Separation of variables for the eight-vertex SOS model with antiperiodic boundary conditions

Author(s):
Schorr, Anke

Publication Date:
2000

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-003914376

Diss. ETH No. 13682

Separation of variables for the eight-vertex SOS model with antiperiodic boundary conditions

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
ANKE SCHORR
Dipl. Phys. ETH
born September 2, 1972 in Saarbrücken,
Bundesrepublik Deutschland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Giovanni Felder, Examiner
Dr. Benjamin Enriquez, Chargé de recherches, Co-Examiner

Abstract
This work deals on the one hand with how to use the representation theory of a quantum group ([14]) to investigate a statistical mechanical model and on the other hand with how to solve the statistical mechanical model by Sklyanin's method of separation of variables. [47]. More concretely, we use the elliptic quantum group $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ established by Felder in [29, 25] to investigate the SOS eight-vertex model established by Date, Jimbo, Miwa and Okado [10] with antiperiodic boundary conditions which are the reason that Bethe ansatz fails and we have to use Sklyanin's method of separation of variables [47].
The SOS eight-vertex model is a face-model version of Baxter's original eight–vertex model [3]. It is related to the elliptic quantum group $E_{\tau,\eta}(sl_2)$, since we rediscover its Boltzmann weights $W_e(c,b,a,d|z)$ by a suitably discretized version of the R-matrix $R_e(z,\lambda)$ defining $E_{\tau,\eta}(sl_2)$. This relation reads

$$R_e(z,\lambda = -2\eta d)e[c-d] \otimes e[b-c] =$$
$$\sum_a W_e(c,b,a,d|z)\, e[b-a] \otimes e[a-d].$$

The antiperiodic boundary conditions of the model are fixed by considering a special family of transfer matrices $T_{SOS,e}(z,\lambda_0)$ depending on the parameter $z \in \mathbb{C}$ which are twisted traces of the defining L-operator of the model $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ (cf. Definition 4.21) over the auxiliary space of the quantum group, twisted by the matrix $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. The L-operator is built out of a representation of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ which is an n-fold shifted tensor product of fundamental representations of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$.
The (finite) partition function of the model is then to be computed out of this transfer matrix to yield $\mathcal{Z}_M = \mathrm{Tr}_{2^M}(T_{SOS,e}(z,\lambda_0))^M$.
To find common eigenvalues and eigenvectors of the family of antiperiodic transfer matrices of the SOS eight-vertex model we use Sklyanin's method of separation of variables [45]. This method reduces the problem of finding those entities, which involves solving a non-linear multidimensional difference equation, to solving n so-called separated equations which are one-dimensional linear difference equations (cf. Definition 4.52). The system of separated equations emerges by evaluating the family of transfer matrices $T_{aux,e}(z,\lambda_0)$ of Sklyanin's [46, 44] auxiliary representation, generalized to the elliptic case, called $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}^{\mathbb{C}}_{aux,e}(z,\lambda))$ (Definition 4.33) of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ at n points. The equivalence of solving this eigenvalue problem instead of the original one is due to the fact that the auxiliary representation and the representation of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ which defines the SOS eight-vertex model are isomorphic (Theorem 4.44).
Let us now briefly state the content of this work: In the second chapter – after the introduction –, we briefly present the results on the elliptic Gaudin model by Enriquez, Feigin and Rubtsov [16], i.e. we state the solutions of this model obtained by separation of variables. (This serves as an insight into the separation of variables method as well as describing a model that can be seen as a limiting case of the eight-vertex SOS model.)
In the chapter 4, we deal with the eight-vertex SOS model. We first define the basic notions of the eight-vertex SOS model more heuristically. Then, we describe the basic representation theory of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$. In the next section, we describe the eight–vertex SOS model in terms of the representation theory of $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ involving the definition of $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ and the commutative family of antiperiodic transfer matrices. We propose the auxiliary representation $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}^{\mathbb{C}}_{aux,e}(z,\lambda))$ and the emerging

family of auxiliary transfer matrices in the fourth section. In the fifth section, we describe the isomorphism between $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ and $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}^{\mathbb{C}}_{aux,e}(z,\lambda))$. In the final section, we state our main results on the description of the common eigenvalues and eigenvectors of the family of transfer matrices with antiperiodic boundary conditions of the eight-vertex SOS model in terms of the common eigenvalues and eigenvectors of the auxiliary transfer matrices (Proposition 4.54 and Theorem 4.55).

