Diss. ETH No. 13624

UNIQUE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR HARMONIC MAPS

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
Roger Moser
Dipl. Math. ETH
born April 14, 1973
citizen of Ruppoldsried BE

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. M. Struwe, examiner
Prof. Dr. T. Ilmanen, co-examiner

2000

Kurzfassung

Sei N eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, isometrisch eingebettet in einem Euklikischen Raum $\mathbb{R}^K$. Eine Abbildung $u: B \to N$, welche die Einheitskugel B in $\mathbb{R}^n$ auf N abbildet, wird schwach harmonisch genannt, wenn sie ein kritischer Punkt des Energiefunktionals bezüglich einer gewissen Klasse von Variationen ist. (Die Energie einer Abbildung ist im wesentlichen das Quadrat der L^2-Norm ihres Gradienten. Der Raum, aus dem wir u wählen, wird später angegeben.) Ähnlich sind stationäre harmonische Abbildungen definiert, nur ist die Klasse der zugelassenen Variationen hier grösser.

Über (stationäre) schwach harmonische Abbildungen hat sich in den letzten Jahrzehnten eine reichhaltige Theorie entwickelt, sei es betreffend Existenz (z. B. Eells–Sampson [5], Hamilton [11], Hildebrandt–Kaul–Widman [15], [16], Jost [18]), (partieller) Regularität (Hélein [13], [14], Evans [6], Bethuel [2]) oder anderer Eigenschaften (White [29], Rivière [22], etc.). Noch mehr ist bekannt für Minimierer der Energie (bei festgehaltenen oder freien Randdaten), welche insbesondere stationäre schwach harmonische Abbildungen sind. Deren Theorie geht zurück auf Schoen–Uhlenbeck [24], [25].

Uns interessiert in dieser Arbeit vor allem das Dirichletproblem, d. h. die Situation mit vorgeschriebenen Randdaten. Wir werden einerseits eine Klasse von Abbildungen finden, so dass sich für gegebene Randdaten keine zwei verschiedenen schwach harmonischen Abbildungen darin finden lassen. Andererseits suchen wir eine möglichst grosse Klasse von Randdaten, so dass die Existenz einer dazugehörigen schwach harmonischen Abbildung in besagter Klasse garantiert ist, so dass man also dann das Dirichletproblem in diesem Sinne eindeutig lösen kann. Dies ist eine Verallgemeinerung einer Arbeit von M. Struwe [28], welche die selben Fragen im Fall $n = 3$ untersucht.

Es existieren Gegenbeispiele für die Eindeutigkeit schwach harmonischer Abbildungen mit vorgeschriebenen Randdaten, die Einschränkung auf eine bestimmte Klasse ist also nötig. Wir werden fordern, dass die Abbildungen, welche wir betrachten, eine genügend kleine Energie „auf jeder Skala" haben. Diese Bedingung wird einem nahegebracht von der sogenannten Monotonie-Formel, welche eine Verbindung zwischen der Energie einer stationären schwach harmonischen Abbildung auf Kugeln verschiedener Grösse angibt. Eine Reihe von Resultaten macht diese „kleine skalierte Energie" auch in anderen Zusammenhängen nützlich, sie impliziert nämlich zum Beispiel die Glattheit einer schwach harmonischen Abbildung im Innern ihres Definitionsbereichs nach Bethuel [2]. Weiter ist es damit möglich, mit einer Methode wie in [28] zwei verschiedene schwach harmonische Abbildungen in der L^∞-Norm zu vergleichen und mit Hilfe der so gewonnenen Abschätzungen auf die Eindeutigkeit zu schliessen.

