ab und beträgt  $O(m \cdot |C|)$ , wobei  $m$  für die Anzahl der Hyperebenen und  $|C|$  für die Anzahl der Zellen stehen. Degenerierte Konstellationen werden lokal behandelt, so dass nicht das ganze Arrangement zerstört wird. Dank seines geringen Speicherbedarfs kann der Algorithmus auch die Zellen sehr grosser Arrangements aufzählen. Ausserdem ist er auch gut für eine Parallelisierung geeignet. Dies ist eine Verbesserung um einen Faktor  $m$  über der bishere Algorithmus.

Wir haben eine Menge von Benchmark Tests zusammengestellt, bestehend aus einfachen sowie auch degenerierten Arrangements in zwei bis sechs Dimensionen. Wir zeigen, dass der Algorithmus für eine parallele Implementierung geeignet ist, indem wir eine Bibliothek von parallelen Suchalgorithmen einsetzen und den Speedup sowie die "Isoefficiency" messen.

Der Algorithmus zur Aufzählung der Zellen bildet die zentrale Komponente vom HypArr, einer Programmbibliothek für das Berechnen und Darstellen von Arrangements von Hyperebenen. Das Modul HypArrSimple ist die Schnittstelle zu der Programmbibliothek HypArrLib. Es kann so angepasst werden, dass beliebige Probleme, welche sich in das Problem des Aufzählens der Zellen eines Arrangements übersetzen lassen, gelöst werden können. Die Module HypArr2D und HypArr3D können zwei- und dreidimensionale Arrangements grafisch darstellen. Diese Programme ermöglichen es, auch andere Konstruktionen wie zum Beispiel "Stellationen" von Polyedern oder Voronoi-Diagramme höherer Ordnung darzustellen. Das Modul HypArrMod ist ein Versuch, dreidimensionale Strukturen mithilfe von Arrangements darzustellen.

Eine angepasste Version des Algorithmus wurde auch in der mobilen Robotik angewandt. Ein mobiler Roboter benötigt eine Karte seiner Einsatzumgebung. Verlängert man die durch das Aufeinandertreffen von Boden und Wände entstehenden Liniensegmente zu Geraden, erhält man ein Arrangement in der Ebene. Die Zellen dieses Arrangements bilden eine Aufteilung des Bodens, auf dem sich der Roboter bewegt, die seine Navigation unterstützt.