

# Lie-Algebren und ihre Darstellungen

## Wintersemester 1998/99

**Educational Material**

**Author(s):**  
Suter, Ruedi

**Publication date:**  
1998

**Permanent link:**  
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004007864>

**Rights / license:**  
[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**Originally published in:**  
Vorlesungsskripten der Mathematik-Dozenten und -Dozentinnen an der ETH Zürich

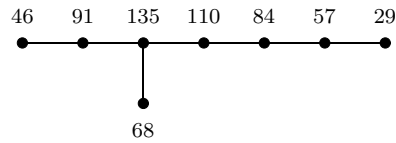
Ruedi Suter

**Lie-Algebren und ihre Darstellungen**

Wintersemester 1998/99



# VORWORT



Diese Vorlesung richtet sich an Studierende der Mathematik und der Physik. Als Voraussetzung genügen solide Kenntnisse in der linearen Algebra sowie der Grundbegriffe aus der Algebra.

Lie-Algebren treten in weiten Teilen der Mathematik und der mathematischen Physik auf. Ursprünglich waren Lie-Algebren als „infinitesimale Gruppen“ von Lie-Gruppen bekannt. (Der Begriff einer *Lie-Algebra* wurde erst in den 30er Jahren von Weyl kreiert.) Es ist also naheliegend<sup>1</sup>, die Theorie der Lie-Gruppen zu entwickeln. Viele Probleme können auf solche in der technisch einfacher zu handhabenden Theorie der Lie-Algebren reduziert werden. Deren Lösungen lassen sich sehr oft erfolgreich in die Theorie der Lie-Gruppen zurückübersetzen. Wir gehen nicht diesen Weg, sondern stellen die Theorie der Lie-Algebren an den Anfang. Damit sie dennoch nicht vom Himmel fällt – wieso ist es interessant, Algebren zu studieren, in denen die Identitäten  $X^2 = 0$  und  $(XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = 0$  gelten? – habe ich in der Einleitung ein Beispiel zur Motivation vorangestellt, bevor die eigentliche Theorie beginnt.

Zentrales Thema der Vorlesung ist die endlich dimensionale Darstellungstheorie der halbeinfachen komplexen Lie-Algebren. Diese ästhetisch attraktive Theorie kann als Einstieg in die Lie-Theorie dienen, eines der reichhaltigsten und faszinierendsten Gebiete der Mathematik und der mathematischen Physik.

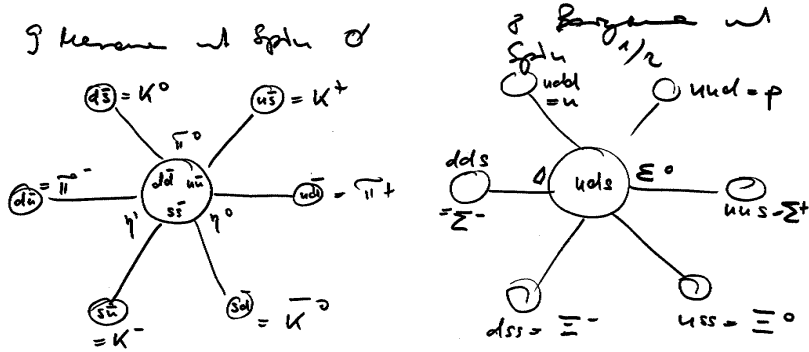
Das bekannteste Beispiel einer Lie-Algebra ist wohl der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Vektorprodukt als Multiplikation: es gelten die Identitäten  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$  sowie  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ . Einige werden die Darstellungstheorie dieser Lie-Algebra aus der Quantenmechanik kennen (Theorie des Drehimpulses). Weiter sind Lie-Algebren in den ersten beiden Studienjahren auch in der allgemeinen Mechanik anzutreffen: die Poisson-Klammer in der Hamiltonschen Mechanik versieht den Raum der  $C^\infty$  Funktionen auf einem Phasenraum mit der Struktur einer Lie-Algebra (sogar einer Poisson-Algebra).

Wie schon gesagt, die Lie-Theorie ist ein faszinierendes Gebiet, gerade deshalb, weil so viele verschiedene Disziplinen damit verknüpft sind.

---

<sup>1</sup>Dieser Text verwendet die alte Rechtschreibung.

Als kleines Musterchen für die Faszination, welche die Lie-Theorie auszustrahlen imstande ist, habe ich den folgenden Notizzettel aus meiner Mittelschulzeit gefunden.



Von wo ich das abgeschrieben habe, weiss ich nicht mehr, vielleicht von den Feynman lectures. Damals wusste ich noch nichts von Lie-Gruppen, was die “flavour SU(3)” ist, von den Singulets und Oktetten in  $3 \otimes 3^*$  und  $3 \otimes 3 \otimes 3$  usw. Doch auch der Laie erkennt, wie die Einsicht, Hadronen als gebundene Zustände von Quarks und Antiquarks zu verstehen, zeigt, dass ein amorph scheinender Teilchenzoo eine kristalline Ordnung in sich birgt.

Die erwähnten Beispiele haben vielleicht den Eindruck erweckt, Lie-Theorie hätte weniger mit Mathematik als mit Physik zu tun. Dazu kommt noch, dass die Lie-Theorie alle möglichen Quantenfeldtheorien durchflutet. Trotzdem ist der grösste Brocken der Lie-Theorie in der Mathematik beheimatet. Wesentliche Teile der Differentialgeometrie, Analysis, Algebra, Topologie, algebraischen Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik gehören zur Lie-Theorie oder umgekehrt.

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>I Allgemeines über Lie-Algebren</b>	<b>1</b>
1 Einleitung . . . . .	1
1.1 Lie-Gruppe $\rightsquigarrow$ Lie-Algebra (ein Beispiel) . . . . .	2
1.2 Lie-Algebra $\rightsquigarrow$ Lie-Gruppe? . . . . .	5
2 Lie-Algebren, Grundbegriffe . . . . .	6
2.1 Die Kategorie der Lie-Algebren über einem Körper . . . . .	6
2.2 Lie-Algebra-Strukturen auf einem Vektorraum . . . . .	9
2.3 Darstellungen, Ideale . . . . .	12
3 Auflösbare und nilpotente Lie-Algebren . . . . .	16
3.1 Der Satz von Engel . . . . .	17
3.2 Der Satz von Lie . . . . .	19
4 Radikale, Halbeinfachheit . . . . .	22
5 Invariante Bilinearformen, Cartans Kriterium . . . . .	25
6 Cartan-Unteralgebren . . . . .	32
7 Einschub: Tensorprodukte von Vektorräumen . . . . .	37
7.1 Tensorprodukt von zwei Vektorräumen . . . . .	37
7.2 Tensorprodukt von Familien von Vektorräumen . . . . .	40
7.3 Tensoralgebra . . . . .	40
7.4 Äussere und symmetrische Potenzen . . . . .	41
8 Die universelle Einhüllende . . . . .	41

<b>II</b>	<b>Strukturtheorie</b>	<b>45</b>
9	Wurzelraumzerlegung . . . . .	45
9.1	Wurzelräume und Wurzelsysteme . . . . .	45
9.2	Endlich dimensionale Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . . . . .	50
9.3	Ein Automorphismus . . . . .	53
9.4	Weitere Eigenschaften eines Wurzelsystems . . . . .	54
9.5	Chevalley-Basis . . . . .	55
10	Abstrakte Wurzelsysteme . . . . .	56
11	Dynkin-Diagramme und Klassifikation . . . . .	64
11.1	Dynkin-Diagramme . . . . .	64
11.2	Klassifikation der abstrakten Wurzelsysteme . . . . .	65
11.3	Der Struktursatz von Serre . . . . .	70
12	Die klassischen einfachen Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ . . . . .	72
<b>III</b>	<b>Darstellungstheorie</b>	<b>77</b>
13	Moduln . . . . .	78
13.1	Darstellungen und Moduln . . . . .	78
13.2	Gewichtsräume und endlich dimensionale $\mathfrak{g}$ -Moduln . . . . .	78
14	Höchstgewichtsmoduln . . . . .	81
14.1	Verma-Moduln und BGG-Auflösung . . . . .	81
15	Charaktere . . . . .	84
16	Tensorprodukte und Darstellungsring . . . . .	91
17	Pfadmodell . . . . .	100
	<b>Literatur</b>	<b>109</b>

# Kapitel I

## Allgemeines über Lie-Algebren

Sophus Lie 1842–1899

Wilhelm Killing 1847–1923

Elie Cartan 1869–1951

Hermann Weyl 1885–1955

### 1 Einleitung

Die meisten Studierenden sind wohl vertrauter mit Beispielen von Lie-Gruppen als mit solchen von Lie-Algebren.<sup>1</sup> Beispiele von Lie-Gruppen sind etwa die Matrixengruppen

$$GL_d(\mathbb{R}) = \{A \in M(d \times d, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\},$$

$$SL_d(\mathbb{R}) = \{A \in GL_d(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

$$O(d) = \{A \in GL_d(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbf{1}\},$$

$$U(d) = \{A \in M(d \times d, \mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbf{1}\},$$

$$SU(d) = \{A \in U(d) \mid \det A = 1\},$$

$$(\mathbb{R}^\times)^d = \{A \in GL_d(\mathbb{R}) \mid A \text{ diagonal}\}.$$

Zu jeder Lie-Gruppe  $G$  gehört eine Lie-Algebra, die wir mit  $\text{Lie } G$  bezeichnen. Nicht alle Lie-Gruppen sind isomorph zu einer analytischen Untergruppe von

---

<sup>1</sup>Ein wichtiges Beispiel einer Lie-Algebra tritt zwar jeweils schon in der Schule auf.



$GL_d(\mathbb{R})$ . Ein Beispiel einer solchen nicht linearisierbaren Lie-Gruppe ist  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ , die universelle Überlagerung von  $SL_2(\mathbb{R})$ . Die Existenz von nicht linearisierbaren Lie-Gruppen ist ein globales Phänomen. Im Gegensatz dazu lässt sich jede endlich dimensionale reelle Lie-Algebra in eine Lie-Algebra  $Lie GL_d(\mathbb{R})$  (für geeignetes  $d$ ) einbetten (Satz von Ado). Dies gilt sogar nicht nur im reellen Fall, sondern ganz allgemein für endlich dimensionale Lie-Algebren über irgendeinem Körper (Satz von Ado, Satz von Iwasawa).

Lie-Algebren sind technisch leichter zu handhaben als Lie-Gruppen.

Um dennoch der Hypothese betreffend die bessere Vertrautheit mit Beispielen von Lie-Gruppen als mit Beispielen von Lie-Algebren Rechnung zu tragen, wollen wir zuerst den Übergang von einer Lie-Gruppe zu ihrer Lie-Algebra am Beispiel von  $O(d)$  etwas erläutern.

## 1.1 Lie-Gruppe $\rightsquigarrow$ Lie-Algebra (ein Beispiel)

Wir betrachten als Beispiel die Gruppe  $O(d)$  aller orthogonalen Transformationen des euklidischen Vektorraums  $\mathbb{R}^d$  mit dem Standardskalarprodukt  $(x|y) := x^\top y$ . Damit die Notation nicht allzu schwerfällig wird, identifizieren wir eine orthogonale Transformation  $A$  mit ihrer Matrix bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^d$  und schreiben also  $A : x \mapsto Ax$ . Die Bedingung, dass  $A$  orthogonal ist, lautet

$$x^\top y = (x|y) = (Ax|Ay) = (Ax)^\top (Ay) = x^\top (A^\top A)y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Also ist

$$O(d) = \{A \in M(d \times d, \mathbb{R}) \mid A^\top A = \mathbf{1}\} \subseteq M(d \times d, \mathbb{R}).$$

Die  $d^2$  Einträge einer Matrix  $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,d} \in O(d)$  erfüllen quadratische Gleichungen, welche durch  $A^\top A = \mathbf{1}$  gegeben sind. Diese Gleichungen besagen, dass die Spaltenvektoren der Matrix  $A$  eine orthonormierte Basis von  $\mathbb{R}^d$  bilden. Als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d^2}$  kann  $O(d)$  als Durchschnitt der  $d(d+1)/2$  Hyperflächen

$$\sum_{l=1}^d a_{lj} a_{lk} = \delta_{jk} \quad (1 \leq j \leq k \leq d)$$

beschrieben werden. Weil  $O(d)$  eine Gruppe ist, ist dieser Durchschnitt nirgends singulär!  $O(d)$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{d^2}$ .

Der Vollständigkeit halber sei hier noch die Definition einer reellen Lie-Gruppe angefügt.

**Definition** Eine reelle *Lie-Gruppe*  $G$  ist eine Gruppe, deren Elemente die Punkte einer  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit bilden. Weiter soll dabei die Gruppenmultiplikation  $G \times G \rightarrow G$  eine  $C^\infty$  Abbildung sein. (Die Inversenabbildung  $G \rightarrow G$  ist dann auch  $C^\infty$ .)

*Bemerkung* Dank der positiven Lösung von Hilberts fünftem Problem durch A. Gleason, D. Montgomery und L. Zippin wissen wir, dass die  $C^\infty$  Bedingung automatisch aus der Stetigkeit folgt: eine lokal euklidische topologische Gruppe ist eine Lie-Gruppe.

Wir wollen nun anhand der Lie-Gruppe  $O(d)$  sehen, wie der Übergang zur Lie-Algebra  $\text{Lie } O(d)$  von  $O(d)$  vor sich geht. Ich gebe dafür zwei Varianten.

**Variante 1** Wir betrachten differenzierbare Familien

$$A : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow O(d) \subseteq \mathbb{R}^{d^2}$$

für ein  $\varepsilon > 0$  mit  $A(0) = \mathbf{1}$ . Alle Einträge sollen also differenzierbare Funktionen sein. Wir leiten die Bedingung  $A(t)^\top A(t) = \mathbf{1}$  nach  $t$  ab,

$$\dot{A}(t)^\top A(t) + A(t)^\top \dot{A}(t) = 0,$$

und setzen  $t = 0$  ein,

$$\dot{A}(0)^\top + \dot{A}(0) = 0.$$

Die Matrix  $\dot{A}(0)$  ist also antisymmetrisch. Der Vektorraum  $\text{Lie } O(d)$  ist der Vektorraum der antisymmetrischen reellen  $d \times d$ -Matrizen.

**Variante 2** Wir betrachten den Ring  $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\varepsilon$  (mit  $\varepsilon^2 = 0$ ) und eine Matrix  $A = \mathbf{1} + \varepsilon B$  mit  $B \in M(d \times d, \mathbb{R})$ . Welche Bedingung muss  $B$  erfüllen, damit  $A^\top A = \mathbf{1}$  gilt? Wir rechnen

$$\mathbf{1} = A^\top A = (\mathbf{1} + \varepsilon B^\top)(\mathbf{1} + \varepsilon B) = \mathbf{1} + \varepsilon(B + B^\top).$$

Es gilt also  $B + B^\top = 0$ .

Was wir oben sowohl in der analytischen Variante 1 als auch in der algebraischen Variante 2 ausgerechnet haben ist nichts anderes als der Tangentialraum an die Lie-Gruppe  $O(d)$  im Punkt  $\mathbf{1}$ .

ÜBUNG 1.1 Durch welche reellen Unterräume sind  $\text{Lie } U(d) \subseteq M(d \times d, \mathbb{C})$ ,  $\text{Lie } SU(d) \subseteq M(d \times d, \mathbb{C})$  und  $\text{Lie } GL_d(\mathbb{R}) \subseteq M(d \times d, \mathbb{R})$  gegeben?

Der Vektorraum  $\text{Lie } O(d)$  der antisymmetrischen reellen  $d \times d$ -Matrizen ist nicht bloss ein Vektorraum, sondern besitzt eben die Struktur einer Lie-Algebra. Es gibt also eine bilineare Abbildung

$$\text{Lie } O(d) \times \text{Lie } O(d) \longrightarrow \text{Lie } O(d),$$

welche noch gewisse Eigenschaften (wir werden sie später besprechen) erfüllt. Die gesuchte Abbildung erhalten wir wie folgt. Für  $A \in O(d)$  betrachten wir die Abbildung „Konjugieren mit  $A$ “

$$\begin{aligned} c_A : O(d) &\longrightarrow O(d) \\ B &\longmapsto ABA^{-1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nehmen wir statt einer fixierten Matrix  $A$  wieder eine differenzierbare Familie  $A : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \text{O}(d)$  mit  $A(0) = \mathbf{1}$ , leiten ab und setzen den Parameter gleich 0, so erhalten wir

$$(A(t)BA(t)^{-1})' \Big|_{t=0} = \dot{A}(0)B - B\dot{A}(0).$$

Dabei haben wir  $(A(t)^{-1})' = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$  verwendet, was durch Ableiten von  $A(t)A(t)^{-1} = \mathbf{1}$  folgt. Für  $X = \dot{A}(0) \in \text{Lie O}(d)$ ,  $B = \mathbf{1} + \varepsilon Y$  mit  $Y \in \text{Lie O}(d)$  lautet die infinitesimale Version von (1.1) also

$$\begin{aligned} \text{ad } X : \text{Lie O}(d) &\longrightarrow \text{Lie O}(d) \\ Y &\longmapsto XY - YX. \end{aligned}$$

**Notation**  $\text{ad } X(Y) =: [X, Y]$  Lie-Klammer.

Schliesslich wollen wir die Lie-Algebra  $\text{Lie O}(3)$  noch etwas genauer ansehen. Mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

wird

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -(x_1y_2 - x_2y_1) & z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & 0 & -(y_1z_2 - y_2z_1) \\ -(z_1x_2 - z_2x_1) & y_1z_2 - y_2z_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lie-Algebra  $\text{Lie O}(3)$  ist *isomorph* zur Lie-Algebra  $\mathbb{R}^3$  mit dem Vektorprodukt als Lie-Klammer: wir haben den Vektorraum-Isomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \text{Lie O}(3) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

welcher

$$\varphi(\vec{p} \times \vec{q}) = [\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{q})] \quad \forall \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt.

**ÜBUNG 1.2** Zeige, dass  $\text{Lie O}(3)$  isomorph zur Lie-Algebra  $\text{Lie SU}(2)$  ist. (Die Lie-Klammer in  $\text{Lie SU}(2)$  ist auch der Kommutator, also  $[X, Y] = XY - YX$ .)

**Hinweis:** Pauli-Matrizen  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

## 1.2 Lie-Algebra $\rightsquigarrow$ Lie-Gruppe ?

Wir haben aus der Lie-Gruppe  $O(d)$  die Lie-Algebra  $\text{Lie } O(d)$  erhalten. Eine natürliche Frage ist, ob sich dieser Prozess umkehren lässt. Dies ist nur teilweise möglich. In unserem Beispiel mit  $\text{Lie } O(d)$  erhalten wir mit der Exponentialabbildung

$$\exp : \text{Lie } O(d) \rightarrow \text{SO}(d)$$

als Bild die Gruppe  $\text{SO}(d)$  der Matrizen in  $O(d)$  mit Determinante  $+1$ . Es ist klar, dass das Bild nicht  $O(d)$  sein kann. Als topologischer Raum besteht  $O(d)$  aus zwei Zusammenhangskomponenten,  $O(d) = \text{SO}(d) \dot{\cup} A \cdot \text{SO}(d)$ , wobei  $A \in O(d)$  eine Matrix mit  $\det A = -1$  ist. Wir hätten das Beispiel  $\text{SO}(d)$  anstelle von  $O(d)$  betrachten können. Es gilt  $\text{Lie } \text{SO}(d) = \text{Lie } O(d)$ . Die Exponentialfunktion gibt uns dann mit

$$\exp : \text{Lie } \text{SO}(d) \rightarrow \text{SO}(d)$$

die Gruppe  $\text{SO}(d)$  zurück.

Im Beispiel

$$\exp : \text{Lie } \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

ist die Exponentialabbildung nicht surjektiv, obwohl  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  zusammenhängend ist. (Nicht jedes Element in  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  liegt in einer 1-parametrischen Untergruppe.) In diesem Fall erhalten wir  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  als die Gruppe, welche vom Bild der Exponentialabbildung erzeugt wird.

In der Übung 1.2 wurde gezeigt, dass die beiden Lie-Algebren  $\text{Lie } O(3)$  beziehungsweise  $\text{Lie } \text{SO}(3)$  und  $\text{Lie } \text{SU}(2)$  isomorph sind. Die Exponentialabbildungen geben

$$\exp : \text{Lie } \text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(3),$$

$$\exp : \text{Lie } \text{SU}(2) \rightarrow \text{SU}(2).$$

Aber  $\text{SO}(3)$  und  $\text{SU}(2)$  sind keine isomorphen Gruppen, denn ihre Zentren sind nicht isomorph: es gilt  $Z(\text{SO}(3)) = \{1\}$ , aber  $Z(\text{SU}(2)) = \{\pm 1\}$ . Immerhin gilt  $\text{SO}(3) \cong \text{SU}(2)/\{\pm 1\}$ . Ein Gruppenhomomorphismus

$$\text{SU}(2) \rightarrow \text{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \text{SO}(3)$$

liefert einen Homomorphismus (sogar einen Isomorphismus) von Lie-Algebren

$$\text{Lie } \text{SU}(2) \xrightarrow{\cong} \text{Lie } \text{SO}(3).$$

Allgemein gibt es – wie wir mit der Notation schon angedeutet haben – einen Funktor  $\text{Lie}$  von der Kategorie der Lie-Gruppen über  $K$  ( $K$  ein vollständiger Körper bezüglich einem nichttrivialen Absolutbetrag) in die Kategorie der Lie-Algebren über  $K$  oder von der Kategorie der algebraischen Gruppen über irgend-einem Körper  $K$  in die Kategorie der Lie-Algebren über  $K$ .

Einige Studierende kennen die Campbell-Hausdorff-Formel. Die folgende Übung zäumt das Pferd zwar vom Schwanz her auf, gibt aber doch einen erhellenden Einblick in die infinitesimale Version der Assoziativität.

ÜBUNG 1.3 Es gibt eine universelle Formel für das Produkt  $\exp(tV)\exp(tW)$  (Campbell-Hausdorff-Formel). Bis zu Termen dritter Ordnung lautet diese Formel

$$\exp(tV)\exp(tW) = \exp\left(t(V+W) + \frac{t^2}{2}[V,W] + \frac{t^3}{12}([V,[V,W]] + [W,[W,V]]) + O(t^4)\right). \quad (1.2)$$

Schreibe

$$\begin{aligned} (\exp(tX)\exp(tY))\exp(tZ) &= \exp(tP_1 + t^2P_2 + t^3P_3 + O(t^4)), \\ \exp(tX)(\exp(tY)\exp(tZ)) &= \exp(tQ_1 + t^2Q_2 + t^3Q_3 + O(t^4)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (1.2) lassen sich die Koeffizienten  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$  durch  $X, Y, Z$  ausdrücken. Verwende die Linearität der Lie-Klammer sowie die Antisymmetrie  $[V,U] = -[U,V]$ , um die Identitäten  $P_j = Q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) zu vereinfachen.

Antwort auf die offensichtliche Frage: die Identitäten noch höherer Ordnung sind alle Konsequenzen von  $P_3 = Q_3$ .

## 2 Lie-Algebren, Grundbegriffe

In diesem Abschnitt beginnen wir mit der Theorie der Lie-Algebren.

### 2.1 Die Kategorie der Lie-Algebren über einem Körper

**Definition** Eine *Lie-Algebra* über dem Körper  $K$  besteht aus einem  $K$ -Vektorraum  $\mathfrak{g}$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung (Lie-Klammer)

$$[\ , \ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

so dass gilt

- 1)  $[X, X] = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$  (d. h. die Lie-Klammer ist *alternierend*),
- 2)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  (*Jacobi-Identität*).

Wir werden gleich einige Beispiele anschauen. Zuerst sind noch die offensichtlichen Bemerkungen zur Definition einer Lie-Algebra zu erwähnen.

*Bemerkungen*

1. Es gilt  $[X, Y] = -[Y, X]$ , denn

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = [X, Y] + [Y, X].$$

Also alternierend  $\implies$  antisymmetrisch. Die umgekehrte Implikation gilt in Körpern, wo  $1 + 1 \neq 0$ , in denen man also durch 2 dividieren kann.

2. Wegen  $[U, V] = -[V, U]$  lässt sich die Jacobi-Identität auch als

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

schreiben und so die scheinbare Asymmetrie in der Definition aus dem Weg räumen.

ÜBUNG 2.1 Zeige, dass eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \neq 0$  weder ein Links- noch ein Rechts-Einselement besitzt.

### Beispiele

- 1)  $\mathfrak{g} = V$  ein Vektorraum mit  $[v, w] = 0$  für alle  $v, w \in V$  ist die *abelsche* Lie-Algebra auf  $V$ . (Jede Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  mit  $\dim \mathfrak{g} \leq 1$  ist abelsch.)
- 2)  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$  mit  $[\vec{p}, \vec{q}] = \vec{p} \times \vec{q}$ .
- 3)  $\mathfrak{g} = A$  eine assoziative Algebra mit  $[a, b] = ab - ba$ .
- 4)  $\mathfrak{g} = K^2$  mit  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = (0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .

Homomorphismen zwischen zwei Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_1$  und  $\mathfrak{g}_2$  sind Homomorphismen zwischen den zugrundeliegenden  $K$ -Vektorräumen, welche mit den Lie-Klammern verträglich sind, also

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) &: \iff \varphi \in \text{Hom}_K(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) \text{ und} \\ &\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_1. \end{aligned}$$

Ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ , so spricht man wie in der linearen Algebra auch von einem Endomorphismus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .

Ein Homomorphismus von Lie-Algebren  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ist ein Isomorphismus, falls ein Homomorphismus von Lie-Algebren  $\psi : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{g}_1$  existiert mit  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathfrak{g}_1}$  und  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathfrak{g}_2}$ . Ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ , so spricht man auch von einem Automorphismus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .

ÜBUNG 2.2 Es sei  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein Isomorphismus der zugrundeliegenden Vektorräume zweier Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_1$  und  $\mathfrak{g}_2$ . Ausserdem sei  $\varphi$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Zeige, dass dann  $\varphi$  ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist. (Zu zeigen ist, dass  $\varphi^{-1}$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist.)

*Bemerkung* Homomorphismen zwischen abelschen Lie-Algebren sind einfach lineare Abbildungen zwischen den zugrundeliegenden Vektorräumen. Die Theorie der Lie-Algebren enthält also die Theorie der Vektorräume als Spezialfall.

Nebst Endomorphismen und Automorphismen einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über  $K$  spielen die *Derivationen* eine wichtige Rolle. Eine Derivation von  $\mathfrak{g}$  ist eine lineare Abbildung  $\delta \in \text{End}_K \mathfrak{g}$ , welche die Leibniz-Regel erfüllt, also

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), Y] + [X, \delta(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Wir bezeichnen mit  $\text{Der } \mathfrak{g}$  oder  $\text{Der}_K \mathfrak{g}$  die Menge der Derivationen von  $\mathfrak{g}$ . Mit  $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der } \mathfrak{g}$  ist auch  $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1 \in \text{Der } \mathfrak{g}$ , d. h.  $\text{Der } \mathfrak{g}$  ist selbst eine Lie-Algebra. (Allgemeiner bilden die Derivationen irgendeiner (nicht notwendigerweise assoziativen) Algebra eine Lie-Algebra.)

**Lemma 2.1** *Es seien  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über dem Körper  $K$  und  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$ . Für  $\lambda, \mu \in K$  und  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gilt die Formel*

$$(\delta - (\lambda + \mu) \text{id})^k([X, Y]) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

*Ist  $\delta$  zusätzlich nilpotent und hat der Körper  $K$  Charakteristik 0, so ist  $\exp \delta$  ein Automorphismus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Die Formel folgt sofort mit Induktion nach  $k$ .