Die Art von Randdaten, die wir betrachten, ist gegeben durch eine Fortsetzung u_0 auf B, welche ebenfalls kleine „skalierte Energie" besitzen soll. Wir zeigen sogar, dass diese Abbildung – abgesehen vom Rand ∂B – nicht unbedingt Werte auf N annehmen muss . Die Standardmethode, um zu gegebenen Randdaten eine schwach harmonische Abbildung zu finden (genannt die direkte Methode) versagt hier, da nicht von vornherein klar ist, ob man die Randdaten überhaupt zu einer geeigneten Abbildung mit Werten auf N fortsetzen kann. Diese Schwierigkeit wird überwunden,

indem man die Randwerte durch glatte Abbildungen mit Werten auf N approximiert. Zusätzlich muss man aber noch zeigen, dass die so erhaltenen schwach harmonischen Abbildungen (welche Energieminimierer sind) die Bedingung der kleinen skalierten Energie erfüllen. Dies ist möglich durch eine Verallgemeinerung von Methoden von Schoen–Uhlenbeck [24], [25], Hardt–Lin [12] und Luckhaus [19].

Schliesslich erhält man noch mit geringem Aufwand eine Verbesserung der Integrabilität der Gradienten der so gewonnenen Energieminimierer aus den selben Ungleichungen, die schon für den Beweis der Existenz gebraucht werden, und zwar mit einer Methode von Giaquinta–Modica [9].

Abstract

Let N be a smooth, compact Riemannian manifold, isometrically embedded in a Euclidean space $\mathbb{R}^K$. A map $u: B \to N$, mapping the unit ball B in $\mathbb{R}^n$ onto N, is called weakly harmonic, if it is a critical point of the energy functional with relation to a certain class of variations. (The energy of a map is essentially the square of the L^2-norm of its gradient. The space from which u is taken is given later.) Similarly one defines stationary harmonic maps, except that the class of admissible variations is larger in that case.

A rich theory has been developed over the past few decades on (stationary) weakly harmonic maps, concerning existence (e. g. Eells–Sampson [5], Hamilton [11], Hildebrandt–Kaul–Widman [15], [16], Jost [18]), as well as (partial) regularity (Hélein [13], [14], Evans [6], Bethuel [2]) or other properties (White [29], Rivière [22], etc.). Even more is known about minimizers of the energy functional (with fixed or free boundary data), which in particular are weakly harmonic maps. That theory goes back to Schoen–Uhlenbeck [24], [25].

We are interested in this work particularly in the Dirichlet problem, i. e. the situation with prescribed boundary data. On the one hand, we will find a class of maps that contains no pair of different weakly harmonic maps with the same boundary data. On the other hand, we seek to characterize the largest class of boundary data, such that the existence of a corresponding weakly harmonic map in the aforementioned class is guaranteed, which means that the Dirichlet problem is then uniquely solvable in that sense. This is a generalization of a work of M. Struwe [28], where the case $n = 3$ is studied.

There are counter-examples for the uniqueness of weakly harmonic maps with prescribed boundary data, the restriction to a certain class is therefore necessary. We will require that the maps we consider have sufficiently small energy "on every scale". This is a notion that is inspired by the so-called monotonicity formula for stationary weakly harmonic maps, stating a connection between the energies on balls of different sizes. The "small scaled energy" condition is useful not only in this context, for it has a variety of consequences, for instance it implies smoothness for a weakly harmonic map in the interior of its domain, according to Bethuel [2]. Furthermore, it allows to compare two different weakly harmonic maps in the L^∞-norm, using a method as in [28]. Once this is done, the uniqueness result follows from the estimates thus gained.

The kind of boundary data we consider is given by an extension u_0 on B that has small "scaled energy" itself. In fact, u_0 need not—apart from the boundary ∂B—take values on N. The standard method to find a weakly harmonic map belonging to certain boundary data (called the direct method) fails here, for it is not clear if the boundary data can be extended to a suitable map with values on N at all. One can however get over this difficulty by approximating the boundary values by smooth maps with values on N. What we also have to prove, is that the maps obtained this way (which are energy minimizers) satisfy the small scaled energy condition. That will be done by a generalization of methods due to Schoen–Uhlenbeck [24], [25], Hardt–Lin [12], and Luckhaus [19].

Finally one obtains with small effort an improvement of the integrability of the gradients of the energy minimizers thus found from the same inequalities used for the existence proof. This is done by a method of Giaquinta–Modica [9].