In chapter 5, we treat the simplest non–trivial example of the SOS eight-vertex model, namely $n = 3$, to clarify the notions defined in the preceding chapter.

We deal with another problem in Appendix1, a problem frequently treated in Sklyanin's papers on separation of variables [47, 46]. There he discusses separation of variables of the XXX model [20, 21, 37], which is related to the representation theory of the Yangian [52] $\mathcal{Y}(sl_2)$. Solving this model involves a procedure analogous to the one for the SOS eight-vertex model: a main problem consists in finding an auxiliary representation $(\mathbb{C}^{2^n}, \bar{L}_{aux,r}(z))$ which is isomorphic to the representation $(\mathbb{C}^{2^n}, L_{XXX}(z))$ which comes along with the XXX model. Here, we propose a version of obtaining the isomorphism which differs from what Sklyanin did in [47, 46] and is in analogy to the isomorphism we proposed in the SOS eight-vertex case. Of course, the results agree with what Sklyanin states in [46, 44].

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich zum einen damit, wie man Darstellungstheorie von Quantengruppen ([13]) auf Modelle der statistischen Mechanik anwenden kann, zum anderen damit, wie man ein entsprechendes Modell aus der statistischen Mechanik mit Sklyanins Methode der Separation der Variablen [47] löst. Konkreter benutzen wir die elliptische Quantengruppe $E_{\tau,\eta}(sl_2)$, wie sie von Felder [29, 25] konstruiert wurde, um das SOS Acht-Vertex-Modell in der Gestalt von Date, Jimbo, Miwa und Okade [10] mit antiperiodischen Randbedingungen zu betrachten, die die Ursache für das Versagen des Bethe-Ansatzes sind und uns dazu anleiten, Sklyanins Methode der Separation der Variablen zu benutzen [47].

Das SOS Acht-Vertex-Modell ist eine Version von Baxters ursprünglichem Acht-Vertex-Modell [3] als "face"-Modell. Es steht mit der elliptischen Quantengruppe in Zusammenhang, was wir an der folgenden Relation erkennen, die die Boltzmann-Gewichte des Modells $W_e(c,b,a,d|z)$ mit der geeignet diskretisierten R-Matrix der elliptischen Quantengruppe $R_e(z,\lambda)$ verbindet:

$$R_e(z,\lambda = -2\eta d)e[c-d] \otimes e[b-c] = \\ \sum_a W_e(c,b,a,d|z)\, e[b-a] \otimes e[a-d].$$

Die antiperiodischen Randbedingungen des Modells werden dadurch fixiert, dass man eine spezielle Familie von Transfermatrizen $T_{SOS,e}(z,\lambda_0)$ betrachtet, die von einem Parameter $z \in \mathbb{C}$ abhängen, und getwistete Spuren über den auxiliären Raum der Quantengruppe des L-Operators zum SOS Acht-Vertex-Modell $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ sind (s. Definition 4.21), mit Twistmatrix $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Der L-Operator besteht aus dem n-fachen verschobenen Tensorprodukt von fundamentalen Darstellungen von $E_{\tau,\eta}(sl_2)$.

Die (endliche) Partitionsfunktion des SOS Acht-Vertex-Modells mit antiperiodischen Randbedingungen ist durch die Transfermatrix gegeben als $\mathcal{Z}_M = \mathrm{Tr}_{2^M}(T_{SOS,e}(z,\lambda_0))^M$. Um Eigenwerte und Eigenvektoren der beschriebenen Transfermatrix zu finden, benutzen wir Sklyanins Methode der Separation der Variablen [47]. Mit Hilfe dieser Methode gelingt es uns, das Problem, das ursprünglich das Lösen einer nichtlinearen multidimensionalen Differenzengleichung beinhaltet, auf das Lösen eines Systems von n eindimensionalen Differenzengleichungen, den sogenannten separierten Gleichungen (s. Definition 4.52), zurückzuführen. Dieses Gleichungssystem kommt durch das Auswerten der Familie von auxiliären Transfermatrizen $T_{aux,e}(z,\lambda_0)$ an n generischen Punkten zustande. Diese sind Transfermatrizen von Sklyanins auxiliärer Darstellung [46, 44], genannt $(M(\mathbb{C},V^{2\otimes n}),\bar{L}^{\mathbb{C}}_{aux,e}(z,\lambda))$ (Definition 4.33) , die hier auf den elliptischen Fall $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ erweitert wird. Die Äquivalenz, die es uns erlaubt, statt des ursprünglichen Problems das System separierter Gleichungen zu lösen, beruht darauf, dass die Darstellung von $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ zum SOS Acht-Vertex-Modell und die auxiliäre Darstellung isomorph sind (Theorem 4.44).