$k = 0$ : ✓

$k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} & (\delta - (\lambda + \mu) \text{id})^k([X, Y]) \\ &= (\delta - (\lambda + \mu) \text{id}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j-1}(Y)] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left\{ [(\delta - \lambda \text{id})^{j+1}(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j-1}(Y)] \right. \\ &\quad \left. + [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j}(Y)] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j}(Y)] \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j}(Y)] \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [(\delta - \lambda \text{id})^j(X), (\delta - \mu \text{id})^{k-j}(Y)]. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass  $\exp \delta = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \delta^k$  (endliche Summe, da  $\delta$  nilpotent) invertierbar ist:  $(\exp \delta)^{-1} = \exp(-\delta)$ . Wir müssen zeigen, dass  $\exp \delta$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist. Die obige Formel mit  $\lambda = \mu = 0$  liefert

$$\begin{aligned} (\exp \delta)[X, Y] &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \delta^k ([X, Y]) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \left[ \frac{1}{j!} \delta^j (X), \frac{1}{(k-j)!} \delta^{k-j} (Y) \right] = [(\exp \delta)X, (\exp \delta)Y]. \quad \square \end{aligned}$$

Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra mit der Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]$  und  $\varphi \in \text{GL}(\mathfrak{g})$  irgendein Automorphismus des Vektorraumes  $\mathfrak{g}$ . Im allgemeinen ist dann  $\varphi$  kein Automorphismus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wir definieren auf  $\mathfrak{g}$  eine neue Lie-Klammer  $(\varphi)[\cdot, \cdot]$  durch

$$(\varphi)[X, Y] := \varphi([\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)]),$$

so dass also das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} & \mathfrak{g} \\ \varphi \times \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{(\varphi)[\cdot, \cdot]} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Das heisst,

$$\varphi : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \longrightarrow (\mathfrak{g}, (\varphi)[\cdot, \cdot])$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Für einen weiteren Automorphismus  $\psi \in \text{GL}(\mathfrak{g})$  des Vektorraumes  $\mathfrak{g}$  gilt dann  $(\psi)(\varphi)[\cdot, \cdot] = (\psi \circ \varphi)[\cdot, \cdot]$ .

## 2.2 Lie-Algebra-Strukturen auf einem Vektorraum

Eine naheliegende Methode, alle möglichen Lie-Algebra-Strukturen auf einem Vektorraum zu beschreiben, lässt sich durch die Strukturkonstanten bewerkstelligen.

**Definition** Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über dem Körper  $K$  mit  $K$ -Basis  $(e_i)_{i \in I}$ . Die Zahlen  $c_{jk}^l \in K$  in

$$[e_j, e_k] = \sum_{l \in I} c_{jk}^l e_l \quad (j, k \in I)$$

heissen die *Strukturkonstanten* der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  (bezüglich der gewählten Basis).



**Proposition 2.2** Ein Vektorraum  $V$  mit Basis  $(e_i)_{i \in I}$  und einer bilinearen Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \longrightarrow V$$

ist genau dann eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]$ , wenn

- 1)  $[e_j, e_j] = 0$ ,  $[e_j, e_k] + [e_k, e_j] = 0$ ,
- 2)  $[[e_j, e_k], e_l] + [[e_k, e_l], e_j] + [[e_l, e_j], e_k] = 0$

für alle  $j, k, l \in I$  gelten.

*Beweis.* Für  $x, y, z \in V$  schreiben wir

$$x = \sum_{j \in I} x_j e_j, \quad y = \sum_{k \in I} y_k e_k, \quad z = \sum_{l \in I} z_l e_l.$$

Wir zerlegen  $I \times I$  in  $I \times I = \{(i, i) | i \in I\} \dot{\cup} \Lambda \dot{\cup} \bar{\Lambda}$  mit  $(j, k) \in \Lambda \Leftrightarrow (k, j) \in \bar{\Lambda}$ , zum Beispiel indem wir der Indexmenge  $I$  irgendeine totale Ordnung  $<$  geben und dann  $\Lambda := \{(j, k) | j < k\}$  setzen. Aus der Bilinearität von  $[\cdot, \cdot]$  und den Voraussetzungen 1) und 2) folgt dann

$$\begin{aligned} [x, x] &= \left[ \sum_{j \in I} x_j e_j, \sum_{k \in I} x_k e_k \right] \\ &= \sum_{j \in I} x_j^2 [e_j, e_j] + \sum_{j < k} x_j x_k ([e_j, e_k] + [e_k, e_j]) = 0, \\ [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] \\ &= \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} x_j y_k z_l ([[e_j, e_k], e_l] + [[e_k, e_l], e_j] + [[e_l, e_j], e_k]) = 0. \end{aligned}$$

Die andere Richtung ist trivial.  $\square$

*Bemerkung* Aufgrund der zyklischen Symmetrie in 2) und der Antisymmetrie genügt es, die Bedingung 2) nur für  $j < k < l$  zu verlangen (für irgendeine Wahl einer totalen Ordnung  $<$  auf  $I$ ).

**Proposition 2.3** Ein Vektorraum  $V$  mit Basis  $(e_i)_{i \in I}$  und einer bilinearen Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \longrightarrow V$$

mit

$$[e_j, e_k] = \sum_{l \in I} c_{jk}^l e_l$$

ist genau dann eine Lie-Algebra, wenn

- 1)  $c_{jj}^n = 0, c_{jk}^n + c_{kj}^n = 0,$
- 2)  $\sum_{m \in I} c_{jk}^m c_{ml}^n + c_{kl}^m c_{mj}^n + c_{lj}^m c_{mk}^n = 0$

für alle  $j, k, l, n \in I$  gilt.

Alle möglichen Lie-Algebra-Strukturen auf  $K^d$  werden somit parametrisiert durch die Punkte  $(c_{jk}^l)_{j,k,l=1,\dots,d} \in K^{d^3}$ , welche die Relationen 1) und 2) mit der Indexmenge  $I = \{1, \dots, d\}$  in Proposition 2.3 erfüllen.

Die Relationen 1) schneiden aus  $K^{d^3}$  einen  $\frac{1}{2}(d^3 - d^2)$ -dimensionalen Vektorraum mit Koordinaten  $(c_{jk}^l)_{j < k}$  heraus. Wir können also die Menge  $\mathcal{L}_d(K)$  der Lie-Algebra-Strukturen auf  $K^d$  als Teilmenge von  $K^{\frac{1}{2}(d^3 - d^2)}$  auffassen.

### Beispiele

1.  $d = 1$ :  $\mathcal{L}_1(K) = 0$  (1-dimensionale Lie-Algebren sind abelsch).
2.  $d = 2$ :  $\mathcal{L}_2(K) = \{(c_{12}^1, c_{12}^2) \in K^2\} = K^2$   
(die Relationen 2) folgen aus 1) im Fall  $d = 2$ ).
3.  $d = 3$ :  $\mathcal{L}_3(K) = \{(c_{12}^1, c_{12}^2, c_{12}^3, c_{13}^1, c_{13}^2, c_{13}^3, c_{23}^1, c_{23}^2, c_{23}^3) \in K^9 \mid R\}$ , wobei

$$R: c_{12}^1 c_{13}^n + c_{12}^2 c_{23}^n - c_{23}^2 c_{12}^n - c_{23}^3 c_{13}^n - c_{13}^1 c_{12}^n + c_{13}^3 c_{23}^n = 0 \text{ für } n = 1, 2, 3,$$

also

$$\begin{aligned} R: \quad & c_{12}^2 c_{23}^1 + c_{13}^3 c_{23}^1 - c_{12}^1 c_{23}^2 - c_{13}^1 c_{23}^3 = 0, \\ & -c_{23}^3 c_{13}^2 + c_{12}^1 c_{13}^2 + c_{23}^2 c_{13}^3 - c_{12}^2 c_{13}^1 = 0, \\ & -c_{13}^1 c_{12}^3 - c_{23}^2 c_{12}^3 + c_{13}^3 c_{12}^1 + c_{23}^3 c_{12}^2 = 0. \end{aligned}$$

In einer basisunabhängigen Beschreibung entsprechen die Tupel  $(c_{jk}^l)_{j,k,l \in I}$  in Proposition 2.3 einem Tensor<sup>2</sup> in  $V^* \otimes V^* \otimes V$  (Tensorprodukt über  $K$ ), nämlich dem Tensor zur bilinearen Abbildung  $[\ , \ ] : V \times V \rightarrow V$ . Die Relationen 1) und 2) definieren eine Untervarietät  $\mathcal{L}(V)$  von  $V^* \otimes V^* \otimes V$ . Die Gruppe  $\text{GL}(V)$  wirkt auf  $V$  und damit auf  $V^* \otimes V^* \otimes V$  und lässt  $\mathcal{L}(V)$  stabil. Die Wirkung von  $\varphi \in \text{GL}(V)$  haben wir bereits als Wirkung  $[\ , \ ] \mapsto (\varphi)[\ , \ ]$  auf den Lie-Klammern getroffen. Die Menge der Isomorphieklassen aller Lie-Algebra-Strukturen auf  $V$  ist die Menge der  $\text{GL}(V)$ -Orbits  $\mathcal{L}(V)/\text{GL}(V)$ .

<sup>2</sup>Hinweis für diejenigen, welche mit Tensorprodukten noch zu wenig vertraut sind: der Abschnitt 7 lautet „Einschub: Tensorprodukte von Vektorräumen“.

## Beispiele

1.  $\mathcal{L}_1(K)/\mathrm{GL}_1(K)$  besteht aus einem Punkt.
2.  $\mathcal{L}_2(K)/\mathrm{GL}_2(K)$  besteht aus zwei Punkten.

$A \in \mathrm{GL}_2(K)$  wirkt auf  $\mathcal{L}_2(K)$  durch

$$A : c = \begin{pmatrix} c_{12}^1 \\ c_{12}^2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\det A} Ac.$$

Diese Wirkung hat zwei Orbits,  $\{0\}$  und  $K^2 - \{0\}$ . Eine 2-dimensionale Lie-Algebra ist entweder abelsch oder isomorph zur Lie-Algebra aufgespannt von  $e_1$  und  $e_2$  mit der Lie-Klammer  $[e_1, e_2] = e_2$  (Beispiel 4) auf Seite 7).

3. Ab der Dimension  $d = 3$  hängt die Klassifikation der  $d$ -dimensionalen Lie-Algebren vom zugrundeliegenden Körper ab. Die vollständige und irredundante Liste für die Isomorphieklassen der 3-dimensionalen komplexen Lie-Algebren sieht so aus:

Lie-Algebra	$[e_1, e_2]$	$[e_1, e_3]$	$[e_2, e_3]$
$\mathbb{C}^3$	0	0	0
$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$	$e_2$	0	0
$\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})$	$e_3$	0	0
$\mathfrak{r}_3(\mathbb{C})$	$e_2$	$e_2 + e_3$	0
$(\mathfrak{r}_{3,\lambda}(\mathbb{C}))_{\lambda \in \mathbb{C}^\times,  \lambda  \leq 1}$	$e_2$	$\lambda e_3$	0
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	$e_3$	$-e_2$	$e_1$

## 2.3 Darstellungen, Ideale

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End} V$ , Darstellungen

Die assoziative Algebra  $\mathrm{End} V$  der Endomorphismen des Vektorraumes  $V$  wird (wie jede assoziative Algebra) durch

$$[\varphi, \psi] := \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$$

zu einer Lie-Algebra, welche oft auch als  $\mathfrak{gl}(V)$  bezeichnet wird. Für  $V = K^d$  schreibt man auch  $\mathfrak{gl}_d(K) := \mathfrak{gl}(K^d)$ .

**Definition** Eine *Darstellung* einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  auf einem Vektorraum  $V$  ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\varrho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Jedem Element  $X \in \mathfrak{g}$  wird also ein linearer Operator  $\varrho(X)$  auf  $V$  zugeordnet, so dass gilt

$$\varrho([X, Y])v = \varrho(X)(\varrho(Y)v) - \varrho(Y)(\varrho(X)v) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

Wir werden die *adjungierte Darstellung* einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  noch öfter antreffen. Es ist dies die Darstellung

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \text{ad } X : Y \mapsto \text{ad } X(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

Wir müssen noch verifizieren, dass  $\text{ad}$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist. Die Linearität ist klar, also bleibt die Verträglichkeit mit den Lie-Klammern zu überprüfen,

$$\text{ad}[X, Y] \stackrel{?}{=} [\text{ad } X, \text{ad } Y] = (\text{ad } X) \circ (\text{ad } Y) - (\text{ad } Y) \circ (\text{ad } X).$$

Um nachzuweisen, dass links und rechts von  $\stackrel{?}{=}$  derselbe Endomorphismus von  $\mathfrak{g}$  steht, setzen wir  $Z \in \mathfrak{g}$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} \text{ad}[X, Y](Z) &= [[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = ((\text{ad } X) \circ (\text{ad } Y) - (\text{ad } Y) \circ (\text{ad } X))(Z). \end{aligned}$$

Wir können die Gleichung  $[[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y]$  auch lesen als

$$\text{ad } Z([X, Y]) = [\text{ad } Z(X), Y] + [X, \text{ad } Z(Y)],$$

d. h.  $\text{ad } Z : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ist eine Derivation für alle  $Z \in \mathfrak{g}$ . Derivationen dieser Form heissen *innere Derivationen* von  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 2.4** Für  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$  und  $X \in \mathfrak{g}$  gilt  $[\delta, \text{ad } X] = \text{ad}(\delta(X))$ .

*Beweis.* Für alle  $Y \in \mathfrak{g}$  ist

$$\begin{aligned} [\delta, \text{ad } X](Y) &= (\delta \circ (\text{ad } X) - (\text{ad } X) \circ \delta)(Y) \\ &= \delta([X, Y]) - [X, \delta(Y)] = [\delta(X), Y] = (\text{ad } \delta(X))(Y). \end{aligned}$$

□

Sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  zwei Unterräume einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , so schreiben wir  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  für den Unterraum, welcher von den Elementen der Form  $[A, B]$  mit  $A \in \mathfrak{a}$  und  $B \in \mathfrak{b}$  aufgespannt wird. Es gilt  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$ .

**Definition** Eine (*Lie-*)*Unteralgebra*  $\mathfrak{a}$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein Unterraum, welcher  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$  erfüllt. Notation:  $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ .

Ein *Ideal*  $\mathfrak{a}$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein Unterraum, welcher  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$  erfüllt (d. h. ein Unterraum, welcher unter allen inneren Derivationen von  $\mathfrak{g}$  stabil ist). Notation:  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ . Wegen  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$  sind alle Ideale zweiseitig.

Ein *charakteristisches Ideal*  $\mathfrak{a}$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein Unterraum, welcher stabil ist unter allen Derivationen von  $\mathfrak{g}$ . Ist dann  $\mathfrak{g}$  selbst ein Ideal in  $\mathfrak{s}$ , so ist  $\mathfrak{a}$  auch ein Ideal in  $\mathfrak{s}$ .

Die Begriffe Unteralgebra und (charakteristisches) Ideal haben die folgenden Analogie in der Kategorie der Gruppen:

Lie-Algebren	$\leftrightarrow$	Gruppen
Unteralgebra	$\leftrightarrow$	Untergruppe
Ideal	$\leftrightarrow$	Normalteiler
charakteristisches Ideal	$\leftrightarrow$	charakteristische Untergruppe

So wie Normalteiler Kerne von Gruppenhomomorphismen sind, sind Ideale Kerne von Homomorphismen von Lie-Algebren. Es sei  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Dann gilt

$$\varphi([X, A]) = [\varphi(X), \varphi(A)] = [\varphi(X), 0] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1, \forall A \in \ker \varphi,$$

also  $[\mathfrak{g}_1, \ker \varphi] \subseteq \ker \varphi$  und folglich  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathfrak{g}_1$ . Ebenso leicht sieht man, dass allgemeiner Urbilder von Idealen wieder Ideale sind. Weiter ist im  $\varphi \leq \mathfrak{g}_2$ .

**Beispiel** Für  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  haben wir im  $\text{ad} = \text{ad } \mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . Nach Lemma 2.4 gilt  $\text{ad } \mathfrak{g} \trianglelefteq \text{Der } \mathfrak{g}$ .

**Notation** Ist  $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ , so können wir zwei verschiedene adjungierte Darstellungen betrachten, nämlich nebst der adjungierten Darstellung von  $\mathfrak{a}$  auch die Einschränkung der adjungierten Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{a}$ . Gegebenenfalls verwenden wir dafür die Notationen

$$\text{ad}_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Ist allgemeiner  $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$  ein  $\text{ad } \mathfrak{h}$ -stabiler Unterraum für eine Unteralgebra  $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ , so schreiben wir  $\text{ad}_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{s})$ .

Ist  $\mathfrak{g}$  irgendeine Lie-Algebra mit einem Ideal  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ , so wird der Quotientenvektorraum  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  mit der Lie-Klammer

$$[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] := [X, Y] + \mathfrak{a} \quad X, Y \in \mathfrak{g} \tag{2.1}$$

eine Lie-Algebra. Damit (2.1) wohldefiniert ist, brauchen wir  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ . Die natürliche Quotientenabbildung

$$\begin{aligned}\pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ X &\longmapsto X + \mathfrak{a}\end{aligned}$$

ist dann ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren mit  $\ker \pi = \mathfrak{a}$ . Wir haben also die kurze exakte Folge<sup>3</sup>

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

von Lie-Algebren.

Für Lie-Algebren gelten die üblichen Isomorphiesätze, welche aus

$$\mathfrak{g}_1 / \ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi \tag{2.2}$$

folgen, wobei  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist.

**Proposition 2.5** *Für  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$  haben wir einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cong (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}.$$

*Für  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  mit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  haben wir einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}).$$

*Beweis.* Wir verwenden (2.2).

Im ersten Fall betrachten wir die kanonische Projektion  $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  und schränken sie auf  $\mathfrak{b}$  ein.

Im zweiten Fall betrachten wir die Zusammensetzung der kanonischen Projektionen  $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \twoheadrightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ .  $\square$

Das *Produkt*  $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$  zweier Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_1$  und  $\mathfrak{g}_2$  ist die Lie-Algebra auf dem Vektorraum  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  mit der Lie-Klammer

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

Es gilt dann  $\mathfrak{g}_i \trianglelefteq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$  ( $i = 1, 2$ ). Analog definiert man Produkte mit mehr als zwei Faktoren.

Es seien  $L/K$  eine Körpererweiterung und  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über  $K$ . Dann ist  $\mathfrak{g} \otimes_K L$  eine Lie-Algebra über  $L$ , wobei die Lie-Klammer durch die Formel  $[X_1 \otimes l_1, X_2 \otimes l_2] := [X_1, X_2] \otimes l_1 l_2$  definiert ist.

---

<sup>3</sup>Eine kurze exakte Folge  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$  ist charakterisiert durch  $\ker \mu = 0$ ,  $\operatorname{im} \mu = \ker \varepsilon$ ,  $\operatorname{im} \varepsilon = C$ .

### 3 Auflösbare und nilpotente Lie-Algebren

Auflösbare Lie-Algebren entstehen aus einer abelschen Lie-Algebra durch eine Folge von abelschen Erweiterungen. Liegen speziell zentrale Erweiterungen vor, so erhält man nilpotente Lie-Algebren.

$$\{\text{auflösbare Lie-Algebren}\} \supseteq \{\text{nilpotente Lie-Algebren}\} \supseteq \{\text{abelsche Lie-Algebren}\}$$

Zu jeder Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  definieren wir zwei absteigende Folgen von charakteristischen Idealen.

#### Kommutatorreihe oder derivierte Reihe von $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}^0 \mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^1 \mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^2 \mathfrak{g} \supseteq \dots$$

mit  $\mathcal{D}^{p+1} \mathfrak{g} = [\mathcal{D}^p \mathfrak{g}, \mathcal{D}^p \mathfrak{g}]$  für  $p \geq 0$ .

#### Absteigende Zentralreihe<sup>4</sup> von $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^1 \mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}^2 \mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}^3 \mathfrak{g} \supseteq \dots$$

mit  $\mathcal{C}^{p+2} \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}]$  für  $p \geq 0$ .

**Definition** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt

- *auflösbar* (der Klasse  $\leq p$ ), falls  $\mathcal{D}^p \mathfrak{g} = 0$  für ein  $p \geq 0$ ,
- *nilpotent* (der Klasse  $\leq p$ ), falls  $\mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g} = 0$  für ein  $p \geq 0$ .

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist auflösbar/nilpotent der Klasse 0 (bzw.  $\leq 1$ ) genau dann, wenn  $\mathfrak{g} = 0$  (bzw. wenn  $\mathfrak{g}$  abelsch ist). Jede nilpotente Lie-Algebra ist auflösbar, denn  $\mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^p \mathfrak{g}$ .

Für auflösbare und nilpotente Lie-Algebren gibt es die folgenden beiden Standardbeispiele.

#### Beispiele

1. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{b}_d(K) \leq \mathfrak{gl}_d(K)$  der oberen  $d \times d$ -Dreiecksmatrizen ist auflösbar (aber nicht nilpotent für  $d \geq 2$ ).

---

<sup>4</sup>Es gibt auch die *aufsteigende Zentralreihe* von  $\mathfrak{g}$

$$0 = \mathcal{C}_0 \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}_1 \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} \subseteq \dots$$

mit  $\mathcal{C}_{p+1} \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$  so, dass  $\mathcal{C}_{p+1} \mathfrak{g} / \mathcal{C}_p \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g} / \mathcal{C}_p \mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} / \mathcal{C}_p \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g} / \mathcal{C}_p \mathfrak{g}\}$  das Zentrum von  $\mathfrak{g} / \mathcal{C}_p \mathfrak{g}$  ist.

2. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{n}_d(K) \leq \mathfrak{gl}_d(K)$  der oberen  $d \times d$ -Dreiecksmatrizen mit Nullen auf der Diagonale ist nilpotent.

ÜBUNG 3.1 Es gelte  $\text{char } K = 2$ . Dann ist  $\mathfrak{sl}_2(K) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(K) \mid \text{tr } X = 0\}$  eine nilpotente Lie-Algebra.

**Lemma 3.1** *Es sei  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren. Dann gelten  $\varphi(\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1) = \mathcal{D}^p \mathfrak{g}_2$  und  $\varphi(\mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_1) = \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_2$ .*

*Beweis.* Die Behauptungen folgen mit Induktion nach  $p$ . Für  $p = 0$  ist dank der Surjektivität von  $\varphi$  nichts zu zeigen.

Aus  $\varphi(\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1) = \mathcal{D}^p \mathfrak{g}_2$  folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{D}^{p+1} \mathfrak{g}_1) &= \varphi([\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1, \mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1]) \\ &= [\varphi(\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1), \varphi(\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_1)] = [\mathcal{D}^p \mathfrak{g}_2, \mathcal{D}^p \mathfrak{g}_2] = \mathcal{D}^{p+1} \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

Aus  $\varphi(\mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_1) = \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_2$  folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{C}^{p+2} \mathfrak{g}_1) &= \varphi([\mathfrak{g}_1, \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_1]) \\ &= [\varphi(\mathfrak{g}_1), \varphi(\mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_1)] = [\mathfrak{g}_2, \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{g}_2] = \mathcal{C}^{p+2} \mathfrak{g}_2. \quad \square \end{aligned}$$

*Bemerkung* Unteralgebren von auflösbaren (bzw. nilpotenten) Lie-Algebren sind offensichtlich auflösbar (bzw. nilpotent). Gemäss Lemma 3.1 sind Quotienten von auflösbaren (bzw. nilpotenten) Lie-Algebren auch auflösbar (bzw. nilpotent).

ÜBUNG 3.2 Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra. Dann gelten  $[\mathcal{C}^p \mathfrak{g}, \mathcal{C}^q \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{C}^{p+q} \mathfrak{g}$  und  $\mathcal{D}^p \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}^{2p} \mathfrak{g}$ .

### 3.1 Der Satz von Engel

Ein grundlegendes Resultat über nilpotente Lie-Algebren ist der Satz von Engel, der eine Verbindung zwischen nilpotenten Endomorphismen und nilpotenten Lie-Algebren aufzeigt.

**Satz 3.2 (Engel)** *Es sei  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  auf dem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ . Für jedes Element  $X \in \mathfrak{g}$  sei  $\varrho(X) \in \mathfrak{gl}(V)$  ein nilpotenter Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  eine Basis, bezüglich welcher alle Endomorphismen  $\varrho(X)$  für  $X \in \mathfrak{g}$  durch obere Dreiecksmatrizen mit Nullen auf der Diagonale dargestellt werden. Insbesondere ist das Bild im  $\varrho$  eine nilpotente Lie-Algebra.*



*Beweis.* Die Behauptung folgt aus dem folgenden Satz 3.4 durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\square$

Der Kern von Engels Satz ist die Aussage, dass eine endlich dimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \neq 0$ , deren Elemente nilpotente Endomorphismen sind, einen gemeinsamen Eigenvektor (natürlich zum Eigenwert 0) besitzt.

Wir formulieren zuerst separat ein Lemma, das wir später nochmals verwenden werden.

**Lemma 3.3** *Es sei  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist auch  $\text{ad } X$  nilpotent.*

*Beweis.* Es gilt  $\text{ad } X = L_X - R_X$  mit  $L_X(Y) = XY$  (Linkstranslation) und  $R_X(Y) = YX$  (Rechtstranslation). Die Endomorphismen  $L_X$  und  $R_X$  kommutieren miteinander und sind nach Voraussetzung nilpotent. Also ist auch der Endomorphismus  $L_X - R_X = \text{ad } X$  nilpotent. ( $X^{p+1} = 0 \implies (\text{ad } X)^{2p+1} = 0$ .)  $\square$

**Satz 3.4** *Es sei  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  auf dem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V \neq 0$ . Für jedes Element  $X \in \mathfrak{g}$  sei der Endomorphismus  $\rho(X) \in \mathfrak{gl}(V) = \text{End } V$  nilpotent. Dann gibt es einen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , so, dass  $\rho(X)v = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung betreffen das Bild von  $\rho$ . Wir können also  $\mathfrak{g}$  durch  $\text{im } \rho$  ersetzen und  $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$  annehmen.

Wir verwenden nun Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ . Für  $\dim \mathfrak{g} = 0$  (und auch  $\dim \mathfrak{g} = 1$ ) gilt die Behauptung offensichtlich.

Für eine Unteralgebra  $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$  definieren wir den *Normalisator* von  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{g}$ ,

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad } X(A) \in \mathfrak{a} \quad \forall A \in \mathfrak{a}\} \supseteq \mathfrak{a},$$

als die grösste Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ , in der  $\mathfrak{a}$  ein Ideal ist.

Behauptung:  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g} \implies \mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ .

Für  $A \in \mathfrak{a}$  ist nach Lemma 3.3 auch  $\text{ad } A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  nilpotent. Die Unteralgebra  $\mathfrak{a}$  wirkt folglich auch auf dem Vektorraum  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \neq 0$  durch nilpotente Endomorphismen. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es einen Vektor  $\overline{X} = X + \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ,  $X \notin \mathfrak{a}$ , mit  $\text{ad } A(\overline{X}) = 0 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  für alle  $A \in \mathfrak{a}$ . Somit gilt  $\text{ad } X(A) = -\text{ad } A(X) \in \mathfrak{a}$  für alle  $A \in \mathfrak{a}$ , d. h.  $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ . Die Behauptung ist damit bewiesen.

Es sei nun  $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$  eine maximale Unteralgebra mit  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$ . Nach der vorherigen Behauptung ist dann  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$ , also  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ . Ein 1-dimensionaler Unterraum der

Lie-Algebra  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  ist eine (abelsche) Lie-Unteralgebra, und ihr Urbild in  $\mathfrak{g}$  ist eine Unter algebra von  $\mathfrak{g}$ , welche  $\mathfrak{a}$  echt umfasst. Nach der Maximalitätsbedingung ist dann dieses Urbild ganz  $\mathfrak{g}$ . Also ist  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  1-dimensional.

Wir betrachten den Unterraum

$$W := \{v \in V \mid Av = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{a}\} \subseteq V.$$

Aus  $\dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}$  folgt nach der Induktionsvoraussetzung  $W \neq 0$ . Weiter ist wegen  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  der Unterraum  $W$  stabil unter  $\mathfrak{g}$ , nämlich

$$A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}, v \in W \implies AXv = XAv - \underbrace{[X, A]}_{\in \mathfrak{a}}v = 0.$$

Wir wählen nun  $Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{a}$ . Der Endomorphismus  $Y \in \mathfrak{gl}(V)$  ist nilpotent und  $Y(W) \subseteq W$ . Es gibt also einen Vektor  $v \in W$ ,  $v \neq 0$ , mit  $Yv = 0$ . Dann gilt  $Xv = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{a} + K \cdot Y$ .  $\square$

### 3.2 Der Satz von Lie

Ein grundlegendes Resultat über auflösbare Lie-Algebren ist der Satz von Lie, der dem Satz von Engel für nilpotente Lie-Algebren ähnelt.

Nach Engels Satz ist eine nilpotente Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}_d(K)$  isomorph zu einer Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{n}_d(K)$ .

Wir haben  $\mathfrak{b}_d(K) \leq \mathfrak{gl}_d(K)$  als Standardbeispiel von auflösbaren Lie-Algebren kennengelernt. Es liegt also die Vermutung nahe, dass auflösbare Lie-Unteralgebren von  $\mathfrak{gl}_d(K)$  isomorph zu einer Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{b}_d(K)$  sind. Ganz so allgemein kann das nicht gelten. Im allgemeinen sind Endomorphismen von  $K^d$  unter  $\mathrm{GL}_d(K)$  nicht zu einer oberen Dreiecksmatrix konjugiert, sondern nur, wenn das charakteristische Polynom des untersuchten Endomorphismus in Linearfaktoren zerfällt. Dies gilt natürlich dann, wenn der Körper  $K$  algebraisch abgeschlossen ist. Es gibt noch eine zweite Schwierigkeit, die wir durch die Voraussetzung  $\mathrm{char} K = 0$  erledigen können.

**Satz 3.5 (Lie)** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine auflösbare Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  der Charakteristik 0. Ist  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf einem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ , so besitzt  $V$  eine Basis, bezüglich welcher alle Endomorphismen  $\rho(X)$  für  $X \in \mathfrak{g}$  durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus dem folgenden Satz durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\square$

**Satz 3.6** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine auflösbare Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  der Charakteristik 0. Ist  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf einem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V \neq 0$ , so gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor von  $\varrho(X)$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ .*

Zum Beweis von Satz 3.6 benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.7** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über einem Körper  $K$  der Charakteristik 0. Weiter sei  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf dem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V \neq 0$ . Ferner seien gegeben*

- ein Ideal  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ,
- ein Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ ,
- eine Abbildung  $\chi : \mathfrak{a} \rightarrow K$

mit  $\varrho(A)v = \chi(A)v$  für alle  $A \in \mathfrak{a}$ . Dann gilt  $\chi([X, A]) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $A \in \mathfrak{a}$ .

*Beweis.* Wir können die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  durch ihr Bild unter  $\varrho$  in  $\mathfrak{gl}(V)$  ersetzen und so  $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$  annehmen.

Für  $X \in \mathfrak{g}$  betrachten wir den Unterraum  $V_i$  von  $V$ , welcher von den Vektoren  $v, Xv, \dots, X^{i-1}v$  aufgespannt wird. Wir erhalten eine Fahne

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V_{n+1} \subseteq V.$$

Es gilt dann  $\dim V_n = n$  und  $X(V_n) \subseteq V_n$ .

Behauptung:  $A \in \mathfrak{a} \implies AX^i v \equiv \chi(A) X^i v \pmod{V_i}$  für alle  $i \geq 0$ .

Dies folgt durch Induktion nach  $i$ . Für  $i = 0$  gilt die Behauptung nach Voraussetzung. Für  $i > 0$  haben wir

$$\begin{aligned} AX^i v &= AX X^{i-1} v = X \underbrace{AX^{i-1} v}_{\substack{\in \mathfrak{a} \\ \text{nach Ind.vor.}}} - \underbrace{[X, A] X^{i-1} v}_{\substack{\in V_i \text{ nach Ind.vor.}}} \\ &\equiv \underbrace{\chi(A) X^{i-1} v}_{\substack{\text{(mod } V_{i-1}) \\ \text{nach Ind.vor.}}} \pmod{V_i}, \quad \text{denn } X(V_{i-1}) \subseteq V_i. \end{aligned}$$

Für  $A \in \mathfrak{a}$  betrachten wir nun den Endomorphismus von  $V_n$ , welcher durch  $v \mapsto Av$  gegeben ist. Bezüglich der Basis  $v, Xv, \dots, X^{n-1}v$  von  $V_n$  lautet die Matrix dieses Endomorphismus nach der soeben bewiesenen Behauptung

$$\begin{pmatrix} \chi(A) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi(A) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also  $\operatorname{tr}_{V_n} A = n \chi(A)$ . Für  $[X, A] \in \mathfrak{a}$  anstelle von  $A$  erhalten wir dann  $\operatorname{tr}_{V_n} [X, A] = n \chi([X, A])$ . Andererseits ist  $\operatorname{tr}_{V_n} [X, A] = \operatorname{tr}_{V_n} (XA - AX) = 0$  (beachte, dass auch  $X(V_n) \subseteq V_n$ ). Wegen  $n \geq 1$  und  $\operatorname{char} K = 0$  ( $\operatorname{char} K > \dim V$  würde auch genügen) ist also  $\chi([X, A]) = 0$ .  $\square$

*Beweis.* (Satz 3.6) Wir verwenden Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ . Für  $\dim \mathfrak{g} = 0$  ist die Aussage trivial. Wir setzen also  $\dim \mathfrak{g} > 0$  voraus. Weil  $\mathfrak{g}$  auflösbar ist, gilt  $\mathcal{D}^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ .

Es sei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$  ein Unterraum der Kodimension 1, der  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  enthält. Es gilt dann  $\mathfrak{a}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \trianglelefteq \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , weil  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  eine abelsche Lie-Algebra ist. Folglich ist  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ . (Die Eigenschaft  $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{a} = 1$  ist für  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  natürlich irrelevant und wird erst später gebraucht.)

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , und eine Abbildung  $\chi : \mathfrak{a} \rightarrow K$  mit  $Av = \chi(A)v$  für alle  $A \in \mathfrak{a}$ .

Wir betrachten den Unterraum

$$W := \{w \in V \mid Aw = \chi(A)w \quad \forall A \in \mathfrak{a}\} \neq 0.$$

Nun verwenden wir Lemma 3.7 um zu zeigen, dass  $W$  stabil unter  $\mathfrak{g}$  ist.

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}, w \in W &\implies AXw = XAw - [X, A]w \\ &= \chi(A)Xw - \chi([X, A])w = \chi(A)Xw, \end{aligned}$$

d. h.  $Xw \in W$ .

Wir wählen nun  $Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{a}$ . Wegen  $Y(W) \subseteq W \neq 0$  und weil  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenvektor  $v' \in W$  für  $Y$ . Der Vektor  $v'$  ist dann ein Eigenvektor für alle  $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{a} + K \cdot Y$ .  $\square$

Der Satz von Lie ist falsch in positiver Charakteristik.

ÜBUNG 3.3 Es sei  $K$  ein (algebraisch abgeschlossener) Körper der Charakteristik 2. Gemäss Übung 3.1 ist dann  $\mathfrak{sl}_2(K)$  nilpotent, also auflösbar. Zeige, dass die Standarddarstellung

$$\varrho : \mathfrak{sl}_2(K) \longrightarrow \mathfrak{gl}_2(K)$$

keinen gemeinsamen Eigenvektor besitzt.

ÜBUNG 3.4 Für  $\operatorname{char} K = p > 0$  spannen die beiden  $p \times p$ -Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & p-1 \end{pmatrix}$$

eine 2-dimensionale, also auflösbare Unter algebra von  $\mathfrak{gl}_p(K)$  auf. Es gibt keinen gemeinsamen Eigenvektor von  $X$  und  $Y$ .

## 4 Radikale, Halbeinfachheit

**Lemma 4.1** *Es sei  $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{b} \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von Lie-Algebren. Dann ist  $\mathfrak{g}$  genau dann auflösbar, wenn sowohl  $\mathfrak{a}$  als auch  $\mathfrak{b}$  auflösbar sind.*

*Beweis.* Die Bemerkung nach Lemma 3.1 zeigt die eine Richtung.

Umgekehrt seien  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  auflösbar,  $\mathcal{D}^p \mathfrak{a} = 0$  und  $\mathcal{D}^q \mathfrak{b} = 0$ . Dann ist nach Lemma 3.1  $\pi(\mathcal{D}^q \mathfrak{g}) = \mathcal{D}^q \mathfrak{b} = 0$ , also  $\mathcal{D}^q \mathfrak{g} \subseteq \ker \pi = \text{im } \varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{a})$ . Somit ist  $\mathcal{D}^{p+q} \mathfrak{g} = \mathcal{D}^p \mathcal{D}^q \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{D}^p \varepsilon(\mathfrak{a}) = \varepsilon(\mathcal{D}^p \mathfrak{a}) = 0$ .  $\square$

Die Summe zweier auflösbarer Ideale  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ist ein auflösbares Ideal. Dies folgt durch Betrachten der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \longrightarrow (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

mit  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$  und Lemma 4.1. Die Summe aller auflösbaren Ideale in einer endlich dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist also das maximale auflösbare Ideal von  $\mathfrak{g}$ . Es heisst das *Radikal* von  $\mathfrak{g}$  und wird mit  $\text{rad } \mathfrak{g}$  bezeichnet. Das Radikal ist ein charakteristisches Ideal.

*Bemerkung* Lemma 4.1 mit „auflösbar“ durch „nilpotent“ ersetzt ist falsch. Trotzdem ist die Summe zweier nilpotenter Ideale wieder ein nilpotentes Ideal. Die Summe aller nilpotenten Ideale in einer endlich dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist also das maximale nilpotente Ideal von  $\mathfrak{g}$ . Es heisst das *Nilradikal* von  $\mathfrak{g}$  und wird mit  $\text{nil } \mathfrak{g}$  bezeichnet. Das Nilradikal ist ein charakteristisches Ideal.

Zur Definition einer einfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  erwartet man die Bedingung  $\#\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}\} = 2$ , das heisst  $\mathfrak{g} \neq 0$  und die einzigen Ideale in  $\mathfrak{g}$  sind  $0$  und  $\mathfrak{g}$ . Tatsächlich hat sich die folgende Definition durchgesetzt.

**Definition** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heisst *einfach*, wenn die Bedingungen  $\dim \mathfrak{g} \neq 1$  und  $\#\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}\} = 2$  gelten.

Die 1-dimensionalen Lie-Algebren zählen also nicht als einfache Lie-Algebren. Von den beiden Isomorphieklassen zweidimensionaler Lie-Algebren besteht keine aus einfachen Lie-Algebren. Für eine einfache Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  gilt somit  $\dim \mathfrak{g} \geq 3$ .

Die Definition einer *halbeinfachen* Lie-Algebra lautet wie folgt.

**Definition** Eine endlich dimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heisst *halbeinfach*, wenn  $\mathfrak{g}$  keine auflösbaren Ideale  $\mathfrak{a} \neq 0$  enthält. Mit anderen Worten,  $\mathfrak{g}$  ist halbeinfach, wenn  $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$ .

*Bemerkung* Das letzte nichtverschwindende Ideal in der derivierten Reihe von  $\mathfrak{g}$  ist ein abelsches Ideal in  $\mathfrak{g}$ . Deshalb ist  $\mathfrak{g}$  genau dann halbeinfach, wenn  $\mathfrak{g}$  keine abelschen Ideale  $\mathfrak{a} \neq 0$  enthält.

Wir werden im Satz 5.10 zeigen, dass eine endlich dimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper der Charakteristik 0 genau dann halbeinfach ist, wenn  $\mathfrak{g}$  ein Produkt von einfachen Lie-Algebren ist.

Wir haben die kurze exakte Folge von Lie-Algebren

$$0 \longrightarrow \text{rad } \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Dabei ist das Ideal  $\text{rad } \mathfrak{g}$  auflösbar, und der Quotient  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  ist halbeinfach. In der Tat, ist  $\mathfrak{a}$  ein auflösbares Ideal in  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$ , so ist das Urbild  $\tilde{\mathfrak{a}}$  von  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{g}$  ein Ideal, das  $\text{rad } \mathfrak{g}$  enthält und das gemäss Lemma 4.1 auflösbar ist. Also gilt  $\tilde{\mathfrak{a}} = \text{rad } \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{a} = 0$ .

In einem gewissen Sinn genügt es deshalb, nur auflösbare und halbeinfache Lie-Algebren zu studieren. Dies ist nicht ganz korrekt, denn die Erweiterung (4.1) ist im allgemeinen nicht trivial (d. h.  $\mathfrak{g}$  ist i. a. nicht isomorph zum Produkt der Lie-Algebren  $\text{rad } \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$ ).

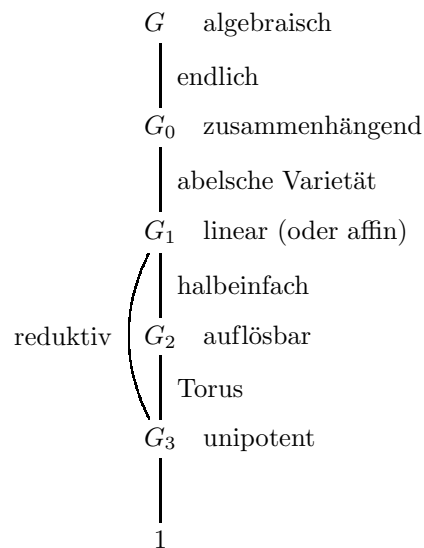
Es ist nicht leicht, alle Erweiterungen  $0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b} \rightarrow 0$  von  $\mathfrak{b}$  mit Kern isomorph zu  $\mathfrak{a}$  zu konstruieren. In unserem Fall mit  $\mathfrak{a} = \text{rad } \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  liegt jedoch eine besondere Situation vor, indem  $\mathfrak{g}$  nämlich ein semidirektes Produkt  $\mathfrak{g} \cong \text{rad } \mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  ist.

**Satz 4.2 (Levi)** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Dann gibt es eine Lie-Unteralgebra  $\mathfrak{l} \leq \mathfrak{g}$ , welche unter der kanonischen Projektion  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  isomorph auf  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  abgebildet wird.*

*Beweisskizze.* Mit Induktion nach  $\dim \text{rad } \mathfrak{g}$  reduziert man die Behauptung auf dem Fall, wo  $\text{rad } \mathfrak{g}$  abelsch ist. Die Darstellung  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\text{rad } \mathfrak{g})$  definiert dann eine Darstellung  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\text{rad } \mathfrak{g})$ . Aber  $H^2(\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}; \text{rad } \mathfrak{g}) = 0$ , weil  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  halbeinfach ist. (Das hat damit zu tun, dass  $\mathfrak{s}$  einfach  $\implies \dim \mathfrak{s} \geq 3$ .) Und somit gibt es als Erweiterung von  $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$  mit Kern isomorph zu  $\text{rad } \mathfrak{g}$  nur das semidirekte Produkt.

Siehe auch [B1, Chap. 1 §3, exerc. 12)]. □

Bevor wir uns auf die halbeinfachen Lie-Algebren konzentrieren werden, soll zuerst noch zur allgemeinen Information das globale Bild im Kontext der algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper veranschaulicht werden.



**Beispiele** Für  $G = O(n, \mathbb{C})$  ist  $G_0 = SO(n, \mathbb{C})$  eine Untergruppe vom Index 2. Es gilt ganz allgemein  $\text{Lie } G = \text{Lie } G_0$ .

Beispiel für eine abelsche Varietät ist eine elliptische Kurve (eine abelsche Varietät der Dimension 1). Abelsche Varietäten sind projektive Varietäten, und als Gruppen sind sie abelsch.  $\text{Lie}(G_0/G_1)$  ist eine abelsche Lie-Algebra.

Für  $G_1 = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  ist  $G_2 = \mathbb{C}^\times \cdot \mathbf{1}$  die Gruppe der skalaren Diagonalmatrizen. Der halbeinfache Quotient  $\text{GL}_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times \cdot \mathbf{1} = \text{PGL}_n(\mathbb{C})$  ist in diesem Fall (unter der Voraussetzung  $n \geq 2$ ) einfach. Weiter ist dann  $G_3$  trivial, d. h.  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  ist reduktiv.

Für

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \text{GL}_4(\mathbb{C}) \right\}$$

ist

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \alpha & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt  $G_1/G_2 \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  und  $G_1/G_3 \cong \text{GL}_2(\mathbb{C}) \times \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . Die Lie-Algebra von einem Torus ist abelsch, und die Lie-Algebra einer unipotenten algebraischen Gruppe ist nilpotent.

## 5 Invariante Bilinearformen, Cartans Kriterium

**Definition** Es seien  $\varrho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_i)$  ( $i = 1, 2$ ) zwei Darstellungen einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über dem Körper  $K$ . Eine Bilinearform  $b : V_1 \times V_2 \rightarrow K$  heisst *invariant*, wenn gilt

$$b(\varrho_1(X)v_1, v_2) + b(v_1, \varrho_2(X)v_2) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2. \quad (5.1)$$

**Beispiel** Für  $\mathfrak{g} = \text{Lie } O(d) = \{X \in M(d \times d, \mathbb{R}) \mid X + X^\top = 0\}$  und mit der Standarddarstellung  $\varrho_1 = \varrho_2 : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = M(d \times d, \mathbb{R})$  ist die Bilinearform

$$\begin{aligned} b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1^\top v_2 \end{aligned}$$

invariant: für  $X \in \text{Lie } O(d)$  gilt

$$(Xv_1)^\top v_2 + v_1^\top Xv_2 = v_1^\top X^\top v_2 + v_1^\top Xv_2 = -v_1^\top Xv_2 + v_1^\top Xv_2 = 0.$$

Damit ist wohl auch klar geworden, weshalb wir sagen, die Formel (5.1) definiere eine invariante Bilinearform. In unserem Beispiel ist die Bilinearform  $b$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^d$ , und dieses ist invariant unter der Gruppe  $O(d)$ , nämlich

$$b(Av_1, Av_2) = b(v_1, v_2) \quad \forall A \in O(d), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d. \quad (5.2)$$

Für  $A = \mathbf{1} + \varepsilon X \in O(d, \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ , also mit  $X \in \text{Lie } O(d)$  und  $\varepsilon^2 = 0$ , ist dann die Formel in (5.2) äquivalent zu

$$b(Xv_1, v_2) + b(v_1, Xv_2) = 0.$$

**Definition** Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über dem Körper  $K$ . Eine Bilinearform  $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$  heisst *invariant*, wenn sie im Sinn der vorherigen Definition invariant ist, wobei  $\varrho_1 = \varrho_2 = \text{ad}$ . Eine invariante Bilinearform  $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$  ist also charakterisiert durch

$$b([Y, X], Z) + b(X, [Y, Z]) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

oder

$$b([X, Y], Z) = b(X, [Y, Z]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \quad (5.3)$$

*Bemerkung* Aufgrund dieser letzten Charakterisierung (5.3) heisst eine invariante Bilinearform manchmal auch assoziativ.



Für eine Darstellung  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  in einem endlich dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  erhalten wir die symmetrische Bilinearform

$$b_\varrho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K \\ (X, Y) \longmapsto \operatorname{tr}(\varrho(X) \circ \varrho(Y)).$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass  $b_\varrho$  invariant ist.

$$\begin{aligned} b_\varrho(\operatorname{ad} X(Y), Z) + b_\varrho(Y, \operatorname{ad} X(Z)) &= \operatorname{tr}(\varrho([X, Y]) \circ \varrho(Z)) + \operatorname{tr}(\varrho(Y) \circ \varrho([X, Z])) \\ &= \operatorname{tr}([\varrho(X), \varrho(Y)] \circ \varrho(Z)) + \operatorname{tr}(\varrho(Y) \circ [\varrho(X), \varrho(Z)]) \\ &= \operatorname{tr}(\varrho(X) \circ \varrho(Y) \circ \varrho(Z)) - \operatorname{tr}(\varrho(Y) \circ \varrho(X) \circ \varrho(Z)) \\ &\quad + \operatorname{tr}(\varrho(Y) \circ \varrho(X) \circ \varrho(Z)) - \operatorname{tr}(\varrho(Y) \circ \varrho(Z) \circ \varrho(X)) = 0. \end{aligned}$$

**Definition** Die *Killing-Form* einer endlich dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über dem Körper  $K$  ist die symmetrische invariante Bilinearform

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K \\ (X, Y) \longmapsto \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y).$$

ÜBUNG 5.1 Bestimme die Matrix der Killing-Form einer endlich dimensionalen Lie-Algebra durch ihre Strukturkonstanten bezüglich einer Basis.

**Lemma 5.1** *Es seien  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra und  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ein Ideal. Dann stimmt die Einschränkung der Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  mit der Killing-Form von  $\mathfrak{a}$  überein.*

*Beweis.* Wir zerlegen  $\mathfrak{g}$  als Vektorraum in  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{a}}$ . Für  $A \in \mathfrak{a}$  und  $X \in \mathfrak{g}$  haben die Endomorphismen  $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} A, \operatorname{ad}_\mathfrak{g} X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{a}})$  die Blockformen

$$\operatorname{ad}_\mathfrak{g} A = \begin{pmatrix} \operatorname{ad}_\mathfrak{a} A & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_\mathfrak{g} X = \begin{pmatrix} \operatorname{ad}_\mathfrak{a} X & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Es gilt folglich

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} A \circ \operatorname{ad}_\mathfrak{g} X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\mathfrak{a} A \circ \operatorname{ad}_\mathfrak{a} X)$$

für alle  $A \in \mathfrak{a}$  und  $X \in \mathfrak{g}$  (also insbesondere für  $X \in \mathfrak{a}$ ). □

**Lemma 5.2** *Es sei  $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$  eine symmetrische invariante Bilinearform. Ist  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ , so ist auch der Orthogonalraum von  $\mathfrak{a}$  bezüglich  $b$*

$$\mathfrak{a}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} \mid b(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$$

*ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Zuerst eine Bemerkung zur Symmetrie: sie hat zur Folge, dass

$$\{X \in \mathfrak{g} \mid b(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\} = \{X \in \mathfrak{g} \mid b(Y, X) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Wir müssen dann also nicht zwischen Links- und Rechts-Orthogonalraum bezüglich  $b$  unterscheiden. Statt Symmetrie zu fordern, genügt dazu auch die Bedingung  $b(X, Y) = \lambda(b(Y, X))$  für eine Involution  $\lambda : K \rightarrow K$ .

Für  $Z \in \mathfrak{g}$  und  $X \in \mathfrak{a}^\perp$  haben wir für alle  $Y \in \mathfrak{a}$

$$b([Z, X], Y) = b(Z, \underbrace{[X, Y]}_{=0}) = 0,$$

also  $[Z, X] \in \mathfrak{a}^\perp$ . □

ÜBUNG 5.2 Es sei  $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$  eine symmetrische *vollständig invariante* Bilinearform, d. h.

$$b(\delta(X), Y) + b(X, \delta(Y)) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \delta \in \text{Der } \mathfrak{g}.$$

Zeige: Ist  $\mathfrak{a}$  ein charakteristisches Ideal in  $\mathfrak{g}$ , so auch  $\mathfrak{a}^\perp$ , wobei  $\mathfrak{a}^\perp$  der Orthogonalraum von  $\mathfrak{a}$  bezüglich  $b$  ist.

**Lemma 5.3** *Die Killing-Form einer endlich dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist vollständig invariant.*

*Beweis.* Für  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$  und  $X \in \mathfrak{g}$  gilt nach Lemma 2.4  $[\delta, \text{ad } X] = \text{ad } \delta(X)$ . Folglich haben wir für alle  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$  und  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$[\delta, (\text{ad } X) \circ (\text{ad } Y)] = (\text{ad } \delta(X)) \circ (\text{ad } Y) + (\text{ad } X) \circ (\text{ad } \delta(Y))$$

und somit, weil die Spur eines Kommutators verschwindet,

$$0 = \text{tr}[\delta, (\text{ad } X) \circ (\text{ad } Y)] = \kappa(\delta(X), Y) + \kappa(X, \delta(Y)),$$

d. h.  $\kappa$  ist vollständig invariant □

Die Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus ist aus der linearen Algebra bekannt. Wir rekapitulieren die Jordan-Zerlegung in der folgenden Proposition.

**Proposition 5.4 (Jordan-Zerlegung)** *Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Für jeden Endomorphismus  $\varphi \in \text{End}_K V$  gibt es einen halbeinfachen Endomorphismus  $\varphi_s$  und einen nilpotenten Endomorphismus  $\varphi_n$  in  $\text{End}_K V$  mit  $\varphi_s \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_s$  und  $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ . Die Endomorphismen  $\varphi_s$  und  $\varphi_n$  sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Es gibt Polynome  $p_s(T), p_n(T) \in T \cdot K[T]$  (also  $p_s(0) = 0 = p_n(0)$ ) so, dass  $\varphi_s = p_s(\varphi)$  und  $\varphi_n = p_n(\varphi)$ .*

**Korollar 5.5** *Es sei  $\varphi = \varphi_s + \varphi_n \in \text{End}_K V$  wie in Proposition 5.4. Sind dann  $A \subseteq B \subseteq V$  Unterräume mit  $\varphi(B) \subseteq A$ , so gilt  $\varphi_s(B) \subseteq A$  und  $\varphi_n(B) \subseteq A$ .*

*Beweis.* Für  $p(T) \in T \cdot K[T]$  gilt  $p(\varphi)B \subseteq A$ . □

**Lemma 5.6** *Es seien  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$  ein Endomorphismus mit Jordan-Zerlegung  $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ .*

a) *Gilt dann  $\text{tr}(\varphi \circ \overline{\varphi_s}) = 0$ , so ist  $\varphi_s = 0$ , d. h.  $\varphi$  nilpotent.*

b) *Es gibt ein Polynom  $q(T) \in T \cdot \mathbb{C}[T]$  mit  $\overline{\varphi_s} = q(\varphi_s)$ .*

*Beweis.* Es sei  $v_1, \dots, v_d$  eine Basis von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $\varphi_s$  besteht:  $\varphi_s(v_i) = \lambda_i v_i$ . Der Endomorphismus  $\overline{\varphi_s}$  ist natürlich durch  $\overline{\varphi_s}(v_i) = \overline{\lambda_i} v_i$  definiert.

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 = \text{tr}(\varphi \circ \overline{\varphi_s}) &= \sum_{i=1}^d \lambda_i \overline{\lambda_i} + \underbrace{\text{tr}(\varphi_n \circ \overline{\varphi_s})}_{= 0, \text{ denn } \varphi_n \circ \overline{\varphi_s} = \overline{\varphi_s} \circ \varphi_n \text{ ist nilpotent}} = \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^2 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0. \end{aligned}$$

b) Die Interpolationsformel von Lagrange liefert ein Polynom  $q(T)$  mit  $q(0) = 0$  und  $q(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$  ( $i = 1, \dots, d$ ). □

**Lemma 5.7** *Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Der Endomorphismus  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  habe die Jordan-Zerlegung  $X = X_s + X_n$ . Dann ist  $\text{ad } X = \text{ad } X_s + \text{ad } X_n$  die Jordan-Zerlegung von  $\text{ad } X$ .*

*Beweis.* Es gilt  $\text{ad } X = \text{ad } X_s + \text{ad } X_n$  und  $[\text{ad } X_s, \text{ad } X_n] = \text{ad}[X_s, X_n] = 0$ . Weiter wissen wir nach Lemma 3.3, dass  $\text{ad } X_n$  nilpotent ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $\text{ad } X_s$  halbeinfach ist. Dazu wählen wir eine Basis  $v_1, \dots, v_d$  von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $X_s$  besteht:  $X_s v_i = \lambda_i v_i$ . Dann ist  $(E_{jk})_{j,k=1, \dots, d}$  mit  $E_{jk} v_i = \delta_{ij} v_k$  eine Basis von  $\mathfrak{gl}(V)$ , welche aus Eigenvektoren von  $\text{ad } X_s$  besteht:

$$\text{ad } X_s(E_{jk}) = (\lambda_k - \lambda_j) E_{jk}. \quad (5.4)$$

□

Das folgende Kriterium von E. Cartan über auflösbare Lie-Algebren ist der Schlüssel für einige wichtige Eigenschaften von halbeinfachen Lie-Algebren. Der Beweis dieses fundamentalen Kriteriums benutzt die Sätze von Lie und Engel.