Wir möchten nun kurz eine Inhaltsübersicht geben: Das zweite Kapitel, nach der Einführung, enthält ein Resumé der Resultate von Enriquez, Feigin und Rubtsov zum elliptischen Gaudin-Modell [16], d.h. wir geben die Lösungen dieses Modells an, die die Autoren durch Separation der Variablen erhalten. (Dies dient der Einsicht in diese Methode wie auch der Entwicklung eines Modells, das als Grenzfall des SOS Acht-Vertex-Modells aufgefasst werden kann.)

In Kapitel 4 behandeln wir das SOS Acht-Vertex-Modell. Zunächst beschreiben wir die Grundbegriffe des Modells auf heuristische Art. Dann folgt eine kurze Einführung in die Darstellungstheorie von $E_{\tau,\eta}(sl_2)$, soweit wir sie benötigen. Im nächsten Abschnitt wird das SOS Acht-Vertex-Modell dann darstellungstheoretisch formuliert, was die Definition von $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ und der kommutativen Familie antiperiodischer Transfermatrizen umfasst. Wir stellen die auxiliäre Darstellung $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}^{\mathbb{C}}_{aux,e}(z,\lambda))$ und die kommutative Familie auxiliärer Transfermatrizen, die daraus hervorgeht, in Abschnitt 4 vor. Im fünften Abschnitt konstruieren wir den Isomorphismus zwischen $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$ und $(M(\mathbb{C}, V^{2\otimes n}), \bar{L}_{SOS,e}(z,\lambda))$. Im letzten Abschnitt formulieren wir unsere Hauptresultate zur Beschreibung der gemeinsamen Eigenwerte und Eigenvektoren der Familie von Transfermatrizen der SOS Acht-Vertex-Modells mit antiperiodischen Randbedingungen mit Hilfe der gemeinsamen Eigenwerte und Eigenvektoren der Familie von auxiliären Transfermatrizen mit antiperiodischen Randbedingungen (Proposition 4.54 und Proposition 4.55).

In Kapitel 5 behandeln wir das einfachste nicht-triviale Beispiel, $n = 3$, um das im vorhergehenden Kapitel Hergeleitete zu illustrieren.

In Appendix 1 streifen wir ein weiteres Problem, das in Sklyanins Artikeln [46, 44] über die Separation der Variablen oft behandelt wird. Dort erklärt er die Separation der Variablen für die XXX-Kette [20, 21, 37], ein Problem, das mit der Darstellungstheorie des Yangian [52] $\mathcal{Y}(sl_2)$ verbunden werden kann. Die Lösung dieses Modells erfordert ein Vorgehen, das in Analogie zu demjenigen beim SOS Acht-Vertex-Modell betrachtet werden kann: Ein Hauptproblem ist es, eine auxiliäre Darstellung des Yangian $(\mathbb{C}^{2^n}, \bar{L}_{aux,r}(z))$ [46, 44] zu finden, die isomorph au derjenigen zur XXX-Kette $(\mathbb{C}^{2^n}, L_{XXX}(z))$ ist. Hier konstruieren wir den dazugehörigen Isomorphismus auf eine Art, die sich von der Herleitung Sklyanins in [46, 44] unterscheidet und in Analogie zu unserem Vorgehen beim SOS Acht-Vertex-Modell steht. Die erhaltenen Resultate stimmen selbstverständlich mit denen Sklyanins in [46, 44] überein.