**Satz 5.8 (Cartans Kriterium)** *Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$  der Charakteristik 0. Für eine Lie-Unteralgebra  $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

- (i)  $\mathfrak{g}$  ist auflösbar.
- (ii)  $\operatorname{tr}(XY) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

*Beweis.* Wir dürfen annehmen,  $K$  sei algebraisch abgeschlossen, denn andernfalls ersetzen wir  $V$  durch  $V \otimes_K \overline{K}$  ( $\overline{K}$  ein algebraischer Abschluss von  $K$ ) und  $\mathfrak{g}$  durch  $\mathfrak{g} \otimes_K \overline{K}$ . Die Aussagen (i) und (ii) bleiben dabei erhalten. Wir dürfen sogar annehmen, dass  $K = \mathbb{C}$  gilt (Lefschetz-Prinzip).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Nach dem Satz von Lie können wir  $\mathfrak{g}$  mit einer Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{b}_{\dim V}(\mathbb{C})$  identifizieren. Dann ist  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{n}_{\dim V}(\mathbb{C})$ . Für  $X \in \mathfrak{b}_{\dim V}(\mathbb{C})$  und  $Y \in \mathfrak{n}_{\dim V}(\mathbb{C})$  gilt  $\operatorname{tr}(XY) = 0$ . Damit gilt auch  $\operatorname{tr}(XY) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Wir zeigen, dass jeder Endomorphismus  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  nilpotent ist. Nach dem Satz von Engel ist dann  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  eine nilpotente Lie-Algebra und folglich  $\mathfrak{g}$  auflösbar.

Es sei also  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq \mathfrak{gl}(V)$  mit Jordan-Zerlegung  $X = X_s + X_n$ . Zu zeigen ist  $X_s = 0$ . Nach Lemma 5.6 a) müssen wir die folgende Behauptung beweisen.

Behauptung: Es gilt  $\operatorname{tr}(X\overline{X_s}) = 0$ .

Wegen  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  können wir schreiben  $X = \sum_{j=1}^N [Y_j, Z_j]$  mit  $Y_j, Z_j \in \mathfrak{g}$ . Dann ist

$$\operatorname{tr}(X\overline{X_s}) = \sum_{j=1}^N \operatorname{tr}([Y_j, Z_j]\overline{X_s}) = \sum_{j=1}^N \operatorname{tr}(Z_j \underbrace{[\overline{X_s}, Y_j]}_{\in \operatorname{ad} \overline{X_s}(\mathfrak{g})}),$$

und wegen (ii) gilt  $\operatorname{tr}(X\overline{X_s}) = 0$ , falls  $\operatorname{ad} \overline{X_s}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  (was a priori nicht klar ist, denn wir wissen nicht, ob  $\overline{X_s} \in \mathfrak{g}$  gilt). Um die Inklusion  $\operatorname{ad} \overline{X_s}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  zu zeigen, beobachten wir zuerst, dass nach der Formel (5.4)  $\operatorname{ad} \overline{X_s} = \overline{\operatorname{ad} X_s}$  und dann nach Lemma 5.7  $\overline{\operatorname{ad} X_s} = \overline{(\operatorname{ad} X)_s}$  gelten. Laut Lemma 5.6 b) gibt es ein Polynom  $q(T) \in T \cdot \mathbb{C}[T]$  mit  $\overline{(\operatorname{ad} X)_s} = q((\operatorname{ad} X)_s)$ . Weiter ist  $(\operatorname{ad} X)_s = p_s(\operatorname{ad} X)$  für ein Polynom  $p_s(T) \in T \cdot \mathbb{C}[T]$ . Zusammengesetzt ergibt dies  $\operatorname{ad} \overline{X_s} = q(p_s(\operatorname{ad} X)) = (\operatorname{ad} X) \circ r(\operatorname{ad} X)$  für ein Polynom  $r(T) \in \mathbb{C}[T]$ . Also gilt  $\operatorname{ad} \overline{X_s}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .  $\square$

**Satz 5.9** *Eine endlich dimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper der Charakteristik 0 ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Killing-Form nicht ausgeartet ist.*

*Beweis.* Zuerst sei die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  halbeinfach, also  $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$ . Wir setzen

$$\mathfrak{r} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \kappa(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g} \quad (5.5)$$

und betrachten die Lie-Algebra  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{r} \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . Laut der Definition (5.5) gilt  $\text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{r}$  und  $Y \in \mathfrak{g}$  (also insbesondere auch für  $Y \in [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ ). Damit ist nach Cartans Kriterium  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{r}$  eine auflösbare Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . Aber  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$  ist injektiv, denn  $\ker \text{ad}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \trianglelefteq \text{rad } \mathfrak{g} = 0$ . Also ist  $\mathfrak{r} \cong \text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{r}$  ein auflösbares Ideal, und folglich gilt  $\mathfrak{r} \subseteq \text{rad } \mathfrak{g} = 0$ .

Umgekehrt sei die Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  nicht ausgeartet. Wir zeigen, dass für jedes abelsche Ideal  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  gilt  $\kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0$ . (Übrigens spielt die Charakteristik des Körpers für diese Richtung keine Rolle.)

Für  $X \in \mathfrak{a}$  und  $Y \in \mathfrak{g}$  ist  $\text{im}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y) \leq \mathfrak{a}$ , und somit  $\text{im}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)^2 = 0$ , da  $\mathfrak{a}$  ein abelsches Ideal ist. Der Endomorphismus  $\text{ad } X \circ \text{ad } Y$  ist also nilpotent, woraus  $\text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y) = 0$  folgt. Damit ist  $\kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0$  gezeigt. Da nach Voraussetzung  $\kappa$  nicht ausgeartet ist, muss  $\mathfrak{a} = 0$  gelten, d. h.  $\mathfrak{g}$  ist halbeinfach.  $\square$

**Satz 5.10** *Eine halbeinfache Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über einem Körper der Charakteristik 0 ist isomorph zu einem Produkt von einfachen Lie-Algebren. Genauer: Es gibt eindeutig bestimmte einfache Ideale  $\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n \trianglelefteq \mathfrak{g}$  mit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_n$ .*

*Beweis.* Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ist gemäss Lemma 5.2 auch der Orthogonalraum  $\mathfrak{a}^\perp$  von  $\mathfrak{a}$  bezüglich der Killing-Form ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ .

Behauptung: Das Ideal  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ist auflösbar.

In der Tat, wir zeigen, dass  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  abelsch ist. Die Restriktion der Killing-Form  $\kappa$  von  $\mathfrak{g}$  auf  $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp) \times (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp)$  verschwindet. Für  $A, B \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  und  $X \in \mathfrak{g}$  gilt

$$\begin{aligned} \kappa([A, B], X) &= \kappa(A, \underbrace{[B, X]}_{\in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp}) = 0, \end{aligned}$$

also  $[\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp] \subseteq \mathfrak{g}^\perp$ . Nach Satz 5.9 gilt aber  $\mathfrak{g}^\perp = 0$ , und somit ist  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  abelsch.

Weil  $\mathfrak{g}$  halbeinfach ist, haben wir dann  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$ . Weiter ist nach Satz 5.9  $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$ . Zusammen gibt dies die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ . Ausserdem ist  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$ . Es gilt also  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$ . Mit  $\mathfrak{g}$  sind auch  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{a}^\perp$  halbeinfach (andernfalls wäre die Killing-Form auf mindestens einem der Faktoren  $\mathfrak{a}$  oder  $\mathfrak{a}^\perp$  ausgeartet, also auch auf  $\mathfrak{g}$  ausgeartet). Die Behauptung folgt nun mit Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ .

Zur Eindeutigkeit: Es sei  $\mathfrak{s} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ein einfaches Ideal. Dann ist  $0 \neq [\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] \trianglelefteq \mathfrak{s}$ , also  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s}$ . Andererseits haben wir

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_n],$$

also  $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_j] = \mathfrak{s}_j$  für ein  $j$  und  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_k] = 0$  für  $k \neq j$ .  $\square$

Der nächste Satz 5.12 liefert eine präzise Beschreibung der Derivationen einer halbeinfachen Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Wir geben dafür zwei Beweise.

**Lemma 5.11** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Weiter sei  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ein halbeinfaches Ideal. Dann gilt  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ , und  $\mathfrak{a}^\perp$  ist die Kommutante<sup>5</sup> von  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Die Restriktion der Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{a}$  ist nach Lemma 5.1 die Killing-Form von  $\mathfrak{a}$ . Diese ist nicht ausgeartet, da  $\mathfrak{a}$  halbeinfach ist. Weil  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{a}$  ein abelsches Ideal ist, gilt  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$ . Es gilt daher  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ . Ferner ist gemäss Lemma 5.2 mit  $\mathfrak{a}$  auch  $\mathfrak{a}^\perp$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ . Also gilt  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$ . Schliesslich ist wegen  $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 0$  die Kommutante von  $\mathfrak{a}$  gleich  $\mathfrak{a}^\perp$ .  $\square$

**Satz 5.12** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Dann gilt  $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{ad } \mathfrak{g}$ , d. h. alle Derivationen von  $\mathfrak{g}$  sind innere Derivationen.*

*Beweis.* Wir wissen (Beispiel auf Seite 14), dass  $\text{ad } \mathfrak{g} \trianglelefteq \text{Der } \mathfrak{g}$  gilt. Ausserdem ist  $\text{ad } \mathfrak{g}$  isomorph zu  $\mathfrak{g}$ , also halbeinfach. Wir wenden nun das vorangegangene Lemma 5.11 auf die Lie-Algebra  $\text{Der } \mathfrak{g}$  an. (Wegen  $\text{Der } \mathfrak{g} \subseteq \text{End}_K \mathfrak{g}$  ist klar, dass mit  $\mathfrak{g}$  auch  $\text{Der } \mathfrak{g}$  endlich dimensional ist.)

Das Orthogonalkomplement von  $\text{ad } \mathfrak{g}$  in  $\text{Der } \mathfrak{g}$  ist gleich der Kommutante von  $\text{ad } \mathfrak{g}$  in  $\text{Der } \mathfrak{g}$ . Wir zeigen, dass diese Kommutante verschwindet.

Für  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$  in der Kommutante von  $\text{ad } \mathfrak{g}$  haben wir (Lemma 2.4)

$$\text{ad}(\delta(X)) = [\delta, \text{ad } X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Also gilt  $\delta = 0$ .  $\square$

**Proposition 5.13** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra, deren Killing-Form nicht ausgeartet ist. Dann gilt  $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{ad } \mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Es sei  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$ . Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow K \\ X &\longmapsto \text{tr}((\text{ad } X) \circ \delta). \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Die Kommutante (oder der Zentralisator) einer Teilmenge  $S$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist die Unter algebra  $\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in S\}$ .

Weil die Killing-Form  $\kappa$  nicht ausgeartet ist, gibt es ein Element  $D \in \mathfrak{g}$  mit  $\kappa(X, D) = \text{tr}((\text{ad } X) \circ \delta)$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ .

Wir wollen zeigen, dass die Derivation  $\varepsilon := \delta - \text{ad } D$  verschwindet. Nach Konstruktion gilt  $\text{tr}((\text{ad } X) \circ \varepsilon) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ . Nun rechnen wir

$$\begin{aligned} \kappa(\varepsilon(X), Y) &= \text{tr}((\text{ad } \varepsilon(X)) \circ \text{ad } Y) \\ &= \text{tr}([\varepsilon, \text{ad } X] \circ \text{ad } Y) && \text{(nach Lemma 2.4)} \\ &= \text{tr}(\varepsilon \circ (\text{ad } X) \circ (\text{ad } Y) - (\text{ad } X) \circ \varepsilon \circ (\text{ad } Y)) \\ &= \text{tr}([\text{ad } X, \text{ad } Y] \circ \varepsilon) = \text{tr}((\text{ad } [X, Y]) \circ \varepsilon) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Es gilt also  $\varepsilon = 0$ , und somit ist  $\delta = \text{ad } D$ . □

Als Korollar zu Proposition 5.13 und Satz 5.9 folgt nochmals Satz 5.12.

## 6 Cartan-Unteralgebren

Um einen Einblick in die Struktur der endlich dimensional Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  zu gewinnen, betrachten wir die adjungierte Darstellung  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  und schränken sie auf eine Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  ein. Bei geeigneter Wahl von  $\mathfrak{h}$  liefert diese Darstellung  $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  wertvolle Informationen über die Struktur der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .

Für  $H \in \mathfrak{g}$  und  $\lambda \in K$  sei

$$\mathfrak{g}_\lambda(H) := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H - \lambda \text{id})^n X = 0 \text{ für genügend grosses } n\} \quad (6.1)$$

der verallgemeinerte Eigenraum von  $\text{ad } H$  zu  $\lambda$ . Falls der Körper  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, gilt

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathfrak{g}_\lambda(H).$$

**Lemma 6.1**  $[\mathfrak{g}_\lambda(H), \mathfrak{g}_\mu(H)] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(H)$ .

*Beweis.* Dies folgt aus der Formel im ersten Teil von Lemma 2.1 für  $\delta = \text{ad } H$ . □

Insbesondere ist  $\mathfrak{g}_0(H)$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .

**Notation** Für jede Funktion  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow K$  auf einer Teilmenge  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  definieren wir den Durchschnitt der verallgemeinerten Eigenräume  $\mathfrak{g}_{\alpha(H)}(H)$  (6.1) für alle  $H \in \mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g}_\alpha := \bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_{\alpha(H)}(H). \quad (6.2)$$

Wir nennen  $\alpha$  ein *Gewicht*, falls  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  gilt. Der Unterraum  $\mathfrak{g}_\alpha$  heisst dann *Gewichtsraum* zum Gewicht  $\alpha$ . Auch falls  $\alpha$  kein Gewicht ist, ist es manchmal bequem,  $\mathfrak{g}_\alpha = 0$  missbräuchlicherweise als Gewichtsraum zum Gewicht  $\alpha$  zu bezeichnen.

**Proposition 6.2** *Es seien  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  und  $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$  eine nilpotente Unter algebra. Für jede Funktion  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow K$  sei der simultane verallgemeinerte Eigenraum  $\mathfrak{g}_\alpha$  gemäss der obigen Notation (6.2) definiert. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a)  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ ,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{\alpha(H)}(H)] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha(H)}(H)$ ,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$  und  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .
- b)  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha: \mathfrak{h} \rightarrow K} \mathfrak{g}_\alpha$ .

Die folgenden Aussagen gelten unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\text{char } K = 0$ .

- c)  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \implies \alpha \in \mathfrak{h}^*$  und  $\alpha([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ .
- d) Für  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$  gilt die folgende Formel für die Killing-Form:

$$\kappa(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} (\dim \mathfrak{g}_\alpha) \alpha(H_1) \alpha(H_2).$$

*Beweis.* Der Teil a) gilt auch ohne die Bedingung, dass der Körper  $K$  algebraisch abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist  $\mathfrak{h}$  nilpotent. Für alle  $H, X \in \mathfrak{h}$  gilt also

$$0 = \underbrace{[H, \dots, [H, X] \dots]}_n = (\text{ad } H)^n X$$

für genügend grosses  $n$ . Folglich ist  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ . Die anderen Behauptungen in a) folgen nun aus Lemma 6.1.

Bekanntlich ist die Summe in b) direkt. Wir müssen noch zeigen, dass die Summe der simultanen verallgemeinerten Eigenräume ganz  $\mathfrak{g}$  ausschöpft. Dies folgt aus a): wir fixieren  $H_1 \in \mathfrak{h}$  und zerlegen  $\mathfrak{g}$  in verallgemeinerte Eigenräume von  $\text{ad } H_1$ ,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha(H_1) \in K} \mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}(H_1).$$

Jeder Summand  $\mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}$  ist stabil unter  $\text{ad } \mathfrak{h}$ . Wir fixieren  $H_2 \in \mathfrak{h}$  und zerlegen jeden verallgemeinerten Eigenraum  $\mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}(H_1)$  in verallgemeinerte Eigenräume von  $\text{ad } H_2$ ,

$$\mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}(H_1) = \bigoplus_{\alpha(H_2) \in K} \mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}(H_1) \cap \mathfrak{g}_{\alpha(H_2)}(H_2).$$



Jeder Summand  $\mathfrak{g}_{\alpha(H_1)}(H_1) \cap \mathfrak{g}_{\alpha(H_2)}(H_2)$  ist stabil unter  $\text{ad } \mathfrak{h}$ . Wir fixieren  $H_3 \in \mathfrak{h}$  usw. Wegen  $\dim \mathfrak{g} < \infty$  gibt es  $H_1, \dots, H_m \in \mathfrak{h}$  so, dass sich die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha(H_1) \in K} \cdots \bigoplus_{\alpha(H_m) \in K} \bigcap_{j=1}^m \mathfrak{g}_{\alpha(H_j)}(H_j)$$

nicht mehr weiter verfeinern lässt: auf jedem nichttrivialen Durchschnitt

$$\bigcap_{j=1}^m \mathfrak{g}_{\alpha(H_j)}(H_j)$$

hat jeder Endomorphismus  $\text{ad } H$  für  $H \in \mathfrak{h}$  einen einzigen Eigenwert  $\alpha(H)$ .

Teil c) folgt aus dem Satz von Lie. Für alle  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow K$  gibt es eine Basis von  $\mathfrak{g}_\alpha$ , bezüglich welcher alle Endomorphismen  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_\alpha} H$  für  $H \in \mathfrak{h}$  durch obere Dreiecksmatrizen der Form

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha \left\{ \begin{pmatrix} \alpha(H) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(H) \end{pmatrix} \right.$$

dargestellt werden. Die Behauptung, dass  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  für  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ , folgt dann aus der Linearität der Abbildung  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_\alpha}$ . Die andere Behauptung in Teil c) und der Teil d) sind dann auch klar.  $\square$

**Proposition 6.3** *Es seien  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra und  $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$  eine nilpotente Unteralgebra. Dann gilt genau dann  $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ , wenn wir mit der Notation (6.2) die Gleichheit  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  haben.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass sich  $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$  selbst normalisiert. Für  $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0)$  gilt für jedes  $H \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$

$$(\text{ad } H)X = -[X, H] \in \mathfrak{g}_0,$$

also  $(\text{ad } H)^n X = 0$  für genügend grosses  $n$ . Somit ist  $X \in \mathfrak{g}_0$ . Für  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  gilt also  $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

Falls  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}_0$ , so betrachten wir die Quotientendarstellung der adjugierten Darstellung von  $\mathfrak{h}$  auf  $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ . Gemäss dem Satz von Engel gibt es ein Element  $X \in \mathfrak{g}_0 - \mathfrak{h}$  mit  $[X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ , also  $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) - \mathfrak{h}$ . Damit ist also  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .  $\square$

Es scheint also zweckmässig, nilpotente Unteralgebren zu studieren, die sich selbst normalisieren.

**Definition** Eine *Cartan-Unteralgebra*  $\mathfrak{h}$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist eine nilpotente Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ , deren Normalisator in  $\mathfrak{g}$  mit  $\mathfrak{h}$  übereinstimmt,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

**Beispiele**

- 1) Ist  $\mathfrak{g}$  nilpotent, so ist  $\mathfrak{g}$  selbst die einzige Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . (Für  $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$  mit  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$  gilt  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}$ , wenn  $\mathfrak{g}$  nilpotent ist.)
- 2) Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d(K) = M(d \times d, K)$  bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan-Unteralgebra.
- 3) Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(K) = M(2 \times 2, K)$  bilden die Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  eine Cartan-Unteralgebra.
- 4) Jeder 1-dimensionale Unterraum der reellen Lie-Algebra  $\text{Lie SO}(3)$  ist eine Cartan-Unteralgebra.

A priori ist nicht klar, ob zu  $\mathfrak{g}$  eine Cartan-Unteralgebra existiert. Und wenn eine existiert, wie eindeutig ist sie? Für eine endlich dimensionale Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über  $K$  lassen sich unter sukzessiv stärkeren Voraussetzungen die folgenden Aussagen zeigen.

- Ist  $K$  unendlich, so besitzt  $\mathfrak{g}$  eine Cartan-Unteralgebra.
- Gilt  $\text{char } K = 0$ , so besitzen alle Cartan-Unteralgebren dieselbe Dimension.
- Gilt  $\text{char } K = 0$  und ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so sind alle Cartan-Unteralgebren zueinander konjugiert, und zwar unter der Gruppe, welche von den Automorphismen  $\exp(\text{ad } X)$  für  $X \in \mathfrak{g}$  mit  $\text{ad } X$  nilpotent erzeugt wird.

Man beachte, dass die Cartan-Unteralgebren in den Beispielen 2) und 3) mit  $d = 2$  und  $K = \mathbb{R}$  nicht zueinander konjugiert sind.

Die Endomorphismen  $\text{ad } X$  für  $X \in \mathfrak{g}$  sind singular (falls  $\mathfrak{g} \neq 0$ ). Wir schreiben das charakteristische Polynom von  $\text{ad } X$  als

$$\det(\text{ad } X - T \text{ id}) = \sum_{j=0}^{\dim \mathfrak{g}} a_j(X) T^j.$$

Dabei sind die Koeffizienten  $a_j(X)$  polynomiale Funktionen in  $X \in \mathfrak{g}$ .

**Definition** Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem unendlichen Körper. Der *Rang*  $\text{rk } \mathfrak{g}$  von  $\mathfrak{g}$  ist definiert als die minimale Dimension eines verallgemeinerten Eigenraumes von  $\text{ad } X$  zum Eigenwert 0, wenn  $X$  über  $\mathfrak{g}$  läuft, also

$$\text{rk } \mathfrak{g} := \min\{\dim \mathfrak{g}_0(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Die Menge der *regulären Elemente*  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  von  $\mathfrak{g}$  ist definiert als

$$\mathfrak{g}^{\text{reg}} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \dim \mathfrak{g}_0(X) = \text{rk } \mathfrak{g}\}.$$

Ein Element  $X \in \mathfrak{g}$  ist also genau dann regulär, wenn die algebraische Vielfachheit von 0 für  $\text{ad } X$  minimal ist. Die Teilmenge  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} \subseteq \mathfrak{g}$  ist nichtleer und (Zariski-)offen, denn die Bedingung  $\dim \mathfrak{g}_0(X) > \text{rk } \mathfrak{g}$  lässt sich durch das Verschwinden der polynomialen Funktion  $a_{\text{rk } \mathfrak{g}}(X)$  ausdrücken.

## Beispiele

- 1)  $\mathfrak{g}$  ist genau dann nilpotent, wenn  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} = \mathfrak{g}$  gilt.
- 2)  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\text{reg}} = \{X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \mid \det X \neq 0\} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{N}$ , wobei  $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  den Kegel der nilpotenten Matrizen bezeichnet: für  $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$  gilt

$$\det(\text{ad } X - T \text{ id}) = \begin{vmatrix} -T & -\gamma & \beta \\ -2\beta & 2\alpha - T & 0 \\ 2\gamma & 0 & -2\alpha - T \end{vmatrix} = -T^3 + 4(\alpha^2 + \beta\gamma)T.$$

ÜBUNG 6.1 Bestimme  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})^{\text{reg}}$ .

**Proposition 6.4** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem unendlichen Körper  $K$ . Für  $H \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  ist  $\mathfrak{g}_0(H)$  eine Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $K$  algebraisch abgeschlossen ist. Andernfalls sei  $\overline{K}$  ein algebraischer Abschluss des Körpers  $K$ . Es gelten die folgenden Aussagen.

- $\mathfrak{h}$  ist eine Cartan-Unteralgebra in  $\mathfrak{g} \iff \mathfrak{h} \otimes_K \overline{K}$  ist eine Cartan-Unteralgebra in  $\mathfrak{g} \otimes_K \overline{K}$ .
- $H \in \mathfrak{g}^{\text{reg}} \iff H \otimes 1 \in (\mathfrak{g} \otimes_K \overline{K})^{\text{reg}}$ .

Wir zeigen zuerst, dass  $\mathfrak{g}_0(H)$  nilpotent ist. Gemäss Lemma 6.1 definiert für  $\lambda \in K$  jedes Element  $X \in \mathfrak{g}_0(H)$  einen Endomorphismus

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}_\lambda(H)} X : \mathfrak{g}_\lambda(H) \longrightarrow \mathfrak{g}_\lambda(H).$$

Für  $X = H$  kennen wir die Eigenwerte. Für jedes  $\lambda \in K^\times$  mit  $\mathfrak{g}_\lambda(H) \neq 0$  gibt es eine offene Teilmenge  $\mathcal{U}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}_0(H)$  mit  $H \in \mathcal{U}_\lambda$  und so, dass die Eigenwerte von  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_\lambda(H)} X$  von 0 verschieden sind.

	Eigenwerte von $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0(H)} X$	Eigenwerte von $\text{ad}_{\mathfrak{g}_\lambda(H)} X$
$X = H$	0	$\lambda$
$X \in \mathcal{U}_\lambda$		$\neq 0$

Weil  $H$  regulär ist, gilt  $\dim \mathfrak{g}_0(X) \geq \dim \mathfrak{g}_0(H)$ . Für  $X \in \mathcal{U} := \bigcap_{\substack{\lambda \in K^\times \\ \mathfrak{g}_\lambda(H) \neq 0}} \mathcal{U}_\lambda$  ist

also  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0(H)} X$  nilpotent. Wegen  $\emptyset \neq \mathcal{U} \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathfrak{g}_0(H)$  ist dann  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0(H)} X$  für alle  $X \in \mathfrak{g}_0(H)$  nilpotent. Damit ist nach dem Satz von Engel  $\mathfrak{g}_0(H)$  eine nilpotente Lie-Algebra: für  $n := \dim \mathfrak{g}_0(H)$  und  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}_0(H)$  gilt

$$0 = \text{ad } X_1 \circ \dots \circ \text{ad } X_n \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0(H)),$$

also  $[X_1, \dots, [X_n, X] \dots] = 0$  für alle  $X_1, \dots, X_n, X \in \mathfrak{g}_0(H)$ .

Nun zeigen wir noch, dass sich  $\mathfrak{g}_0(H)$  selbst normalisiert. Für  $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0(H))$  schreiben wir  $X = \sum_{\lambda \in K} X_\lambda$  mit  $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda(H)$ . Es gilt dann

$$\mathfrak{g}_0(H) \ni \text{ad } X(H) = \sum_{\lambda \in K} \text{ad } X_\lambda(H) = \sum_{\lambda \in K} \underbrace{-\text{ad } H(X_\lambda)}_{\in \mathfrak{g}_\lambda(H)},$$

i. e.  $\text{ad } H(X_\lambda) = 0$  für  $\lambda \neq 0$ , also  $X_\lambda = 0$  für  $\lambda \neq 0$ . Damit ist  $X = X_0 \in \mathfrak{g}_0(H)$ .  $\square$

## 7 Einschub: Tensorprodukte von Vektorräumen

Wir werden später Tensorprodukte von Darstellungen benötigen. Vorerst begnügen wir uns mit Tensorprodukten von Vektorräumen. Sie lassen sich dann später leicht mit zusätzlichen Strukturen ergänzen.

### 7.1 Tensorprodukt von zwei Vektorräumen

Das Tensorprodukt  $V \otimes W$  (genauer  $V \otimes_K W$ ) zweier  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  lässt sich folgendermassen beschreiben:

$$V \otimes W := U/R.$$

Dabei ist  $U$  der  $K$ -Vektorraum mit Basis  $V \times W$ ,

$$U = \bigoplus_{(v,w) \in V \times W} K \cdot (v, w),$$

und  $R$  ist der Unterraum, welcher von den Elementen

$$\left. \begin{array}{ll} (v, w) + (v', w) - (v + v', w) & (v, v' \in V, w \in W), \\ (v, w) + (v, w') - (v, w + w') & (v \in V, w, w' \in W), \\ (\lambda v, w) - (v, \lambda w) & (v \in V, w \in W, \lambda \in K), \\ (\lambda v, w) - \lambda \cdot (v, w) & (v \in V, w \in W, \lambda \in K) \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

erzeugt wird. Das Bild des Basisvektors  $(v, w) \in V \times W \subseteq U$  im Quotienten  $U/R = V \otimes W$  wird mit  $v \otimes w$  bezeichnet.

Die kanonische Abbildung  $\beta : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ,  $(v, w) \mapsto v \otimes w$ , ist  $K$ -bilinear. Diese Abbildung ist universell im folgenden Sinn. Ist  $\gamma : V \times W \rightarrow U$  irgendeine  $K$ -bilineare Abbildung in einen  $K$ -Vektorraum  $U$ , so gibt es genau eine  $K$ -lineare Abbildung  $\tilde{\gamma} : V \otimes W \rightarrow U$  mit  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \beta$ . Als kommutatives Diagramm sieht dies wie folgt aus.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & V \otimes W \\ & \searrow \gamma & \downarrow \exists! \tilde{\gamma} \\ & & U \end{array}$$

**Lemma 7.1** *Zwei lineare Abbildungen  $f : V_1 \rightarrow V_2$  und  $g : W_1 \rightarrow W_2$  zwischen  $K$ -Vektorräumen induzieren eine lineare Abbildung*

$$f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \longrightarrow V_2 \otimes W_2 \\ \sum_{(v,w) \in V_1 \times W_1} a_{vw} v \otimes w \longmapsto \sum_{(v,w) \in V_1 \times W_1} a_{vw} f(v) \otimes g(w).$$

*Beweis.* Wir haben  $V_1 \otimes W_1 = U_1/R_1$  und  $V_2 \otimes W_2 = U_2/R_2$ , wobei  $U_1$ ,  $R_1$ ,  $U_2$  und  $R_2$  die offensichtlichen Bedeutungen haben. Es gibt natürlich eine lineare Abbildung  $f \boxtimes g : U_1 \rightarrow U_2$ , welche als die  $K$ -lineare Fortsetzung der Abbildung  $(v, w) \mapsto (f(v), g(w))$  definiert ist.

Weil  $f$  und  $g$  lineare Abbildungen sind, gilt  $f \boxtimes g(R_1) \subseteq R_2$ . Damit induziert  $f \boxtimes g$  eine lineare Abbildung  $f \otimes g : U_1/R_1 \rightarrow U_2/R_2$ .  $\square$

*Bemerkung* Die Beschreibung der Abbildung  $f \otimes g$  in Lemma 7.1 als

$$\sum_{(v,w) \in V_1 \times W_1} a_{vw} v \otimes w \longmapsto \sum_{(v,w) \in V_1 \times W_1} a_{vw} f(v) \otimes g(w)$$

(mit  $a_{vw} \in K$  und  $a_{vw} \neq 0$  nur für endlich viele Paare  $(v, w) \in V_1 \times W_1$ ) hätten wir auch kurz als

$$v \otimes w \longmapsto f(v) \otimes g(w)$$

notieren können, da die Abbildung nach Voraussetzung linear ist. In Zukunft soll diese abgekürzte Schreibweise verwendet werden.

**Lemma 7.2** *Es seien  $(v_i)_{i \in I}$  und  $(w_j)_{j \in J}$  Basen der  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$ . Dann ist  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .*

*Beweis.* Alle Vektoren  $v \in V$  und  $w \in W$  können wir als Linearkombinationen  $v = \sum_{i \in I} a_i v_i$  und  $w = \sum_{j \in J} b_j w_j$  schreiben. Es gilt dann aufgrund der Relationen (7.1)

$$v \otimes w = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j (v_i \otimes w_j). \quad (7.2)$$

Dabei ist  $a_i \neq 0$  nur für endlich viele  $i \in I$  und  $b_j \neq 0$  nur für endlich viele  $j \in J$ , also  $a_i b_j \neq 0$  nur für endlich viele  $(i, j) \in I \times J$ . Weil die Elemente der Form  $v \otimes w$  den Vektorraum  $V \otimes W$  erzeugen, bilden gemäss Gleichung (7.2) auch die Vektoren  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  ein Erzeugendensystem für den Vektorraum  $V \otimes W$ .

Wir müssen zeigen, dass die Vektoren  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die linearen Abbildungen  $v_i^* : V \rightarrow K$  (für  $i \in I$ ) und  $w_j^* : W \rightarrow K$  (für  $j \in J$ ), welche durch

$$v_i^*(v_{i'}) = \delta_{ii'} \quad (i, i' \in I) \quad \text{und} \quad w_j^*(w_{j'}) = \delta_{jj'} \quad (j, j' \in J)$$

definiert sind. Es gelte

$$\sum_{(i',j') \in I \times J} a_{i'j'} (v_{i'} \otimes w_{j'}) = 0.$$

Dann ist für alle  $(i, j) \in I \times J$

$$0 = v_i^* \otimes w_j^* \left( \sum_{(i',j') \in I \times J} a_{i'j'} (v_{i'} \otimes w_{j'}) \right) = a_{ij} (1 \otimes 1),$$

also  $a_{ij} = 0$ , denn  $1 \otimes 1 \neq 0$ . Schreiben wir  $K \otimes K = U/R$  mit  $U = \bigoplus_{x,y \in K} K \cdot (x, y)$ , so erfüllen die Elemente

$$\sum_{x,y \in K} a_{xy} (x, y) \in R$$

die Relation  $\sum_{x,y \in K} a_{xy} xy = 0$ . Also ist  $(1, 1) \notin R$  und somit  $1 \otimes 1 \neq 0$ .  $\square$

Für  $K$ -Vektorräume  $U, V, W$  und Familien von  $K$ -Vektorräumen  $(V_i)_{i \in I}, (W_j)_{j \in J}$  haben wir die folgenden kanonischen Isomorphismen von  $K$ -Vektorräumen.

$$\begin{aligned} (U \otimes V) \otimes W &\cong U \otimes (V \otimes W), & (u \otimes v) \otimes w &\mapsto u \otimes (v \otimes w), \\ V \otimes W &\cong W \otimes V, & v \otimes w &\mapsto w \otimes v, \\ \left( \bigoplus_{i \in I} V_i \right) \otimes \left( \bigoplus_{j \in J} W_j \right) &\cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} V_i \otimes W_j, & (v_i)_{i \in I} \otimes (w_j)_{j \in J} &\mapsto (v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}. \end{aligned}$$

Der letzte dieser Isomorphismen formuliert Lemma 7.2 um.

ÜBUNG 7.1 Sind  $(V_i)_{i \in I}$  und  $(W_j)_{j \in J}$  zwei Familien von  $K$ -Vektorräumen, so ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i \in I} V_i \right) \otimes \left( \prod_{j \in J} W_j \right) &\longrightarrow \prod_{(i,j) \in I \times J} V_i \otimes W_j \\ (v_i)_{i \in I} \otimes (w_j)_{j \in J} &\longmapsto (v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J} \end{aligned}$$

injektiv aber im allgemeinen nicht surjektiv.

## 7.2 Tensorprodukt von Familien von Vektorräumen

Für eine Familie  $(V_i)_{i \in I}$  von  $K$ -Vektorräumen definiert man das Tensorprodukt  $\bigotimes_{i \in I} V_i$  als Quotient des  $K$ -Vektorraumes mit Basis  $\prod_{i \in I} V_i$  modulo dem Unterraum mit den evidenten Relationen.

Für  $I = \{i\}$  können wir  $\bigotimes_{i \in I} V_i$  mit  $V_i$  identifizieren, und für  $I = \emptyset$  ist  $\bigotimes_{i \in I} V_i = K$  der Grundkörper. Für  $V_i = V$  mit  $i \in I = \{1, \dots, n\}$  schreiben wir  $V^{\otimes n} = \bigotimes_{i \in I} V_i$ .

## 7.3 Tensoralgebra

Wir definieren zu jedem  $K$ -Vektorraum  $V$  eine (graduierte) assoziative  $K$ -Algebra mit 1, die *Tensoralgebra*

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}.$$

Die Elemente vom Grad  $n$  sind Tensoren der Form  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ , und das Produkt ist auf die evidente Art definiert, nämlich für homogene Elemente durch

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n, w_1 \otimes \dots \otimes w_m) \longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m.$$

Manchmal ist es nützlich, die soeben definierte Tensoralgebra durch eine universelle Eigenschaft zu charakterisieren. Die Elemente vom Grad 1 in  $T(V)$  können wir mit dem Vektorraum  $V$  identifizieren. Wir erhalten so die Inklusion  $V \xrightarrow{\iota} T(V)$ . Ist  $A$  irgendeine assoziative  $K$ -Algebra mit 1 und  $V \xrightarrow{\alpha} A$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von assoziativen Algebren mit 1 von der Tensoralgebra  $T(V)$  nach  $A$ , welcher  $\alpha$  erweitert. Als kommutatives Diagramm geschrieben sieht das so aus:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & T(V) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \hat{\alpha} \\ & & A \end{array}$$

## 7.4 Äussere und symmetrische Potenzen

Die  $n$ -te äussere Potenz  $\bigwedge^n V$  und die  $n$ -te symmetrische Potenz  $\bigodot^n V$  des  $K$ -Vektorraumes  $V$  sind Quotienten von  $V^{\otimes n}$ .

$$\begin{aligned}\bigwedge^n V &:= V^{\otimes n} / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mid v_i = v_j \text{ für ein Paar } (i, j) \text{ mit } i \neq j \rangle \\ \bigodot^n V &:= V^{\otimes n} / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n \rangle\end{aligned}$$

Das Bild von  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  unter der kanonischen Projektion  $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \bigwedge^n V$  wird mit  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$  bezeichnet. Das Bild von  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  unter der kanonischen Projektion  $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \bigodot^n V$  wird nicht etwa mit  $v_1 \odot \cdots \odot v_n$ , sondern einfach mit  $v_1 \cdots v_n$  bezeichnet.

Statt  $\bigwedge^n V$  findet man in der Literatur auch die Bezeichnungen  $\text{Alt}^n V$  oder etwas exotischer  $\binom{V}{n}$ . Ebenso wird  $\bigodot^n V$  oft als  $\text{Sym}^n V$  oder  $S^n V$  bezeichnet. Als Pendant zur Bezeichnung  $\binom{V}{n}$  für  $\text{Alt}^n V$  könnte man  $\left(\binom{V}{n}\right)$  für  $\bigodot^n V$  verwenden.

Für jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  gelten die Formeln

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = \text{sign}(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

und

$$v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)} = v_1 \cdots v_n.$$

Ist  $(e_i)_{i \in I}$  ( $I$  eine total geordnete Indexmenge) eine Basis von  $V$ , so sind

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n})_{i_1 < \cdots < i_n} \text{ eine Basis von } \bigwedge^n V$$

und

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_n})_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} \text{ eine Basis von } \bigodot^n V.$$

Die direkten Summen

$$\begin{aligned}\bigwedge V &:= \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n V = T(V) / (v \otimes v \mid v \in V) \\ \bigodot V &:= \bigoplus_{n \geq 0} \bigodot^n V = T(V) / (v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \mid v_1, v_2 \in V)\end{aligned}$$

sind assoziative Algebren mit 1 (mit den evidenten Multiplikationen), die *äussere Algebra* von  $V$  und die *symmetrische Algebra* von  $V$ .

## 8 Die universelle Einhüllende

Wir haben bereits gesehen, dass jede assoziative Algebra auch die Struktur einer Lie-Algebra trägt. Die Lie-Klammer ist dabei durch  $[a, b] := ab - ba$  gegeben.



Jeder Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  können wir eine assoziative Algebra mit 1 zuordnen, nämlich die *universelle Einhüllende*  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ .

$\mathfrak{U}\mathfrak{g}$  oder genauer  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  ist wie folgt charakterisiert.

- $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$  ist eine assoziative Algebra mit 1.
- $\iota$  ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.
- Für jeden Homomorphismus von Lie-Algebren  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} A$ , wobei  $A$  eine assoziative Algebra mit 1 ist, gibt es genau einen Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : \mathfrak{U}\mathfrak{g} \rightarrow A$  von assoziativen Algebren mit 1 so, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{U}\mathfrak{g} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

kommutiert (universelle Eigenschaft).

Der Funktor  $\mathfrak{U} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  ist also links-adjungiert zum Funktor, der einer assoziativen Algebra  $A$  die Lie-Algebra  $A$  zuordnet.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}}(\mathfrak{U}\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A).$$

Aus der Definition folgt sofort die Eindeutigkeit von  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$  bis auf eindeutigen Isomorphismus. A priori ist jedoch nicht evident, dass eine solche universelle Einhüllende von  $\mathfrak{g}$  existiert. Wir zeigen die Existenz, indem wir  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$  explizit konstruieren, nämlich

$$\mathfrak{U}\mathfrak{g} = T(\mathfrak{g})/I.$$

Dabei ist  $I$  das zweiseitige Ideal, welches von den Elementen  $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$  für  $X, Y \in \mathfrak{g}$  erzeugt wird. Und  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  ist die Zusammensetzung der Inklusion  $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$  mit der kanonischen Projektion  $T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow T(\mathfrak{g})/I = \mathfrak{U}\mathfrak{g}$ .

**Proposition 8.1**  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  erfüllt die universelle Eigenschaft.

*Beweis.* Es sei  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} A$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren von  $\mathfrak{g}$  in eine assoziative Algebra mit 1. Nach der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra lässt sich die lineare Abbildung  $\varphi$  eindeutig zu einem Homomorphismus

$$T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{\varphi}} A$$

von assoziativen Algebren mit 1 erweitern. Wegen  $\hat{\varphi}(I) = 0$  faktorisiert  $\hat{\varphi}$  via  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ .  $\square$

Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist ein Struktursatz für die universelle Einhüllende.

**Satz 8.2 (Poincaré-Birkhoff-Witt)** *Es sei  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} K \cdot X_i$  eine Lie-Algebra über dem Körper  $K$ , wobei  $I$  eine total geordnete Indexmenge ist. Für jede schwach aufsteigende Folge  $J = (j_1, \dots, j_n)$  von Elementen von  $I$  (also  $j_1 \leq \dots \leq j_n$ ) setzen wir  $X_J := X_{j_1} \dots X_{j_n} \in \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  (dabei ist  $X_{()} = 1$ ). Dann gilt*

$$\mathfrak{U}\mathfrak{g} = \bigoplus_J K \cdot X_J,$$

wobei  $J$  über alle schwach aufsteigenden Folgen  $J = (j_1, \dots, j_n)$  von Elementen von  $I$  läuft.

**Beispiel** Für  $\mathfrak{sl}_2(K) = K \cdot F \oplus K \cdot H \oplus K \cdot E$  bilden

$$1, F, H, E, F^2, FH, FE, H^2, HE, E^2, F^3, F^2H, \dots$$

eine Basis von  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ .

*Bemerkungen*

1. Als Korollar zum Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt folgt, dass der Homomorphismus  $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{g}$  injektiv ist.
2. Falls  $\mathfrak{g}$  abelsch ist, haben wir  $\mathfrak{U}\mathfrak{g} = \odot \mathfrak{g}$ . Wenn  $\mathfrak{g}$  nicht abelsch ist, so ist das Ideal  $I = (X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g})$  nicht homogen und folglich  $\mathfrak{U}\mathfrak{g} = T(\mathfrak{g})/I$  nicht graduiert, sondern bloss filtriert.



# Kapitel II

## Strukturtheorie

Von nun an bezeichnen wir mit  $\mathfrak{g} \neq 0$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra.

### 9 Wurzelraumzerlegung

#### 9.1 Wurzelräume und Wurzelsysteme

Es sei  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Dann zerfällt  $\mathfrak{g}$  in die direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Dabei ist  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  der Gewichtsraum zum Gewicht 0, und  $\Phi$  ist die Menge der Gewichte verschieden von 0,

$$\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}.$$

Die Elemente von  $\Phi$  heißen *Wurzeln*,  $\Phi$  heisst *Wurzelsystem*, und für  $\alpha \in \Phi$  heisst  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  der *Wurzelraum* zur Wurzel  $\alpha$ .

Wir wissen nach dem Beweis der Proposition 6.2, dass bezüglich einer geeigneten Basis von  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  alle Endomorphismen  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{\alpha}} H$  für  $H \in \mathfrak{h}$  durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha(H) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(H) \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Wir werden sehen, dass  $\ast = 0$  gilt. Für  $\alpha = 0$  bedeutet dies insbesondere, dass die Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  abelsch ist. Für  $\alpha \in \Phi$  werden wir dann zeigen, dass der Wurzelraum  $\mathfrak{g}_\alpha$  1-dimensional ist. Als Zwischenresultat zeigen wir (in Lemma 9.4) zuerst  $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ .

**Proposition 9.1** *Es sei  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$  und*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

die zugehörige Wurzelraumzerlegung.

- a)  $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$  mit  $\alpha + \beta \neq 0 \implies \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ , d. h.  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ .
- b)  $\alpha \in \Phi \implies \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{h}$ .
- c) Die Restriktion der Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$  und insbesondere  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  ist nicht ausgeartet.
- d)  $\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$ .
- e)  $H \in \mathfrak{h}$  mit  $\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in \Phi \implies H = 0$ .
- f) Die Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  ist abelsch.
- g)  $H \in \mathfrak{h} \implies \text{ad } H$  ist halbeinfach. Für  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  gilt dann also

$$[H, X] = \alpha(H)X.$$

- h)  $\text{span } \Phi = \mathfrak{h}^*$ .

*Beweis.*

- a) Für  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$  haben wir nach Proposition 6.2 a)

$$(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)^n(\mathfrak{g}_\gamma) \subseteq \mathfrak{g}_{n(\alpha+\beta)+\gamma} = 0 \quad \forall \gamma \in \Phi \cup \{0\}$$

für genügend grosses  $n$ . Der Endomorphismus  $\text{ad } X \circ \text{ad } Y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  ist also nilpotent. Es gilt somit  $\kappa(X, Y) = 0$ .

- b) folgt aus a) mit  $\beta = 0$ .
- c) folgt aus a), da  $\kappa$  nicht ausgeartet ist.
- d) folgt aus c).
- e) Nach der Formel in Proposition 6.2 d) haben wir  $\kappa(H, \mathfrak{h}) = 0$ , also  $H = 0$  nach c).

f) Nach Proposition 6.2 c) gilt  $\alpha([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0 \forall \alpha \in \Phi$ , also  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$  nach e).

g) Wir betrachten die Jordan-Zerlegung  $\text{ad } H = (\text{ad } H)_s + (\text{ad } H)_n$ .

Behauptung:  $(\text{ad } H)_s$  ist eine Derivation von  $\mathfrak{g}$ .

Für  $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$  mit  $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$  rechnen wir

$$\begin{aligned} & [(\text{ad } H)_s X, Y] + [X, (\text{ad } H)_s Y] \\ &= [\alpha(H) X, Y] + [X, \beta(H) Y] \\ &= (\alpha + \beta)(H) [X, Y] = (\text{ad } H)_s [X, Y] \quad (\text{da } [X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}). \end{aligned}$$

Wegen  $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{ad } \mathfrak{g}$  (Satz 5.12) gibt es  $S \in \mathfrak{g}$  mit  $(\text{ad } H)_s = \text{ad } S$ . Weiter haben wir  $[S, \mathfrak{h}] = (\text{ad } H)_s(\mathfrak{h}) = 0$ . Das Element  $S$  liegt also im Zentralisator  $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ . Es gilt folglich  $\text{ad}(H - S) = (\text{ad } H)_n$ , und für  $\alpha \in \Phi$  haben wir dann  $\alpha(H - S) = 0$ , also  $H = S$  nach e).

h) folgt aus e).

□

**Lemma 9.2** *Ist  $\alpha \in \Phi$  eine Wurzel und sind  $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  und  $H \in \mathfrak{h}$ , so ist  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , und es gilt die Formel*

$$\kappa(H, [X, Y]) = \alpha(H) \kappa(X, Y). \quad (9.1)$$

*Insbesondere ist  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$ .*

*Beweis.*  $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .

$$\kappa(H, [X, Y]) = \kappa([H, X], Y) = \kappa(\alpha(H) X, Y) = \alpha(H) \kappa(X, Y).$$

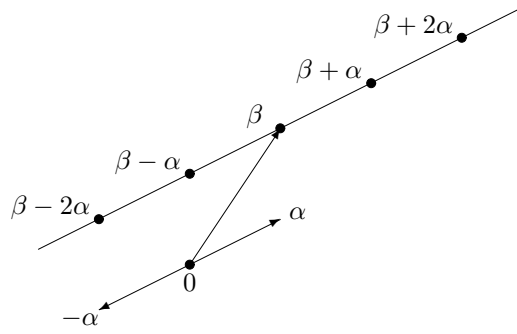
Weil  $\kappa$  auf  $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$  nicht ausgeartet ist, gibt es  $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$  mit  $\kappa(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ . Dann ist  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \ni [X_\alpha, X_{-\alpha}] \neq 0$ , nach der Formel (9.1). □

**Lemma 9.3** *Ist  $\alpha \in \Phi$  eine Wurzel und sind  $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $[X, Y] \neq 0$ , so gilt  $\alpha([X, Y]) \neq 0$ .*

*Beweis.* Für jede Wurzel  $\beta \in \Phi$  ist der Unterraum

$$\mathfrak{s} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

stabil unter  $\text{ad } X$  und  $\text{ad } Y$ .



Wir formen die Spur des Kommutators um.

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{tr}[\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X, \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} Y] = \operatorname{tr}(\underbrace{\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} [X, Y]}_{\in \mathfrak{h}}) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha} \cdot (\beta+n\alpha)([X, Y]) \\
 &= \underbrace{(\dim \mathfrak{s})}_{\neq 0} \cdot \beta([X, Y]) + M \cdot \alpha([X, Y]).
 \end{aligned}$$

Aus  $\alpha([X, Y]) = 0$  folgt also  $\beta([X, Y]) = 0$  für alle Wurzeln  $\beta \in \Phi$ . Nach Proposition 9.1 e) ist dann  $[X, Y] = 0$ , was der Voraussetzung widerspricht. Es gilt daher  $\alpha([X, Y]) \neq 0$ .  $\square$

**Lemma 9.4** *Ist  $\alpha \in \Phi$  eine Wurzel, so gilt  $\dim[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ .*

*Beweis.* Wir wissen bereits aus Lemma 9.2, dass  $\dim[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \geq 1$  ist. Für die umgekehrte Ungleichung verwenden wir Lemma 9.3, wonach  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cap \ker \alpha = 0$  gilt. ( $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \operatorname{span}\{[X, Y] \mid X \in \mathfrak{g}_{\alpha}, Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}\}$ .)

$$\dim[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \underbrace{\dim([\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + \ker \alpha)}_{\leq \dim \mathfrak{h} = \operatorname{rk} \mathfrak{g}} + \underbrace{\dim([\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cap \ker \alpha)}_{= 0} - \underbrace{\dim \ker \alpha}_{= (\operatorname{rk} \mathfrak{g}) - 1} \leq 1. \quad \square$$

Weil die Killing-Form eingeschränkt auf  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  nicht ausgeartet ist, haben wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{h}^* &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{h} \\
 \lambda &\longmapsto h_{\lambda}
 \end{aligned}$$

charakterisiert durch  $\kappa(H, h_{\lambda}) = \lambda(H)$  für alle  $H \in \mathfrak{h}$ .

**Lemma 9.5** *Ist  $\alpha \in \Phi$  eine Wurzel und sind  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  mit  $\kappa(X, Y) = 1$ , so gilt  $[X, Y] = h_{\alpha}$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 9.2 ist  $\kappa(H, [X, Y]) = \alpha(H)$  für  $H \in \mathfrak{h}$ , also  $[X, Y] = h_\alpha$ .  $\square$

**Lemma 9.6** Für  $\alpha \in \Phi$  gilt  $\kappa(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $h_\alpha = [X, Y]$  mit  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  und  $\kappa(X, Y) = 1$  gemäss Lemma 9.5. Dann ist  $\kappa(h_\alpha, h_\alpha) = \alpha(h_\alpha) = \alpha([X, Y]) \neq 0$  nach Lemma 9.3.  $\square$

**Definition** Die *Kowurzel* oder *duale Wurzel*  $H_\alpha = \alpha^\vee$  zur Wurzel  $\alpha \in \Phi$  ist definiert als

$$H_\alpha := \alpha^\vee := \frac{2}{\kappa(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha \in \mathfrak{h}.$$

**Proposition 9.7** Für jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  gilt  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  und  $\dim \mathfrak{g}_{n\alpha} = 0$  für  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ .

*Beweis.* Wir wählen  $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$  mit  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ . Wegen  $\alpha(H_\alpha) = 2$  ist dann  $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$  und  $[H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$ . Der Unterraum

$$\mathfrak{s} := \mathbb{C}X_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \mathfrak{g}_{n\alpha}$$

ist stabil unter  $\text{ad } X_\alpha$  und  $\text{ad } X_{-\alpha}$ . Wir formen die Spur des Kommutators um.

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}[\text{ad}_\mathfrak{s} X_\alpha, \text{ad}_\mathfrak{s} X_{-\alpha}] = \text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{s}[X_\alpha, X_{-\alpha}]) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{s} H_\alpha) = 2 \left( -1 + 0 + \dim \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{n \geq 2} n \cdot \underbrace{\dim \mathfrak{g}_{n\alpha}}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung sofort folgt.  $\square$

Zusammen mit Proposition 6.2 d) erhalten wir das nächste Korollar.

**Korollar 9.8** Für  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$  gilt die folgende Formel für die Killing-Form:

$$\kappa(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H_1) \alpha(H_2) = \sum_{\alpha \in \Phi} \kappa(H_1, h_\alpha) \kappa(H_2, h_\alpha).$$

Als nächstes Ziel wollen wir weitere Eigenschaften von Wurzelsystemen entdecken. Bis jetzt wissen wir, dass  $\Phi \subseteq \mathfrak{h}^* - \{0\}$  eine endliche Menge ist, für die  $\Phi = -\Phi$  gilt, und dass aus  $\alpha, c \cdot \alpha \in \Phi$  mit  $c \in \mathbb{Z}$  folgt  $c = \pm 1$ .



Sobald wir genügend viele Eigenschaften von Wurzelsystemen gesammelt haben, werden wir abstrakte Wurzelsysteme axiomatisch definieren, natürlich so, dass das Wurzelsystem zu einer Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  die Axiome eines abstrakten Wurzelsystems erfüllt. Umgekehrt lässt sich aus einem (endlichen, reduzierten) abstrakten Wurzelsystem eine halbeinfache Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  mit einer Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  konstruieren, deren Wurzelsystem zum vorgegebenen abstrakten Wurzelsystem isomorph ist. Weiter ist dabei die halbeinfache komplexe Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Um tiefer in die Struktur von  $\Phi$  hineinzusehen, benötigen wir etwas Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

## 9.2 Endlich dimensionale Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Wir wollen zuerst die Wurzelraumzerlegung von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  bezüglich der Cartan-Unteralgebra der Diagonalmatrizen angeben. Mit

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$[H, E] = 2E \quad [H, F] = -2F \quad [E, F] = H.$$

Zur Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$  lautet die zugehörige Wurzelraumzerlegung von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F.$$

Die beiden Wurzeln sind  $\pm\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $H \mapsto \pm 2$ .

Es sei  $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung. Für  $v \in V$  und  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  schreiben wir zur Abkürzung  $Xv$  für  $\rho(X)v$ .

**Lemma 9.9**  $Hv = \lambda v$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ )  $\implies \begin{cases} HEv = (\lambda + 2)Ev, \\ HFv = (\lambda - 2)Fv. \end{cases}$

*Beweis.*

$$HEv = [H, E]v + EHv = 2Ev + E\lambda v = (\lambda + 2)Ev$$

und analog für  $F$ . □

**Definition** Ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel in  $\mathfrak{g}$  ist ein Tripel  $(H, E, F)$  von Elementen in  $\mathfrak{g} - \{0\}$  mit  $[H, E] = 2E$ ,  $[H, F] = -2F$  und  $[E, F] = H$ .

**Notation** Für eine Wurzel  $\alpha \in \Phi$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$  die zu  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  isomorphe Unteralgebra

$$\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)} = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

von  $\mathfrak{g}$  (siehe Lemma 9.4 und Proposition 9.7). Dann haben wir ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel  $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$  mit  $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ .

*Bemerkung* Das Element  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  ist dabei eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt  $H_{-\alpha} = -H_\alpha$  für die entsprechenden Elemente in  $\mathfrak{sl}_2^{(-\alpha)} = \mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$ . Die Elemente  $X_{\pm\alpha}$  sind nicht eindeutig bestimmt, denn für  $t \in \mathbb{C}^\times$  ist auch  $(H_\alpha, tX_\alpha, t^{-1}X_{-\alpha})$  ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel.

**Lemma 9.10** *Es sei  $(H, E, F)$  ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel in  $\mathfrak{g}$ . Für  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gelten dann die folgenden Identitäten in  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ .*

$$[H, E^n] = 2n E^n \quad (9.2)$$

$$[H, F^n] = -2n F^n \quad (9.3)$$

$$[E, F^n] = n F^{n-1}(H - n + 1) = n(H + n - 1)F^{n-1} \quad (9.4)$$

$$[F, E^n] = n E^{n-1}(-H - n + 1) = n(-H + n - 1)E^{n-1} \quad (9.5)$$

*Beweis.* Die Identitäten (9.2) und (9.3) und damit auch die Identitäten rechts in (9.4) und (9.5) sind klar. Die Identität (9.4) gilt für  $n = 0$ , und für  $n > 0$  folgt mit Induktion

$$\begin{aligned} [E, F^n] &= [E, F]F^{n-1} + F[E, F^{n-1}] = HF^{n-1} + F(n-1)F^{n-2}(H - n + 2) \\ &= -2(n-1)F^{n-1} + F^{n-1}H + (n-1)F^{n-1}H - (n-1)(n-2)F^{n-1} \\ &= nF^{n-1}(H - n + 1). \end{aligned}$$

Schliesslich folgt (9.5) aus (9.4), denn mit  $(H, E, F)$  ist auch  $(-H, F, E)$  ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel.  $\square$

*Bemerkung* Für  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subseteq M(2 \times 2, \mathbb{C})$  gilt natürlich  $E^2 = 0$  in der assoziativen Algebra  $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ . In  $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  ist jedoch  $E^2 \neq 0$ . Die Darstellungstheorie von  $M(2 \times 2, \mathbb{C})$  ist äquivalent zu jener des Körpers  $\mathbb{C}$ . Hingegen ist die Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  viel reichhaltiger.

Es seien  $V \neq 0$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\varrho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine Darstellung. Dann besitzt der Operator  $\varrho(H)$  einen Eigenvektor, das heisst  $Hv := \varrho(H)v = \lambda v$  für einen Skalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  und einen Vektor  $v \in V - \{0\}$ . Die von 0 verschiedenen Vektoren  $v, Ev, E^2v, \dots$  sind gemäss Lemma 9.9 Eigenvektoren von  $H$  (d. h. von  $\varrho(H)$ ) zu den Eigenwerten  $\lambda, \lambda + 2, \lambda + 4, \dots$ , also linear unabhängig. Wegen  $\dim V < \infty$  gibt es einen Index  $k$  mit  $E^k v \neq 0$ , aber  $E^{k+1}v = 0$ . Nach einer allfälligen Umbenennung haben wir folgende Situation erreicht: es gibt einen Vektor  $v \in V - \{0\}$  und eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$Hv = \lambda v \quad \text{und} \quad Ev = 0. \quad (9.6)$$

Wir nennen einen Vektor  $v \in V - \{0\}$ , der (9.6) erfüllt, einen *primitiven Vektor* zum Gewicht  $\lambda$  für die Darstellung  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

**Lemma 9.11** *Es sei  $v$  ein primitiver Vektor zum Gewicht  $\lambda$  für eine Darstellung  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  mit  $V \neq 0$  und  $\dim V < \infty$ . Für  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  definieren wir die Vektoren  $v_n := \frac{1}{n!} F^n v$  und  $v_{-1} := 0$ . Dann gelten die folgenden Formeln.*

$$Hv_n = (\lambda - 2n)v_n \quad (9.7)$$

$$Ev_n = (\lambda - n + 1)v_{n-1} \quad (9.8)$$

$$Fv_n = (n + 1)v_{n+1} \quad (9.9)$$

*Beweis.* Die Formel (9.7) folgt aus (9.3), und (9.9) gilt definitionsgemäss. Für (9.8) verwenden wir  $EF^n v = [E, F^n]v$ . Mit der Identität (9.4) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} Ev_n &= \frac{1}{n!} EF^n v = \frac{1}{n!} n F^{n-1} (H - n + 1)v \\ &= \frac{1}{(n-1)!} F^{n-1} (\lambda - n + 1)v = (\lambda - n + 1)v_{n-1}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 9.12** *Es sei  $v$  ein primitiver Vektor zum Gewicht  $\lambda$  für eine Darstellung  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  mit  $V \neq 0$  und  $\dim V < \infty$ . Weiter nehmen wir an, dass  $V = \mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))v$  ist. Dann gilt  $\lambda = (\dim V) - 1$ .*

*Beweis.* Wir verwenden die Notation von Lemma 9.11. Die von 0 verschiedenen Vektoren  $v_0, v_1, v_2, \dots$  sind gemäss (9.7) linear unabhängig. Weil  $V$  endlich dimensional ist, gibt es also einen Index  $d$  mit  $v_d \neq 0$  und  $v_{d+1} = 0$ . Nach der Formel (9.8) für  $n = d + 1$  gilt dann  $\lambda = d$ . □

Wir haben also die folgende schematische Darstellung einer irreduziblen Darstellung von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  auf einem  $(d + 1)$ -dimensionalen Vektorraum:

$$0 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{C}v_d \begin{array}{c} \xrightarrow{E} \\ \xleftarrow{F} \\ \curvearrowright H \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{E} \\ \xleftarrow{F} \\ \curvearrowright H \end{array} \mathbb{C}v_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{E} \\ \xleftarrow{F} \\ \curvearrowright H \end{array} \mathbb{C}v_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{E} \\ \xleftarrow{F} \\ \curvearrowright H \end{array} \mathbb{C}v_0 \xrightarrow{\cdots} 0$$

Dabei heissen  $E$  *Aufsteigeoperator* und  $F$  *Absteigeoperator*. Die Eigenwerte von  $H$  sind die ganzen Zahlen

$$d, d - 2, d - 4, \dots, -d + 2, -d.$$

Umgekehrt können wir für  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  eine  $(d+1)$ -dimensionale irreduzible<sup>1</sup> Darstellung

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\left(\bigoplus_{n=0}^d \mathbb{C}v_n\right)$$

definieren mit  $v_{-1} := 0$ ,  $v_{d+1} := 0$  und

$$\begin{aligned} Hv_n &= (d-2n)v_n, \\ Ev_n &= (d-n+1)v_{n-1}, \\ Fv_n &= (n+1)v_{n+1}. \end{aligned}$$

Eine konkrete Realisierung erhalten wir als  $\odot^d \mathbb{C}^2$ , wobei mit  $\mathbb{C}^2$  die Standarddarstellung von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  gemeint ist. Identifizieren wir  $\binom{1}{0} \in \mathbb{C}^2$  mit einer Variablen  $x$  und  $\binom{0}{1} \in \mathbb{C}^2$  mit einer Variablen  $y$ , so gelten

$$\begin{aligned} Hx &= x & Ex &= 0 & Fx &= y \\ Hy &= -y & Ey &= x & Fy &= 0, \end{aligned}$$

und wir können die Derivationen  $H$ ,  $E$  und  $F$  schreiben als

$$H = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \quad E = x \frac{\partial}{\partial y} \quad F = y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Der symmetrischen Potenz  $\odot^d \mathbb{C}^2$  entsprechen dann die komplexen Polynome in  $x$  und  $y$ , welche homogen vom Grad  $d$  sind.

$$\begin{aligned} H(x^{d-n}y^n) &= (d-n)x^{d-n-1}y^n Hx + nx^{d-n}y^{n-1}Hy = (d-2n)x^{d-n}y^n \\ E(x^{d-n}y^n) &= (d-n)x^{d-n-1}y^n Ex + nx^{d-n}y^{n-1}Ey = nx^{d-n+1}y^{n-1} \\ F(x^{d-n}y^n) &= (d-n)x^{d-n-1}y^n Fx + nx^{d-n}y^{n-1}Fy = (d-n)x^{d-n-1}y^{n+1} \end{aligned}$$

Mit  $v_n := \binom{d}{n} x^{d-n}y^n$  finden wir die gewünschten Formeln

$$Hv_n = (d-2n)v_n, \quad Ev_n = (d-n+1)v_{n-1}, \quad Fv_n = (n+1)v_{n+1}.$$

### 9.3 Ein Automorphismus

Für eine Wurzel  $\alpha \in \Phi$  und ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel  $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$  in der Unter algebra  $\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)} \leq \mathfrak{g}$  mit  $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$  definieren wir für  $t \in \mathbb{C}^\times$  den Automorphismus

$$\theta_\alpha(t) := \exp(\operatorname{ad} t X_\alpha) \circ \exp(\operatorname{ad} -t^{-1} X_{-\alpha}) \circ \exp(\operatorname{ad} t X_\alpha) \in \operatorname{GL}(\mathfrak{g}).$$

Wir wollen zuerst nachrechnen, wie  $\theta_\alpha(t)$  auf der Cartan-Unter algebra  $\mathfrak{h}$  wirkt. Für  $H \in \ker \alpha$  gilt  $[H, X_{\pm\alpha}] = 0$ , also  $\theta_\alpha(t)H = H$ . Durch direktes Nachrechnen findet man  $\theta_\alpha(t)H_\alpha = -H_\alpha$ .

<sup>1</sup>Eine Darstellung  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  ist *irreduzibel*, wenn  $V \neq 0$  und  $V' \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $\varrho(\mathfrak{g})V' \subseteq V' \implies V' = 0$  oder  $V' = V$ .

ÜBUNG 9.1 Verifiziere, dass  $\theta_\alpha(t)H_\alpha = -H_\alpha$  gilt.

Insbesondere ist  $\theta_\alpha(t)|_{\mathfrak{h}}^2 = \text{id}_{\mathfrak{h}}$ . Wegen  $\alpha(H_\alpha) = 2$  gilt die Formel

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(1)|_{\mathfrak{h}} &= \theta_\alpha(t)|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h} \\ H &\longmapsto H - \alpha(H) H_\alpha. \end{aligned}$$

**Proposition 9.13** Für  $\alpha, \beta \in \Phi$  gilt  $\theta_\alpha(t)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha}$ .

*Beweis.* Es seien  $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$  und  $H \in \mathfrak{h}$ . Weil  $\theta_\alpha(t)$  ein Automorphismus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist, können wir wegen  $\theta_\alpha(t)^2 H = H$  und  $\theta_\alpha(t)H \in \mathfrak{h}$  schreiben

$$\begin{aligned} [H, \theta_\alpha(t)X_\beta] &= \theta_\alpha(t)[\theta_\alpha(t)H, X_\beta] = \beta(\theta_\alpha(t)H) \theta_\alpha(t)X_\beta \\ &= \beta(H - \alpha(H) H_\alpha) \theta_\alpha(t)X_\beta = (\beta - \beta(H_\alpha) \alpha)(H) \theta_\alpha(t)X_\beta. \end{aligned}$$

Also liegt  $\theta_\alpha(t)X_\beta$  in  $\mathfrak{g}_{\beta - \beta(H_\alpha) \alpha} = \mathfrak{g}_{\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha}$ . Somit gilt  $\theta_\alpha(t)\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha}$ , und die Gleichheit folgt, weil  $\theta_\alpha(t)$  ein Automorphismus ist und die Wurzelräume (es gilt  $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \neq 0$ ) 1-dimensional sind.  $\square$

**Korollar 9.14**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies s_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \Phi$ .

Damit haben wir eine weitere Eigenschaft des Wurzelsystems  $\Phi$  gefunden: die Gruppe, welche von den Spiegelungen  $(s_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$  erzeugt wird – diese Gruppe heisst *Weylgruppe* –, lässt  $\Phi$  invariant.

In unserer Sammlung fehlt noch eine kristallographische Eigenschaft von Wurzelsystemen, die wir aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  erhalten.

## 9.4 Weitere Eigenschaften eines Wurzelsystems

Für  $\alpha, \beta \in \Phi$  definiert die Einschränkung der adjungierten Darstellung eine Darstellung von  $\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$  auf  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha} = \bigoplus_{-q \leq n \leq p} \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha}$  mit  $\beta - q\alpha, \beta + p\alpha \in \Phi$ . Für  $\beta = \pm\alpha$  erhalten wir nichts Neues, aber für  $\beta \neq \pm\alpha$  liefert die Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  weitere Erkenntnisse über die Struktur von  $\Phi$ .

- $\beta(H_\alpha) = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$

Dies ist die gesuchte kristallographische Eigenschaft. Ausserdem folgt aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  nochmals die Invarianz von  $\Phi$  unter der Weylgruppe.

- $\beta + n\alpha \in \Phi$  für  $n \in \{-q, \dots, p\}$

$$\bullet (\beta - q\alpha)(H_\alpha) = -(\beta + p\alpha)(H_\alpha) \implies \beta(H_\alpha) = q - p$$

Wir sehen auch, dass aus  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$  folgt  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  ( $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ,  $[X_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ ,  $\dim \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 1$ ).

**Notation** Mit  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  bezeichnen wir den reellen Unterraum der Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$ , welcher von den Kowurzeln  $H_\alpha = \alpha^\vee$  aufgespannt wird.

**Proposition 9.15** *Die Einschränkung der Killing-Form auf den reellen Vektorraum  $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  ist ein Skalarprodukt auf  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Für  $\alpha \in \Phi$  ist  $\alpha(H) \in \mathbb{R}$ , also  $\kappa(H, H) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)^2 \geq 0$  für  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  nach Korollar 9.8. Wenn  $\kappa(H, H) = 0$  ist, so haben wir  $\alpha(H) = 0$  für alle  $\alpha \in \Phi$ , also  $H = 0$  nach Proposition 9.1 e).  $\square$

## 9.5 Chevalley-Basis

Für jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  können wir ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel  $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$  wählen. Wegen  $H_{-\alpha} = -H_\alpha$  ist dieses System von  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripeln miteinander kompatibel: mit  $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$  ist auch  $(H_{-\alpha}, X_{-\alpha}, X_\alpha)$  ein  $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel. Wir haben dann

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}X_\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}H_\alpha.$$

Für  $\alpha, \beta \in \Phi$  gelten die Formeln

$$\begin{aligned} [H, H'] &= 0 && \text{für } H, H' \in \mathfrak{h} \\ [H, X_\alpha] &= \alpha(H) X_\alpha && \text{für } H \in \mathfrak{h} \\ [X_\alpha, X_\beta] &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\} \\ H_\alpha & \text{falls } \alpha + \beta = 0 \\ N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi \end{cases} \end{aligned}$$

für gewisse  $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^\times$ .

Die Elemente  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  sind eindeutig bestimmt, aber  $X_\alpha$  können wir durch  $t_\alpha X_\alpha$  ersetzen, solange  $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$  gilt. Aus der Zahl  $N_{\alpha\beta}$  wird dann  $\frac{t_\alpha t_\beta}{t_{\alpha+\beta}} N_{\alpha\beta}$ . Durch geeignete Wahl der  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$  kann man erreichen, dass alle Zahlen  $N_{\alpha\beta}$  ganz sind. Zusätzlich kann auch noch eine Basis der Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  so gewählt werden, dass alle Strukturkonstanten ganzzahlig sind. Chevalley verwendete eine solche *Chevalley-Basis* dazu, die *Chevalley-Gruppen* zu konstruieren. So konnte er damals die Liste der bekannten endlichen einfachen Gruppen wesentlich ausdehnen.

Wir gehen nicht weiter auf die Existenz einer Chevalley-Basis ein. Wer etwas mehr über die Zahlen  $N_{\alpha\beta}$  lernen möchte, kann die folgende Übung lösen.

ÜBUNG 9.2 Für  $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$  paarweise linear unabhängige Wurzeln mit  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  gilt

$$\frac{N_{\alpha\beta}}{\kappa(h_\gamma, h_\gamma)} = \frac{N_{\beta\gamma}}{\kappa(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{N_{\gamma\alpha}}{\kappa(h_\beta, h_\beta)}.$$

## 10 Abstrakte Wurzelsysteme

In diesem Abschnitt lösen wir uns von den Lie-Algebren und definieren abstrakte Wurzelsysteme. Zuerst sei daran erinnert, was eine Spiegelung ist.

**Definition** Es seien  $V \neq 0$  ein reeller Vektorraum und  $\alpha \in V - \{0\}$ . Eine *Spiegelung längs  $\alpha$*  ist ein Endomorphismus  $s_\alpha$  von  $V$ , für welchen  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  und  $\dim_{\mathbb{R}} \text{im}(\text{id}_V - s_\alpha) = 1$  gelten.

**Lemma 10.1** *Es seien  $V \neq 0$  ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und  $\alpha \in V - \{0\}$ . Weiter sei  $s_\alpha$  eine Spiegelung längs  $\alpha$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Es gibt genau ein lineares Funktional  $\alpha^\vee \in V^*$  so, dass*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V, \quad (10.1)$$

*und es gilt dann  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ .*

b)  $s_\alpha^2 = \text{id}_V$ .

c) *Die Fixpunktmenge  $\{\lambda \in V \mid s_\alpha(\lambda) = \lambda\} = \ker \alpha^\vee$  ist eine Hyperebene, welche  $\alpha$  nicht enthält.*

d)  $\det s_\alpha = -1$ .

e) *Für  $\beta \in V$ ,  $\beta^\vee \in V^*$  mit  $\langle \beta, \beta^\vee \rangle = 2$  definiert die Formel*

$$s_{\beta, \beta^\vee}(\lambda) := \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta \quad (\text{für } \lambda \in V)$$

*eine Spiegelung längs  $\beta$ .*

*Beweis.*

- a) Mit  $(\text{id}_V - s_\alpha)(\alpha) = 2\alpha$  und  $\dim_{\mathbb{R}} \text{im}(\text{id}_V - s_\alpha) = 1$  folgt  $\text{im}(\text{id}_V - s_\alpha) = \mathbb{R}\alpha$ .  
Es gibt also genau ein lineares Funktional  $\alpha^\vee \in V^* - \{0\}$  so, dass

$$(\text{id}_V - s_\alpha)(\lambda) = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha,$$

was die Formel (10.1) beweist. Weiter gilt

$$-\alpha = s_\alpha(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle \alpha,$$

also  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ .

- b) Für alle  $\lambda \in V$  gilt

$$\begin{aligned} s_\alpha^2(\lambda) &= s_\alpha(\lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha) = s_\alpha(\lambda) - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle s_\alpha(\alpha) \\ &= \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (-\alpha) = \lambda. \end{aligned}$$

- c)  $\{\lambda \in V \mid s_\alpha(\lambda) = \lambda\} = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha = 0\} = \ker \alpha^\vee$ .

- d) folgt aus c) und  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ .

- e) ist klar. □

**Definition** Eine Teilmenge  $\Phi$  eines reellen Vektorraumes  $V$  heisst (endliches, reduziertes) *Wurzelsystem* in  $V$ , falls die folgenden Axiome gelten.

- 1)  $|\Phi| < \infty$ ,  $0 \notin \Phi$  und  $\text{span } \Phi = V$ .
- 2)  $\alpha \in \Phi \implies$  es gibt eine Spiegelung  $s_\alpha$  längs  $\alpha$  mit  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ .
- 3)  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $s_\alpha$  Spiegelung längs  $\alpha$  mit  $s_\alpha(\Phi) = \Phi \implies \beta - s_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$ .
- 4)  $\alpha \in \Phi \implies 2\alpha \notin \Phi$ .

Zwei Wurzelsysteme  $\Phi_i$  in  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind *isomorph*, falls ein Isomorphismus  $\varphi: V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$  von Vektorräumen existiert mit  $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$ .

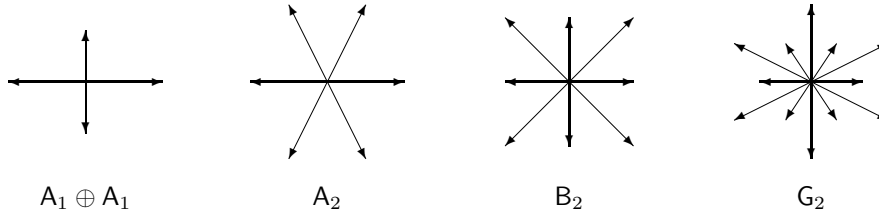
Das *triviale* Wurzelsystem ist das Wurzelsystem  $\Phi = \emptyset$  in  $V = 0$ .

Sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  Wurzelsysteme in  $V_1$  und  $V_2$ , so ist  $\Phi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Phi_2$  ein Wurzelsystem in  $V_1 \oplus V_2$ . Wir bezeichnen dieses Wurzelsystem mit  $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ .

Ein *reduzibles* Wurzelsystem ist ein Wurzelsystem der Form  $\Phi_1 \oplus \Phi_2$  mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  beide nichttrivial. Ein *irreduzibles* Wurzelsystem ist ein Wurzelsystem, das nicht reduzibel und nichttrivial ist. Jedes Wurzelsystem lässt sich in eindeutiger Weise in seine irreduziblen Komponenten zerlegen.

Der *Rang* eines Wurzelsystems  $\Phi$  in  $V$  ist die Dimension von  $V$ .



**Beispiel** Wurzelsysteme vom Rang 2

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  zwei linear unabhängige Vektoren eines Wurzelsystems  $\Phi$ , so ist der Durchschnitt von  $\Phi$  mit  $\text{span}\{\alpha, \beta\}$  ein Wurzelsystem vom Rang 2. (Wir werden übrigens bald feststellen, dass die Liste der Wurzelsysteme vom Rang 2 mit den gezeigten vier Typen schon ausgeschöpft ist.)

**Lemma 10.2** *Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $V$ .*

- a)  $\Phi = -\Phi$ .
- b) Für  $\alpha \in \Phi$  ist die Spiegelung  $s_\alpha$  längs  $\alpha$  mit  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$  eindeutig bestimmt.
- c) Es gibt eine eindeutig bestimmte injektive Abbildung  ${}^\vee : \Phi \rightarrow V^*$  so, dass die Spiegelung  $s_\alpha$  längs  $\alpha$  mit  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$  gegeben ist durch

$$s_\alpha : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V.$$

- d)  $\alpha, \beta \in \Phi \implies \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  und  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.*

- a)  $\alpha \in \Phi \implies -\alpha = s_\alpha(\alpha) \in \Phi$ .
- b) Es sei  $\tilde{s}_\alpha$  eine weitere Spiegelung längs  $\alpha$  mit  $\tilde{s}_\alpha(\Phi) = \Phi$ . Weil  $\Phi$  den Vektorraum  $V$  aufspannt, ist jeder Automorphismus  $a \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$  durch seine Einschränkung auf  $\Phi$  bestimmt. Damit ist die Gruppe

$$A(\Phi) := \{a \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V \mid a(\Phi) = \Phi\}$$

isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe von  $\Phi$ , also endlich. Wir betrachten den Automorphismus  $t := s_\alpha \tilde{s}_\alpha$ . Wegen  $(\text{id}_V - t) = (\text{id}_V - s_\alpha) \tilde{s}_\alpha + (\text{id}_V - \tilde{s}_\alpha)$  gilt  $\text{im}(\text{id}_V - t) \subseteq \mathbb{R}\alpha$ . Es gibt also ein  $\alpha^* \in V^*$  mit  $t(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha$ . Mit Induktion folgt wegen  $\alpha \in \ker \alpha^*$  die Formel  $t^n(\lambda) = \lambda + n \langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha$ . Dann haben wir

$$\lambda = t^{|A(\Phi)|}(\lambda) = \lambda + |A(\Phi)| \langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V$$

und folglich  $\alpha^* = 0$ , d. h.  $t = \text{id}_V$  und somit  $\tilde{s}_\alpha = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$ .

- c) Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\vee : \Phi \rightarrow V^*$  injektiv ist. Dies werden wir in Lemma 10.4 sehen.
- d) Wir wissen bereits, dass  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  gilt. Die andere Behauptung folgt wegen  $\beta \neq 0$  aus  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta = \alpha - s_\beta(\alpha) \in \mathbb{Z}\beta$ .

□

**Definition** Die Untergruppe von  $A(\Phi)$ , welche von den Spiegelungen  $(s_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$  erzeugt wird, heisst *Weylgruppe* des Wurzelsystems  $\Phi$  und wird mit  $W = W(\Phi)$  bezeichnet.

**Lemma 10.3** Für  $a \in A(\Phi)$  und  $\alpha \in \Phi$  gilt  $a s_\alpha a^{-1} = s_{a(\alpha)}$ . Insbesondere gilt  $W(\Phi) \trianglelefteq A(\Phi)$ .

*Beweis.* Nach Lemma 10.2 b) genügt es zu zeigen, dass  $a s_\alpha a^{-1}$  eine Spiegelung längs  $a(\alpha)$  ist, denn es gilt natürlich  $a s_\alpha a^{-1}(\Phi) = \Phi$ .

- $a s_\alpha a^{-1}(a(\alpha)) = a s_\alpha(\alpha) = -a(\alpha)$ .
- $(\text{id}_V - a s_\alpha a^{-1})(\lambda) = a (\text{id}_V - s_\alpha)(a^{-1}(\lambda)) = a(\langle a^{-1}(\lambda), \alpha^\vee \rangle \alpha)$   
 $= \langle a^{-1}(\lambda), \alpha^\vee \rangle a(\alpha)$ ,  
 also  $\dim_{\mathbb{R}}(\text{id}_V - a s_\alpha a^{-1}) = 1$ .

□

**Lemma 10.4** Es gibt ein Skalarprodukt  $(\ | \ )$  auf  $V$ , welches  $A(\Phi)$ -invariant ist:

$$(a(\lambda) \ | \ a(\mu)) = (\lambda \ | \ \mu) \quad \forall a \in A(\Phi) \ \forall \lambda, \mu \in V.$$

Für  $\alpha \in \Phi$  gilt die Formel

$$\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha \ | \ \alpha)} (\alpha \ | \ \cdot). \quad (10.2)$$

*Beweis.* Es sei  $((\ | \ ))$  irgendein Skalarprodukt auf  $V$ . Dann ist

$$(\lambda \ | \ \mu) := \frac{1}{|A(\Phi)|} \sum_{a \in A(\Phi)} ((a(\lambda) \ | \ a(\mu)))$$

ein  $A(\Phi)$ -invariantes Skalarprodukt auf  $V$  (das mit  $(\ | \ )$  übereinstimmt, falls  $(\ | \ )$  schon  $A(\Phi)$ -invariant war). Für  $\alpha \in \Phi$  und  $\lambda \in V$  gilt

$$(\alpha \ | \ s_\alpha(\lambda) + \lambda) = (s_\alpha(\alpha) \ | \ s_\alpha(s_\alpha(\lambda) + \lambda)) = -(\alpha \ | \ s_\alpha(\lambda) + \lambda),$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \mid s_\alpha(\lambda) + \lambda) = (\alpha \mid \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha + \lambda) \\ &= 2(\alpha \mid \lambda) - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\alpha \mid \alpha) \end{aligned}$$

oder

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\alpha \mid \lambda)}{(\alpha \mid \alpha)}.$$

Es gilt also die Formel (10.2). Damit ist auch die Injektivität der Abbildung  $\vee : \Phi \rightarrow V^*$  in Lemma 10.2 c) gezeigt.  $\square$

**Notation** Im folgenden bezeichnen wir mit  $( \mid )$  ein  $A(\Phi)$ -invariantes Skalarprodukt auf  $V$ . Falls  $\Phi$  irreduzibel ist, gibt es bis auf positive Vielfache nur ein solches Skalarprodukt. Ist  $\Phi$  reduzibel, so sind die verschiedenen irreduziblen Komponenten zueinander orthogonal. Zwei besonders gebräuchliche Normierungen sind die folgenden.

- $\max_{\alpha \in \Psi} (\alpha \mid \alpha) = 2$  für alle irreduziblen Komponenten  $\Psi$  von  $\Phi$ .
- $\langle \alpha \mid \alpha \rangle = \sum_{\beta \in \Phi} \langle \alpha \mid \beta \rangle^2$ .

Auf einer irreduziblen Komponente  $\Psi$  von  $\Phi$  unterscheiden sich diese beiden Skalarprodukte um den Faktor  $g =$  duale Coxeterzahl von  $\Psi$ :  $\langle \mid \rangle = \frac{1}{g} ( \mid )$ .

**Proposition 10.5** *Ist  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $V$ , so ist auch das duale Wurzelsystem  $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$  ein Wurzelsystem in  $V^*$ . Ferner gilt  $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$  für alle  $\alpha \in \Phi \subseteq V = V^{**}$ . Weiter können die Weylgruppen von  $\Phi$  und von  $\Phi^\vee$  miteinander identifiziert werden.*

*Beweis.* Wir identifizieren  $V$  mit  $V^*$  vermöge  $( \mid )$ .

- 1)  $|\Phi^\vee| = |\Phi| < \infty$ ,  $0 \notin \Phi^\vee$ , da  $0 \notin \Phi$ ,  $\text{span } \Phi^\vee = V^*$ .
- 2)  $\alpha^\vee \in \Phi^\vee$ . Dann ist  $s_{\alpha^\vee} := s_\alpha$  eine Spiegelung längs  $\alpha$ , also längs  $\alpha^\vee$ , und für  $\beta^\vee \in \Phi^\vee$  gilt

$$s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha\left(\frac{2\beta}{(\beta \mid \beta)}\right) = \frac{2s_\alpha(\beta)}{(s_\alpha(\beta) \mid s_\alpha(\beta))} = (s_\alpha(\beta))^\vee \in \Phi^\vee.$$

- 3) Für  $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$  haben wir

$$\beta^\vee - s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee - (\beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in \mathbb{Z}\alpha^\vee.$$

$$4) \alpha^\vee \in \Phi^\vee \implies \frac{1}{2}\alpha^\vee \notin \Phi^\vee, \text{ also } \alpha^\vee \in \Phi^\vee \implies 2\alpha^\vee \notin \Phi^\vee. \quad \square$$

**Proposition 10.6** Sind  $\alpha, \beta \in \Phi$ , so liegt bis auf allfälliges Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  einer der folgenden Fälle vor.

$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$	$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$	$\angle(\alpha, \beta)$	$\frac{\ \beta\ ^2}{\ \alpha\ ^2}$	$ s_\alpha s_\beta $
0	0	$\frac{\pi}{2}$	unbestimmt	2
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1	3
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1	3
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2	4
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2	4
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3	6
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3	6
2	2	0	1	1
-2	-2	$\pi$	1	1

Insbesondere gibt es in einem irreduziblen Wurzelsystem höchstens zwei verschiedene Längen von Wurzeln.

*Beweis.* Aus  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} \in \mathbb{Z}$  und  $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$  erhalten wir

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{4(\alpha|\beta)^2}{(\alpha|\alpha)(\beta|\beta)} = 4 \cos^2 \angle(\alpha, \beta).$$

Es gilt also  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Daraus lässt sich die Tabelle leicht konstruieren. Natürlich ist  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \iff \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ . Ausserdem kommen die Paare  $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle, \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = (\pm 1, \pm 4)$  gemäss 4) in der Definition eines Wurzelsystems nicht vor.  $\square$

Aus der Proposition 10.6 folgt auch, dass es nur die vier Typen  $A_1 \oplus A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  und  $G_2$  von Wurzelsystemen vom Rang 2 gibt.

**Definition** Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem und  $\alpha \in \Phi$ . Wir bezeichnen mit  $\Psi$  die irreduzible Komponente von  $\Phi$ , zu der  $\alpha$  gehört. Dann heisst  $\alpha$

- *lang*, falls  $\|\alpha\| = \max_{\beta \in \Psi} \|\beta\|$ ,

- kurz, falls  $\|\alpha\| = \min_{\beta \in \Psi} \|\beta\|$ .

**Lemma 10.7**  $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha \neq \beta, (\alpha | \beta) > 0 \implies \alpha - \beta \in \Phi$ .

*Beweis.* Aus  $(\alpha | \beta) > 0$  folgt  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ . Nach der Tabelle in Proposition 10.6 gilt dann wegen  $\alpha \neq \beta$

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 1 \implies \alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in \Phi$$

oder

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1 \implies \alpha - \beta = -s_\alpha(\beta) \in \Phi.$$

□

Eine Hyperebene (durch den Nullpunkt) in  $V$ , welche keine Wurzel enthält, zerlegt  $V$  in zwei Halbräume  $V_+$  und  $V_-$ . Dadurch wird das Wurzelsystem in die Menge der *positiven* Wurzeln  $\Phi_+ := \Phi \cap V_+$  und deren Komplement, die Menge der *negativen* Wurzeln  $\Phi_- := \Phi - \Phi_+ = \Phi \cap V_- = -\Phi_+$ , zerlegt. Diese Zerlegung hängt natürlich von der Wahl der Hyperebene ab, die den Vektorraum  $V$  zerlegt. Sobald eine Menge von positiven Wurzeln so ausgezeichnet ist, kann man noch einen Schritt weiter gehen und eine eindeutig bestimmte Basis des Wurzelsystems  $\Phi$  definieren.

**Definition** Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem mit Menge der positiven Wurzeln  $\Phi_+$ . Eine *einfache* Wurzel ist eine positive Wurzel, die sich nicht als Summe zweier positiver Wurzeln schreiben lässt. Die Menge  $\Sigma$  der einfachen Wurzeln heisst *Basis* von  $\Phi$ .

Die folgende Proposition zeigt unter anderem, dass der Kegel  $\mathbb{R}_{\geq 0}\Phi_+$  simplizial ist (für  $\dim V \leq 2$  ist dies trivial).

**Proposition 10.8** *Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem mit einer Basis  $\Sigma \subseteq \Phi$ .*

- $\Sigma$  ist  $\mathbb{R}$ -linear unabhängig.
- Jede Wurzel  $\gamma \in \Phi$  lässt sich schreiben als

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha,$$

wobei die Koeffizienten  $(n_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  entweder alle in  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  oder alle in  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$  liegen.

*Beweis.*

- a) Behauptung:  $\alpha, \beta \in \Sigma, \alpha \neq \beta \implies (\alpha | \beta) \leq 0$ , d. h. der Winkel zwischen zwei verschiedenen einfachen Wurzeln ist nicht spitz.

Andernfalls wäre nach Lemma 10.7  $\alpha - \beta \in \Phi$ , also  $\alpha - \beta \in \Phi_+$  oder  $\beta - \alpha \in \Phi_+$ . Aber dann widerspricht  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$  oder  $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$  der Einfachheit von  $\alpha$  oder  $\beta$ .

Es sei  $\sum_{\alpha \in \Sigma} r_\alpha \alpha = 0$ . Wir setzen

$$\nu := \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ r_\alpha > 0}} r_\alpha \alpha = \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ r_\beta < 0}} (-r_\beta) \beta.$$

Dann ist

$$(\nu | \nu) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Sigma \\ r_\alpha > 0, r_\beta < 0}} r_\alpha (-r_\beta) \underbrace{(\alpha | \beta)}_{\leq 0} \leq 0$$

und somit  $\nu = 0$ . Nach der Konstruktion von  $\Phi_+$  gibt es einen Vektor  $\eta \in V$  mit  $(\eta | \alpha) > 0$  für alle  $\alpha \in \Phi_+$ . Wir haben dann

$$0 = (\eta | \nu) = \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ r_\alpha > 0}} r_\alpha \underbrace{(\eta | \alpha)}_{> 0} = \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ r_\beta < 0}} -r_\beta \underbrace{(\eta | \beta)}_{> 0}.$$

Die Summen sind also leer, d. h.  $r_\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \Sigma$ , und  $\Sigma$  ist somit linear unabhängig.

- b) O.B.d.A. sei  $\gamma \in \Phi_+$  (betrachte sonst  $-\gamma$ ). Ist  $\gamma \in \Sigma$ , so sind wir fertig. Andernfalls ist  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  mit  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi_+$ . Es gilt mit  $\eta$  wie in Teil a)

$$(\eta | \gamma) > (\eta | \gamma_1) \quad \text{und} \quad (\eta | \gamma) > (\eta | \gamma_2),$$

und die Behauptung folgt mit Induktion nach  $(\eta | \gamma)$ . □

Die Menge  $\mathbb{Z}\Phi \subseteq V$  aller  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von Wurzeln ist also das Gitter  $Q := \mathbb{Z}\Sigma$ , genannt das *Wurzelgitter*. Die Höhe  $\text{ht } \gamma$  einer Wurzel  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha$ , ist die Koordinatensumme bezüglich  $\Sigma$ , also  $\text{ht } \gamma = \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha$ . Für ein irreduzibles Wurzelsystem  $\Phi$  mit Basis  $\Sigma$  gibt es genau eine Wurzel  $\theta \in \Phi$  maximaler Höhe, die *höchste Wurzel*, und genau eine kurze Wurzel  $\theta_s \in \Phi$  mit maximaler Höhe unter den kurzen Wurzeln, die *höchste kurze Wurzel*.

$$\begin{aligned} h &= 1 + \text{ht } \theta && \text{Coxeterzahl von } \Phi \text{ und von } \Phi^\vee \\ g^\vee &= 1 + \text{ht } \theta_s && \text{duale Coxeterzahl von } \Phi^\vee \end{aligned}$$

ÜBUNG 10.1 Verifiziere die obigen Aussagen für die irreduziblen Wurzelsysteme vom Rang 2. (Zeige insbesondere, dass die Formel für die duale Coxeterzahl  $g^\vee$  mit der Definition von  $g$  auf der Seite 60 kompatibel ist.)

# 11 Dynkin-Diagramme und Klassifikation

## 11.1 Dynkin-Diagramme

Dynkin-Diagramme sind gewisse Graphen, welche die gegenseitige Lage der Vektoren einer Basis  $\Sigma$  eines Wurzelsystems veranschaulichen.

### Dynkin-Diagramm von $\Sigma$

- Ecken: für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Sigma$  gibt es eine Ecke.
- Kanten: für  $\alpha, \beta \in \Sigma$  mit  $\alpha \neq \beta$  gibt es die folgenden Typen von Kanten.

$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$	$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$	$\sphericalangle(\alpha, \beta)$	$4 \cos^2 \sphericalangle(\alpha, \beta)$	Kanten
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1	$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}$
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2	$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}$
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3	$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}$

Schlaufen (also Kanten von einer Ecke zu sich selbst) gibt es keine.

In den letzten beiden Fällen ist  $\|\alpha\| < \|\beta\|$ .

Offensichtlich ist das Dynkin-Diagramm von  $\Sigma$  genau dann zusammenhängend, wenn das zugehörige Wurzelsystem irreduzibel ist.

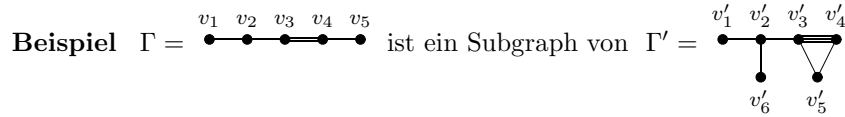
Weil  $\Sigma$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren ist, muss die symmetrische Matrix (Gramsche Matrix)

$$B_\Sigma := (\cos \sphericalangle(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in \Sigma}$$

positiv definit (und nicht bloss positiv semidefinit) sein. Die Einträge von  $B_\Sigma$  ausserhalb der Diagonale sind 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  oder  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , wenn die entsprechenden Ecken im Dynkin-Diagramm mit 0, 1, 2 oder 3 Kanten verbunden sind. Die Richtungen der Kanten spielen dabei keine Rolle, denn wir benötigen ja nur die Winkel zwischen den einfachen Wurzeln.

## 11.2 Klassifikation der abstrakten Wurzelsysteme

Wir betrachten nun die endlichen Graphen mit 0, 1, 2 oder 3 Kanten zwischen zwei verschiedenen Ecken (und ohne Schleifen). Es seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei solche Graphen. Wir sagen,  $\Gamma$  sei ein Subgraph von  $\Gamma'$ , falls eine injektive Abbildung  $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  von Graphen existiert.



Zu solchen Graphen bildet man die entsprechenden symmetrischen Matrizen, die nun auch indefinit sein können.

$$B_\Gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & -\sqrt{2} & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_{\Gamma'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & & & & -1 \\ & -1 & 2 & & & \\ & & -\sqrt{3} & 2 & -1 & \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ -1 & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

(die fehlenden Einträge sind 0)

Für den Vektor

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{>0}^5$$

gilt  $n^\top B_\Gamma n = 0$ . Der Graph  $\Gamma$  entsteht also nicht aus einem Dynkin-Diagramm durch Weglassen der Richtung bei der Doppelkante. Weil alle Einträge des Vektors  $n$  positiv sind, ist klar (wegen  $-\sqrt{3} \leq -\sqrt{2} \leq -1 \leq 0$ ), dass  $\Gamma$  kein Subgraph eines Dynkin-Diagramms sein kann. Im Beispiel ist

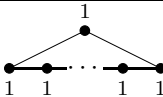
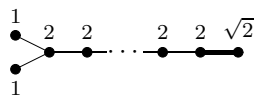
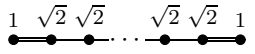
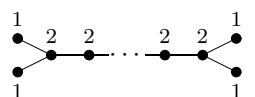
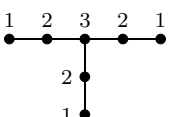
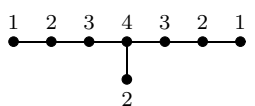
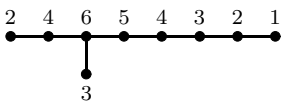
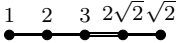
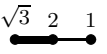
$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}^\top B_{\Gamma'} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \leq n^\top B_\Gamma n = 0.$$

Die Klassifikation der Dynkin-Diagramme erhalten wir so: wir zählen zuerst „verbotene“ Subgraphen  $\Gamma$  auf, solche, für welche ein Vektor  $n$  mit lauter positiven Einträgen existiert mit  $B_\Gamma n = 0$  und somit  $n^\top B_\Gamma n = 0$ .



Hier ist die Liste. Die Koordinaten des Vektors  $n$  sind bei den entsprechenden Ecken aufgeführt.

### Liste der „verbotenen“ Subgraphen

„verbotener“ Subgraph	Konsequenz für zusammenhängendes Dynkin-Diagramm
	keine Zyklen
	keine Mehrfachkanten, falls ein Verzweigungspunkt vorkommt
	höchstens eine Mehrfachkante
	höchstens ein Verzweigungspunkt mit genau 3 Ästen
	
	
	
	
	

**Satz 11.1** *Es sei  $\Phi$  ein irreduzibles Wurzelsystem vom Rang  $l$ . Das zugehörige Dynkin-Diagramm (d. h. das Dynkin-Diagramm einer Basis von  $\Phi$ ) kommt in der folgenden Tabelle vor. Umgekehrt ist jedes der folgenden Diagramme das Dynkin-*

Diagramm eines irreduziblen Wurzelsystems.

Name	Dynkin-Diagramm	Rang	$N =  \Phi_+ $
$A_l$		$l \geq 1$	$\frac{1}{2}l(l+1)$
$B_l$		$l \geq 2$	$l^2$
$C_l$		$l \geq 3$	$l^2$
$D_l$		$l \geq 4$	$l(l-1)$
$E_6$		$l = 6$	36
$E_7$		$l = 7$	63
$E_8$		$l = 8$	120
$F_4$		$l = 4$	24
$G_2$		$l = 2$	6

*Beweis.* Aus den Bedingungen über die Ränge folgt, dass die Liste irredundant ist ( $B_1 = C_1 = A_1$ ,  $C_2 = B_2$ ,  $D_3 = A_3$  und auch  $D_2 = A_1 \oplus A_1$ ).

Der erste Teil der Behauptung folgt durch Betrachten der „verbotenen“ Subgraphen.

Durch Konstruktion der gesuchten Wurzelsysteme folgt der zweite Teil der Behauptung.  $\square$

Die Information, die im Dynkin-Diagramm steckt, lässt sich auch mit Hilfe der *Cartan-Matrix* (nicht zu verwechseln mit der Cartan-Matrix in der modularen Darstellungstheorie) ausdrücken:

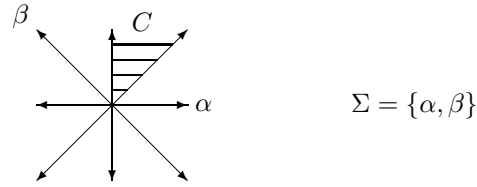
$$A = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Sigma}.$$

ÜBUNG 11.1 Berechne  $\det A$ , wenn  $A$  die Cartan-Matrix eines irreduziblen Wurzelsystems ist. Vergleiche mit der Liste der „verbotenen“ Subgraphen.

Wir kehren nun zurück zur Aufteilung von  $\Phi$  in  $\Phi_+$  und  $\Phi_-$ . Sie kommt zustande, indem wir einen Vektor  $\eta \in V - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha^\vee$  wählen und  $\Phi_+ := \{\alpha \in \Phi \mid (\eta | \alpha) > 0\}$

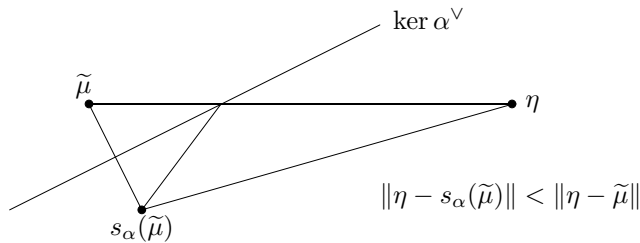
setzen. Die Zusammenhangskomponenten von  $V - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha^\vee$  heissen die (*offenen*) *Kammern* von  $\Phi$ . Liegt der Vektor  $\eta' \in V$  in derselben Kammer wie  $\eta$ , werden also  $\eta$  und  $\eta'$  durch keine *Wand* (eine Hyperebene der Form  $\ker \alpha^\vee$  für ein  $\alpha \in \Phi$ ) getrennt, so definiert  $\eta'$  dieselbe Menge von positiven Wurzeln wie  $\eta$  und damit dieselbe Basis  $\Sigma$ . Die Kammer  $C := \{\lambda \in V \mid (\lambda | \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Sigma\}$  heisst *Fundamentalkammer* von  $\Sigma$ . Ihre Wände sind  $\ker \alpha^\vee$  für  $\alpha \in \Sigma$ .

### Beispiel $B_2$



**Proposition 11.2** Die Weylgruppe  $W$  wirkt transitiv auf der Menge der Kammern. Die Spiegelungen an den Wänden der Fundamentalkammer  $C$  erzeugen  $W$ .

*Beweis.* Wir halten  $\eta \in C$  fest und definieren  $W' := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \rangle \leq W$ . Für  $\lambda \in V - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha^\vee$  betrachten wir die Bahn  $W'\lambda$  und nehmen  $\mu \in W'\lambda$  mit minimalem Abstand zu  $\eta$ . Eine elementargeometrische Überlegung (etwa der Satz von Ptolemaios oder auch nur die Dreiecksungleichung) zeigt, dass  $\mu$  in  $C$  liegt.



Für eine Kammer  $C'$  und  $\lambda \in C'$  gibt es also  $w \in W'$  mit  $w\lambda \in C$ . Somit haben wir  $wC' = C$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $W' = W$  ist. Für  $\alpha \in \Phi$  ist die Hyperebene  $\mathcal{H} := \ker \alpha^\vee$  eine Wand für eine Kammer  $C'$ . Es gibt  $w \in W'$  mit  $wC' = C$ , und  $w\mathcal{H}$  ist dann eine Wand von  $C$ . Die Spiegelung an  $w\mathcal{H}$  ist also  $s_\beta$  für ein  $\beta \in \Sigma$ . Damit gilt  $s_\alpha = w^{-1} s_\beta w \in W'$ .  $\square$

**Definition** Die Spiegelungen an den Wänden der Fundamentalkammer heissen *einfache Spiegelungen*. Wir bezeichnen mit  $S$  die Menge aller einfachen Spiegelungen, also  $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\} = \{s_1, \dots, s_l\}$ .

Jedes  $w \in W$  ist ein Produkt von einfachen Spiegelungen, also

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}. \quad (11.1)$$

Ist dabei  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  minimal, so nennen wir (11.1) eine *reduzierte Zerlegung* von  $w$  und  $r =: \ell(w)$  die *Länge* von  $w$ . Die Identität  $1 \in W$  ist das Element der Länge 0 (leeres Produkt) und  $\ell(w) = 1 \iff w \in S$ .

Es gibt genau ein Element  $w_o \in W$  maximaler Länge, und zwar ist  $\ell(w_o) = |\Phi_+| = N$ . Das Bild einer Kammer unter  $w_o$  ist die dazu entgegengesetzte Kammer, also  $w_o C = -C$ . Dies bedeutet jedoch nicht, dass  $w_o = -\text{id}$  ist, denn  $\det(-\text{id}) = (-1)^l$  und  $\det w_o = (-1)^N$ , und  $l$  und  $N$  können verschiedene Paritäten haben.

**Beispiel** Die symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_{l+1}$  ist eine Weylgruppe. Es sei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l+1}$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^{l+1}$ . Wir betrachten den Unterraum

$$V := \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} x_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0 \right\}$$

und die Vektoren

$$\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_l := \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1} \in V.$$

Dann ist  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  eine Basis des Wurzelsystems  $\Phi = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k \mid j \neq k\} \subseteq V$ . Die Weylgruppe  $W$  von  $\Phi$  wirkt auf  $\mathbb{R}^{l+1} = V \oplus V^\perp$ , wobei die Wirkung auf  $V^\perp$  trivial ist. Die Formel für die Spiegelung  $s_{\alpha_j}$  lautet

$$\begin{aligned} s_{\alpha_j}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k - \langle \varepsilon_k, \alpha_j^\vee \rangle \alpha_j = \varepsilon_k - \frac{2(\varepsilon_k \mid \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})}{(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} \mid \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) \\ &= \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & \text{falls } k = j, \\ \varepsilon_j & \text{falls } k = j + 1, \\ \varepsilon_k & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Weylgruppe permutiert also die Basisvektoren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l+1}$ . Damit erhalten wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{S}_{l+1} \\ s_{\alpha_j} &\longmapsto (j \ j+1) \quad (\text{für } j = 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Die einfachen Spiegelungen in  $W$  entsprechen den Transpositionen benachbarter Elemente in  $\mathfrak{S}_{l+1}$ , und die Spiegelungen in  $W$  entsprechen den Transpositionen in  $\mathfrak{S}_{l+1}$ . Auch die Länge  $\ell(w)$  eines Elementes  $w \in W$  hat eine wohlbekannt

Bedeutung: ist die  $w$  entsprechende Permutation in  $\mathfrak{S}_{l+1}$  gegeben durch  $j \mapsto i_j$ , so ist

$$\ell(w) = \#\{(j, k) \mid j < k \text{ und } i_j > i_k\}.$$

Das längste Element  $w_o$  entspricht der Permutation  $j \mapsto l+2-j$  in  $\mathfrak{S}_{l+1}$ . Kombinatoriker/innen werden sich für die Anzahl der reduzierten Zerlegungen von  $w_o$  interessieren. Für  $\mathfrak{S}_{l+1}$  ist diese Anzahl

$$\frac{\binom{l+1}{2}!}{1! \cdot 3!^{l-1} \cdot 5!^{l-2} \cdot \dots \cdot (2l-1)!}.$$

Hier ist eine Formel:

$$\sum_{w \in W} t^{\ell(w)} = \prod_{\alpha \in \Phi_+} \frac{1 - t^{\text{ht}(\alpha)+1}}{1 - t^{\text{ht}(\alpha)}}.$$

**Lemma 11.3** Für  $\alpha \in \Sigma$  gilt  $s_\alpha(\Phi_+ - \{\alpha\}) = \Phi_+ - \{\alpha\}$ .

*Beweis.* Für  $\Phi_+ - \{\alpha\} = \emptyset$  ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei  $\gamma \in \Phi_+ - \{\alpha\}$ . Wir schreiben  $\gamma = \sum_{\beta \in \Sigma} n_\beta \beta$ . Es gibt einen Koeffizienten  $n_\beta > 0$  für eine einfache

Wurzel  $\beta \in \Sigma - \{\alpha\}$ . Der Koeffizient von  $\beta$  in  $s_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \alpha$  ist  $n_\beta > 0$ . Folglich gilt  $s_\alpha(\gamma) \in \Phi_+ - \{\alpha\}$ .  $\square$

*Bemerkung* Wir haben in Proposition 11.2 gesehen, dass die Weylgruppe  $W$  transitiv auf der Menge der Kammern (oder Basen) wirkt. Tatsächlich wirkt  $W$  sogar einfach transitiv, also aus  $wC = C$  mit  $w \in W$  folgt  $w = 1$ . Um dies zu zeigen, führt man zweckmässigerweise  $\Phi_w := \Phi_+ \cap w\Phi_-$  ein. (Für  $\alpha \in \Sigma$  ist nach Lemma 11.3  $\Phi_{s_\alpha} = \{\alpha\}$ .) Man zeigt dann, dass  $\ell(w) = |\Phi_w|$  ist. Übrigens hat  $\Phi_w$  die folgende geometrische Bedeutung: eine Wand  $\ker \alpha^\vee$  mit  $\alpha \in \Phi_+$  trennt  $C$  und  $wC$  genau dann, wenn  $\alpha \in \Phi_w$  gilt.

Der Abschluss der Fundamentalkammer (oder irgendeiner Kammer) ist ein *Fundamentalebene* für die Wirkung der Weylgruppe auf  $V$ , das heisst

- $\lambda \in V \implies \exists w \in W$  mit  $w(\lambda) \in \overline{C}$  und
- $\lambda, \mu \in \overline{C}$ ,  $w \in W$  mit  $\mu = w(\lambda) \implies \mu = \lambda$ .

### 11.3 Der Struktursatz von Serre

Wir haben den Abschnitt über die Geometrie und Algebra der Wurzelsysteme verlassen und wenden uns wieder den halbeinfachen komplexen Lie-Algebren zu.

Das Wurzelsystem  $\Phi$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich einer Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  kann als Teilmenge des reellen Vektorraumes  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  der reellwertigen linearen Funktionale auf  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  aufgefasst werden. Dann erfüllt  $\Phi$  die Axiome eines Wurzelsystems in  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

Umgekehrt lässt sich aus einem abstrakten Wurzelsystem eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra konstruieren, deren Wurzelsystem zum gegebenen Wurzelsystem isomorph ist.

Bevor wir den Satz von Serre formulieren, erinnern wir uns an die folgenden Tatsachen.

- $\Phi \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}\Sigma$  ( $\Sigma$  eine Basis von  $\Phi$ )
- $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  für  $\alpha, \beta \in \Phi$  mit  $\alpha + \beta \neq 0$
- $\mathfrak{h} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} [\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$

Es seien  $\alpha, \beta \in \Sigma$ ,  $\alpha \neq \beta$ , zwei verschiedene einfache Wurzeln. Weil  $\beta - \alpha$  keine Wurzel ist (positiver und negativer Koeffizient!) wirkt  $\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$  auf

$$\mathfrak{g}_{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle \alpha}.$$

Für  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  gilt dann insbesondere

$$(\text{ad } X_{\alpha})^{-\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle + 1} \mathfrak{g}_{\beta} = 0.$$

**Satz 11.4 (Serre)** *Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem vom Rang  $l$  mit Basis  $\Sigma$ . Dann ist die komplexe Lie-Algebra erzeugt von den  $3l$  Elementen  $(H_{\alpha}, E_{\alpha}, F_{\alpha})_{\alpha \in \Sigma}$  und mit den Relationen*

- $[H_{\alpha}, H_{\beta}] = 0$
- $[E_{\alpha}, F_{\alpha}] = H_{\alpha}$ ,  $[E_{\alpha}, F_{\beta}] = 0$  für  $\alpha \neq \beta$
- $[H_{\alpha}, E_{\beta}] = \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle E_{\beta}$ ,  $[H_{\alpha}, F_{\beta}] = -\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle F_{\beta}$
- $(\text{ad } E_{\alpha})^{-\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle + 1}(E_{\beta}) = 0$  für  $\alpha \neq \beta$
- $(\text{ad } F_{\alpha})^{-\langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle + 1}(F_{\beta}) = 0$  für  $\alpha \neq \beta$

*eine (endlich dimensionale) halbeinfache komplexe Lie-Algebra, deren Wurzelsystem isomorph zu  $\Phi$  ist.*

## 12 Die klassischen einfachen Lie-Algebren über $\mathbb{C}$

Zum Schluss des Kapitels geben wir eine explizite Beschreibung der einfachen komplexen Lie-Algebren der Typen  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $C_l$  und  $D_l$ . Diese lassen sich durch die Lie-Algebren  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}_{2l+1}(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{C})$  und  $\mathfrak{so}_{2l}(\mathbb{C})$  realisieren. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{so}_d(\mathbb{C}) = (\text{Lie SO}(d)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (\text{Lie O}(d)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  besteht aus den antisymmetrischen komplexen  $d \times d$ -Matrizen, und somit verschwinden ihre Diagonalelemente. Wir ersetzen  $\mathfrak{so}_d(\mathbb{C})$  durch eine isomorphe Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^d, B) \subseteq M(d \times d, \mathbb{C})$ , worin die Diagonalmatrizen eine Cartan-Unteralgebra bilden. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{C})$  ist die Lie-Algebra der Lie-Gruppe der symplektischen komplexen  $2l \times 2l$ -Matrizen

$$\text{Sp}_{2l}(\mathbb{C}) = \{A \in M(2l \times 2l, \mathbb{C}) \mid A^T J A = J\}$$

$$\text{mit } J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden folgende Notationen:

$E_{p,q} \in M(d \times d, \mathbb{C})$  die Matrix mit  $(p, q)$ -Eintrag 1, alle anderen Einträge 0,  
 $\varepsilon_r$  das lineare Funktional auf den Diagonalmatrizen gegeben durch

$$\varepsilon_r : E_{p,p} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } r = p, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$i, j, k$  laufen über  $1, \dots, l$ .

$$\boxed{\text{Typ } A_l} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C}) = \{X \in M((l+1) \times (l+1), \mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0\}$$

Cartan-Unteralgebra:

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$$

Wurzelräume:

$$E_{p,q} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_p - \varepsilon_q} \quad p \neq q, \quad p, q = 1, \dots, l+1$$

Killing-Form:

$$\kappa(X, Y) = 2(l+1) \text{tr}(XY)$$

Dynkin-Diagramm und einfache Wurzeln:



**Typ  $B_l$**   $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2l+1}, B) = \{X \in M((2l+1) \times (2l+1), \mathbb{C}) \mid X^\top B + BX = 0\}$ ,

wobei  $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_l & 0 \\ \mathbf{1}_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Wir zerlegen  $X$  wie  $B$  in Blöcke und finden

$$X = \begin{pmatrix} A & B & e \\ C & D & f \\ g & h & \iota \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \iff \begin{cases} A^\top + D = 0, \\ B + B^\top = 0, C + C^\top = 0, \\ e^\top + h = 0, f^\top + g = 0, \\ \iota = 0. \end{cases}$$

Cartan-Unteralgebra:

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{l+i,l+i} + E_{l+i+1,l+i+1} \quad i \neq l$$

$$H_l = 2E_{l,l} - 2E_{2l,2l}$$

Wurzelräume:

$$E_{j,k} - E_{l+k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j \neq k$$

$$E_{j,l+k} - E_{k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j + \varepsilon_k} \quad j < k$$

$$E_{l+j,k} - E_{l+k,j} \in \mathfrak{g}_{-\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j < k$$

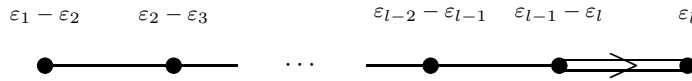
$$\sqrt{2}(E_{i,2l+1} - E_{2l+1,l+i}) \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_i}$$

$$\sqrt{2}(E_{l+i,2l+1} - E_{2l+1,i}) \in \mathfrak{g}_{-\varepsilon_i}$$

Killing-Form:

$$\kappa(X, Y) = (2l - 1) \operatorname{tr}(XY)$$

Dynkin-Diagramm und einfache Wurzeln:





---


$$\boxed{\text{Typ } C_l} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{C}) = \{X \in M(2l \times 2l, \mathbb{C}) \mid X^\top J + JX = 0\},$$

wobei  $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & 0 \end{pmatrix}$ . Wir zerlegen  $X$  wie  $J$  in Blöcke und finden

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \iff \begin{cases} A^\top + D = 0, \\ B = B^\top, C = C^\top. \end{cases}$$

Cartan-Unteralgebra:

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{l+i,l+i} + E_{l+i+1,l+i+1} \quad i \neq l$$

$$H_l = E_{l,l} - E_{2l,2l}$$

Wurzelräume:

$$E_{j,k} - E_{l+k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j \neq k$$

$$E_{j,l+k} + E_{k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j + \varepsilon_k} \quad j < k$$

$$E_{l+j,k} + E_{l+k,j} \in \mathfrak{g}_{-\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j < k$$

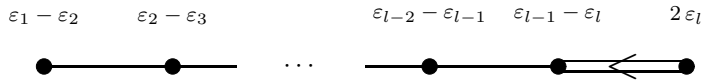
$$E_{i,l+i} \in \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$$

$$E_{l+i,i} \in \mathfrak{g}_{-2\varepsilon_i}$$

Killing-Form:

$$\kappa(X, Y) = 2(l+1) \operatorname{tr}(XY)$$

Dynkin-Diagramm und einfache Wurzeln:



---


$$\boxed{\text{Typ } D_l} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2l}, B) = \{X \in M(2l \times 2l, \mathbb{C}) \mid X^\top B + BX = 0\},$$

wobei  $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_l & 0 \end{pmatrix}$ . Wir zerlegen  $X$  wie  $B$  in Blöcke und finden

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \iff \begin{cases} A^\top + D = 0, \\ B + B^\top = 0, C + C^\top = 0. \end{cases}$$

Cartan-Unteralgebra:

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{l+i,l+i} + E_{l+i+1,l+i+1} \quad i \neq l$$

$$H_l = E_{l-1,l-1} + E_{l,l} - E_{2l-1,2l-1} - E_{2l,2l}$$

Wurzelräume:

$$E_{j,k} - E_{l+k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j \neq k$$

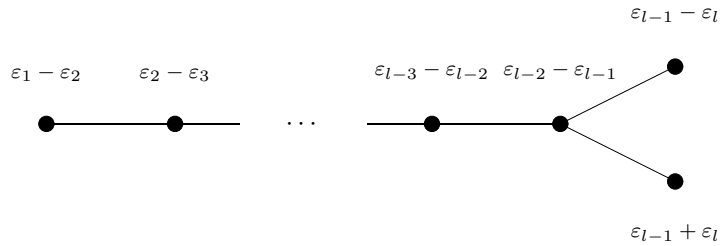
$$E_{j,l+k} - E_{k,l+j} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_j + \varepsilon_k} \quad j < k$$

$$E_{l+j,k} - E_{l+k,j} \in \mathfrak{g}_{-\varepsilon_j - \varepsilon_k} \quad j < k$$

Killing-Form:

$$\kappa(X, Y) = 2(l-1) \operatorname{tr}(XY)$$

Dynkin-Diagramm und einfache Wurzeln:





# Kapitel III

## Darstellungstheorie

- $\mathfrak{g}$  halbeinfache komplexe Lie-Algebra,  $\mathfrak{g} \neq 0$
- $\mathfrak{h}$  Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$
- $\Phi_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  Menge der positiven Wurzeln mit  $N = |\Phi_+|$  so, dass
- $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  Basis von  $\Phi_+$
- $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\pm} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$
- $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  Borel-Unteralgebra
- $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \rangle$  Weylgruppe
- $\ell(w)$  Länge von  $w \in W$
- $\varepsilon(w) = \det w = (-1)^{\ell(w)}$  Signum von  $w \in W$
- $\overline{C} \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$  abgeschlossene Fundamentalkammer
- $( \mid )$   $W$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$
- $Q = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}\alpha$  Wurzelgitter
- $Q_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha$
- $\mu \leq \lambda \iff \lambda - \mu \in Q_+$  partielle Ordnung auf  $\mathfrak{h}^*$
- $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  Fundamentalgewichte (Dualbasis zu  $(\alpha^\vee)_{\alpha \in \Sigma}$ )
- $P = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}\varpi_\alpha$  Gewichtsgitter
- $P_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_\alpha = P \cap \overline{C}$  Menge der dominanten ganzzahligen Gewichte
- $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_+} \alpha = \sum_{\alpha \in \Sigma} \varpi_\alpha$  halbe Summe der positiven Wurzeln
- $L(\lambda)$  einfacher  $\mathfrak{g}$ -Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$
- $N_{\lambda\mu}^\nu \quad L(\lambda) \otimes L(\mu) \cong \bigoplus_{\nu \in P_+} L(\nu)^{\oplus N_{\lambda\mu}^\nu}$  für  $\lambda, \mu, \nu \in P_+$

## 13 Moduln

### 13.1 Darstellungen und Moduln

In der Darstellungstheorie gibt es zwei Sprechweisen für denselben Sachverhalt. Statt zu sagen,  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  sei eine Darstellung, nennt man oft  $V$  einen (links)  $\mathfrak{g}$ -Modul oder einen (links)  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ -Modul.

Ein  $\mathfrak{g}$ -Modul ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\longrightarrow V \\ (X, v) &\longmapsto Xv, \end{aligned}$$

welche  $[X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$  ( $X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V$ ) erfüllt.

Ein  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ -Modul ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}\mathfrak{g} \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto xv, \end{aligned}$$

welche  $(xy)v = x(yv)$  und  $1v = v$  ( $x, y \in \mathfrak{U}\mathfrak{g}, v \in V$ ) erfüllt.

Eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , ein  $\mathfrak{g}$ -Modul und ein  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ -Modul sind also „dasselbe“. Notationell sind uns mit  $\varrho(X)v = Xv$  diese äquivalenten Sprachen geläufig. Es folgt nun noch ein kleines Vokabular.

Darstellung	$\leftrightarrow$ Modul
äquivalente Darstellungen	$\leftrightarrow$ isomorphe Moduln
irreduzible Darstellung	$\leftrightarrow$ einfacher Modul
vollreduzible Darstellung	$\leftrightarrow$ halbeinfacher Modul

Eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  zwischen zwei  $\mathfrak{g}$ -Moduln ist ein  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismus, wenn  $\varphi$   $\mathfrak{g}$ -äquivariant ist, also wenn  $\varphi(Xv) = X\varphi(v)$  für alle  $X \in \mathfrak{g}, v \in V$  gilt.

### 13.2 Gewichtsräume und endlich dimensionale $\mathfrak{g}$ -Moduln

Für einen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  definieren wir seine *Gewichtsräume* (simultane Eigenräume unter der Wirkung der Cartan-Unteralgebra  $\mathfrak{h}$ )

$$V_\mu := \{v \in V \mid Hv = \mu(H)v \ \forall H \in \mathfrak{h}\} \quad \text{für } \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Ist  $V_\mu \neq 0$ , so heisst  $\mu$  ein *Gewicht* von  $V$  und  $V_\mu$  der *Gewichtsraum* zum Gewicht  $\mu$ . Für  $V = \mathfrak{g}$  die adjungierte Darstellung erweitert dies die Terminologie, die wir schon früher einführt. Die Dimension  $\dim V_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  heisst *Multiplizität* des Gewichts  $\mu$ . Wir tolerieren dabei die missbräuchliche, aber bequeme

Sprechweise, von einem Gewicht  $\mu$  von  $V$  der Multiplizität 0 zu reden, wenn  $\mu$  kein Gewicht von  $V$  ist.

Für  $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$  haben wir

$$\mathfrak{g}_\alpha V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha},$$

was wie in Lemma 9.9 folgt: für  $H \in \mathfrak{h}$ ,  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  und  $v \in V_\mu$  ist

$$HXv = [H, X]v + XHv = \alpha(H)Xv + X\mu(H)v = (\mu + \alpha)(H)Xv.$$

Daraus folgt, dass  $\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu \subseteq V$  ein Untermodul des  $\mathfrak{g}$ -Moduls  $V$  ist. Wir interessieren uns hier ausschliesslich für  $\mathfrak{g}$ -Moduln  $V$ , für welche  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$  gilt.

**Proposition 13.1** *Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a)  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ .
- b)  $V_\mu \neq 0 \implies \langle \mu, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in \Sigma$  (und somit auch  $\forall \alpha \in \Phi$ ).
- c)  $\dim V_\mu = \dim V_{w\mu} \quad \forall w \in W$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Sigma$  wirkt das Element ( $\mathfrak{sl}_2$ -Tripel!)  $H_\alpha \in \mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$  auf  $V$ , und zwar diagonalisierbar<sup>1</sup> und mit ganzzahligen Eigenwerten. Weil  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{C}H_\alpha$  abelsch ist, gilt dann  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$  und  $V_\mu \neq 0 \implies \langle \mu, \alpha^\vee \rangle = \mu(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  für alle  $\alpha \in \Sigma$ .

Schliesslich ist in c) zu zeigen, dass  $\dim V_\mu = \dim V_{s_\alpha(\mu)}$  für alle  $\alpha \in \Sigma$  gilt. Wir verwenden den Automorphismus  $\theta_\alpha(1)$  aus Abschnitt 9.3. Es gibt eine invertierbare lineare Abbildung  $T \in \text{GL}(V)$  so, dass  $(\theta_\alpha(1)X)v = TXT^{-1}v$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in V$  gilt. Dann bildet  $T^{-1}$  den Gewichtsraum  $V_\mu$  auf  $V_{s_\alpha(\mu)}$  ab.  $\square$

<sup>1</sup>Dass  $H_\alpha$  diagonalisierbar wirkt, folgt nicht unmittelbar. Statt dies direkt ad hoc zu beweisen, verweisen wir auf den folgenden Satz.

**Satz 13.2** *Jeder endlich dimensionale  $\mathfrak{g}$ -Modul ist halbeinfach.*

*Beweisskizze.* Zu zeigen ist, dass für alle endlich dimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Moduln  $V'$  und  $V''$  gilt  $\text{Ext}_{\mathfrak{U}\mathfrak{g}}^1(V'', V') = 0$ . Man zeigt  $\text{Ext}_{\mathfrak{U}\mathfrak{g}}^1(V'', V') = H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V'', V'))$ , und in der Tat ist  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$  für jeden endlich dimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$ .  $\square$

*Bemerkung* Der Satz 13.2 wurde zuerst von Weyl mit analytischen Hilfsmitteln („Unitaritäts-Trick“) bewiesen. Es sei  $G$  eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende komplexe Lie-Gruppe mit Lie-Algebra isomorph zu  $\mathfrak{g}$ . Dann nimmt man eine maximal kompakte Untergruppe  $K$  von  $G$ . Ein endlich dimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul ist dann auch eine Darstellung von  $K$  und trägt eine  $K$ -invariante hermitesche Form, welche es erlaubt, zu einem  $\mathfrak{g}$ -stabilen Unterraum ein orthogonales Komplement zu finden, das dann auch  $\mathfrak{g}$ -stabil ist.

**Definition** Die Elemente der Dualbasis  $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Sigma} \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$  zur Basis der Korwurzeln  $(\alpha^\vee)_{\alpha \in \Sigma} \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R} \subseteq \mathfrak{h}$  heissen *Fundamentalgewichte*. Sie erzeugen das *Gewichtsgitter*

$$P = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}\varpi_\alpha \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \subseteq \mathfrak{h}^*.$$

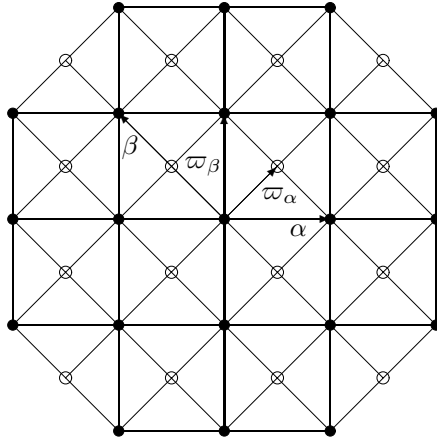
Ein Element  $\lambda \in P$  heisst *ganzzahliges Gewicht*.

Proposition 13.1 b) können wir jetzt so schreiben:

$$V_\mu \neq 0 \implies \mu \in P.$$

Das Wurzelgitter  $Q = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}\alpha$  ist ein Untergitter des Gewichtsgitters vom Index  $[P : Q] = \det A$ , wobei  $A$  die Cartan-Matrix von  $\mathfrak{g}$  ist.

**Beispiel** Ein Ausschnitt des Gewichtsgitters von  $B_2$ .



Die gefüllten Kreise bezeichnen Punkte des Wurzelgitters. Zum Gewichtsgitter gehören auch die durch die nicht gefüllten Kreise markierten Punkte.

Die Strahlen  $\mathbb{R}_{\geq 0}\varpi_\alpha \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$  für  $\alpha \in \Sigma$  sind die Kanten der abgeschlossenen Fundamentalkammer  $\overline{C}$ . Wichtig für die endlich dimensionale Darstellungstheorie ist die Menge  $P_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_\alpha = P \cap \overline{C}$  der *dominanten* ganzzahligen Gewichte.

**Lemma 13.3**  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_+} \alpha = \sum_{\alpha \in \Sigma} \varpi_\alpha.$

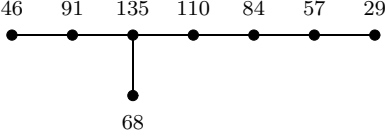
*Beweis.* Nach Lemma 11.3 gilt für  $\alpha \in \Sigma$

$$\rho - \alpha = s_\alpha(\rho) = \rho - \langle \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha,$$

also  $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$  für alle  $\alpha \in \Sigma$  und somit  $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma} \varpi_\alpha$ .  $\square$

**Korollar 13.4** Die halbe Summe der positiven Wurzeln liegt im Innern der Fundamentalkammer. Aus  $w\rho = \rho$  oder allgemeiner aus  $w(\lambda + \rho) = \lambda + \rho$  für  $\lambda \in P_+$  und  $w \in W$  folgt  $w = 1$ .

*Bemerkung* Damit haben wir auch eine „Erklärung“ für die Zahlen



$$\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma} m_\alpha \alpha$$

im Dynkin-Diagramm von  $E_8$ . Es sind die Koeffizienten von  $\rho$  bezüglich  $\Sigma$ . Es gilt also  $1 = \langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 2m_\alpha + \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \beta \neq \alpha}} \langle \beta, \alpha^\vee \rangle m_\beta$  für alle  $\alpha \in \Sigma$ . Ausserdem ist  $29 + 1 = \langle \rho, \theta^\vee \rangle + 1 = g$  die (duale) Coxeterzahl von  $E_8$ .

## 14 Höchstgewichtsmodul

### 14.1 Verma-Modul und BGG-Auflösung

Obschon wir an der endlich dimensionalen Darstellungstheorie von  $\mathfrak{g}$  interessiert sind, lassen wir vorerst auch unendlich dimensionale Moduln zu. Insbesondere werden wir die Verma-Moduln einführen, die als „Bausteine“ für endlich dimensionale Moduln dienen werden.

**Definition** Es sei  $V \neq 0$  ein möglicherweise unendlich dimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul. Ein Element  $v \in V - \{0\}$  heisst *primitives Element* zum Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , wenn

$$Hv = \lambda(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad \text{und} \quad Ev = 0 \quad \forall E \in \mathfrak{n}_+.$$

Der  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  heisst *Modul zum höchsten Gewicht*  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , falls es ein primitives Element  $v \in V$  zum Gewicht  $\lambda$  gibt mit  $V = (\mathfrak{U}\mathfrak{g})v$ .



Es sei  $V$  ein  $\mathfrak{g}$ -Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$  mit primitivem Element  $v$  zum Gewicht  $\lambda$ . Jedes Element von  $V$  ist dann eine Linearkombination von Elementen der Form

$$F_1^{q_1} \cdots F_N^{q_N} v \quad (q_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für } j = 1, \dots, N) \quad (14.1)$$

mit  $F_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j} - \{0\}$  ( $j = 1, \dots, N$ ), und für  $H \in \mathfrak{h}$  gilt

$$HF_1^{q_1} \cdots F_N^{q_N} v = (\lambda - q_1\alpha_1 - \cdots - q_N\alpha_N)(H) F_1^{q_1} \cdots F_N^{q_N} v. \quad (14.2)$$

Also ist dann der Modul  $V$  die direkte Summe seiner Gewichtsräume:

$$V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} V_\mu,$$

wobei  $\leq$  die partielle Ordnung auf  $\mathfrak{h}^*$  ist, welche durch  $\mu \leq \lambda \iff \lambda - \mu \in Q_+$  definiert ist. Es gilt  $\dim V_\mu < \infty$ .

Die Vektoren in (14.1) sind im allgemeinen nicht linear unabhängig. Falls sie linear unabhängig sind, ist  $V$  ein universeller Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$ , nämlich  $V \cong \mathfrak{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{U}\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda =: M(\lambda)$ . Dabei ist  $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}1$  der 1-dimensionale  $\mathfrak{b}$ -Modul mit

$$\begin{aligned} H1 &= \lambda(H)1 && \text{für } H \in \mathfrak{h}, \\ E1 &= 0 && \text{für } E \in \mathfrak{n}_+. \end{aligned}$$

Der universelle Modul  $M(\lambda)$  heisst auch *Verma-Modul* zum höchsten Gewicht  $\lambda$ . Mit  $1_\lambda = 1 \otimes 1 \in \mathfrak{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{U}\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$  haben wir

$$M(\lambda) = \bigoplus_{\substack{q_1 \geq 0 \\ \vdots \\ q_N \geq 0}} \mathbb{C}F_1^{q_1} \cdots F_N^{q_N} 1_\lambda \quad (14.3)$$

und  $F_1^{q_1} \cdots F_N^{q_N} 1_\lambda \neq 0$ . Jeder Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$  ist isomorph zu einem Quotienten des Verma-Moduls  $M(\lambda)$ . Die Summe  $I(\lambda)$  aller echten Untermoduln von  $M(\lambda)$  ist enthalten in  $\bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \\ \mu \neq \lambda}} M(\lambda)_\mu$  und ist folglich der maximale

Untermodul von  $M(\lambda)$ . Der Quotient  $M(\lambda)/I(\lambda)$  ist dann also der einzige einfache Quotient von  $M(\lambda)$ .

*Bemerkung* Für  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}_{>0} \forall \alpha \in \Phi_+$  gilt  $L(\lambda) = M(\lambda)$ .

Ist  $V$  wieder irgendein  $\mathfrak{g}$ -Modul zum höchsten Gewicht  $\lambda$  mit primitivem Element  $v$  zum Gewicht  $\lambda$ , so gibt es genau einen  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismus  $M(\lambda) \rightarrow V$ , der  $1_\lambda$  auf  $v$  abbildet. Für die Gewichtsräume haben wir  $M(\lambda)_\mu \rightarrow V_\mu$  für alle  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  und  $V_\lambda = \mathbb{C}v$ . Weiter folgt  $\text{End}_{\mathfrak{g}} V = \mathbb{C}$ , denn ein  $\mathfrak{g}$ -Endomorphismus von  $V$  wird

beschrieben durch die Einschränkung auf  $V_\lambda = \mathbb{C}v$  und ist dort von der Form  $v \mapsto av$  für ein  $a \in \mathbb{C}$ .

Das Zentrum  $\mathfrak{Z}\mathfrak{g}$  von  $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$  wirkt auf  $V$  als Algebra von  $\mathfrak{g}$ -Endomorphismen. Wegen  $\text{End}_{\mathfrak{g}} V = \mathbb{C} \cdot \text{id}_V$  haben wir einen Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren

$$\chi_\lambda : \mathfrak{Z}\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit  $zv' = \chi_\lambda(z)v'$  ( $z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{g}$ ,  $v' \in V$ ). Die Funktion  $\chi_\lambda$  heisst *zentraler Charakter*. Das Zentrum  $\mathfrak{Z}\mathfrak{g}$  wirkt auf jedem Untermodul und jedem Quotienten von  $V$  durch den zentralen Charakter  $\chi_\lambda$ . Insbesondere hängt der zentrale Charakter eines Moduls zum höchsten Gewicht  $\lambda$  nur von  $\lambda$  und nicht vom Modul selbst ab.

**Satz 14.1 (Harish-Chandra)** Für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  gilt für die zentralen Charaktere

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \exists w \in W \text{ mit } \lambda = w(\mu + \rho) - \rho.$$

**Notation** Für  $w \in W$  und  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  setzen wir  $w \cdot \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$ .

**Beispiel**  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Wir verwenden die üblichen Notationen  $H, E, F$  und identifizieren die Gewichte  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit den Zahlen  $\lambda(H) \in \mathbb{C}$ . Die Wurzeln sind dann  $\pm\alpha = \pm 2$ . Für  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  konstruieren wir den einfachen Modul  $L(\lambda)$  zum höchsten Gewicht  $\lambda$  im Abschnitt 9.2. Mit  $\rho = \frac{1}{2}\alpha = 1$  und  $s_\alpha : \lambda \mapsto -\lambda$  finden wir  $s_\alpha \cdot \lambda = s_\alpha(\lambda + \frac{1}{2}\alpha) - \frac{1}{2}\alpha = -\lambda - \alpha = -\lambda - 2$ .

$$\cdots \begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{E} & \mathbb{C}F^{\lambda+1}1_\lambda & \xrightarrow{\cdots E \cdots} & \mathbb{C}F^\lambda 1_\lambda & \xrightarrow{E} & \cdots & \xrightarrow{E} & \mathbb{C}F1_\lambda & \xrightarrow{E} & \mathbb{C}1_\lambda & \xrightarrow{\cdots E \cdots} & 0 \\ \xleftarrow{F} & & \xleftarrow{F} & & \xleftarrow{F} & & \xleftarrow{F} & & \xleftarrow{F} & & & \end{array}$$

Für  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ist also  $F^{\lambda+1}1_\lambda$  ein primitives Element zum Gewicht  $\lambda - 2(\lambda + 1) = -\lambda - 2$ .

$$M(s_\alpha \cdot \lambda) = M(-\lambda - 2) \cong I(\lambda) = \bigoplus_{q \geq \lambda+1} \mathbb{C}F^q 1_\lambda \subseteq \bigoplus_{q \geq 0} \mathbb{C}F^q 1_\lambda = M(\lambda)$$

Der unendlich dimensionale  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Modul  $M(\lambda)$  ist nicht halbeinfach, denn der Untermodul  $I(\lambda)$  besitzt kein Komplement.

Es gilt  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[\Omega]$  mit  $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE = \frac{1}{2}H^2 + H + 2FE \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ . Wir können in diesem Beispiel den Satz von Harish-Chandra direkt bestätigen:

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(\Omega) &= \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda, \\ \chi_{-\lambda-2}(\Omega) &= \frac{1}{2}(-\lambda-2)^2 + (-\lambda-2) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Für den  $(\lambda + 1)$ -dimensionalen einfachen  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Modul  $L(\lambda) = M(\lambda)/I(\lambda)$  haben wir eine Auflösung durch Verma-Moduln gefunden, eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M(s_\alpha \cdot \lambda) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Moduln und  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Homomorphismen.

Nach Proposition 13.1 a) besitzt jeder endlich dimensionale einfache  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  ein primitives Element  $v \in V - \{0\}$  zu einem Gewicht  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Es gilt dann  $V = (\mathfrak{U}\mathfrak{g})v \cong L(\lambda)$ , weil  $V$  einfach ist. Nach Proposition 13.1 b) c) ist  $\lambda \in P_+$  ein dominantes ganzzahliges Gewicht. Wir werden sehen, dass umgekehrt für  $\lambda \in P_+$  der einfache Modul  $L(\lambda)$  endliche Dimension hat.

Bernstein, Gelfand und Gelfand konstruierten für eine beliebige halbeinfache komplexe Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  für jeden endlich dimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Modul eine Auflösung durch direkte Summen von lauter Verma-Moduln. Als unmittelbares Korollar aus dieser BGG-Auflösung folgt die Charakterformel von Weyl. Zu deren Beweis bedarf es nicht der vollen Stärke der BGG-Auflösung. Trotzdem verwenden wir hier die BGG-Auflösung, um die Charakterformel herzuleiten, da dieser Zugang konzeptuell sehr leicht zu verstehen ist. Zuerst formulieren wir einige Tatsachen über  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismen zwischen Verma-Moduln.

Für  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  ist der Vektorraum der  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismen  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$  höchstens 1-dimensional, und für  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ ,  $\varphi \neq 0$ , ist  $\varphi$  injektiv. Man kann dann also  $M(\mu)$  als Untermodul von  $M(\lambda)$  auffassen. Es gelten dann  $\mu \leq \lambda$  und nach dem Satz von Harish-Chandra  $\mu \in W \cdot \lambda$ .

**Satz 14.2 (Bernstein, Gelfand, Gelfand)** *Für jedes dominante ganzzahlige Gewicht  $\lambda \in P_+$  gibt es eine exakte Folge von  $\mathfrak{g}$ -Moduln und  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismen*

$$0 \longrightarrow C_N(\lambda) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(\lambda) \longrightarrow C_0(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

mit

$$C_p(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=p}} M(w \cdot \lambda).$$

## 15 Charaktere

Für einen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  mit  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$  und mit endlich dimensionalen Gewichts-räumen  $\dim V_\mu < \infty$  für alle  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  – einen solchen Modul nennen wir zulässig – definieren wir seinen *Charakter*  $\text{ch } V$ . Der Charakter führt über die Dimensionen der Gewichts-räume Buch und ist definiert als

$$\text{ch } V := \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dim V_\mu e^\mu \in \mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]].$$

Eine Erklärung, was  $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]]$  ist, folgt gleich. Zuerst bezeichnen wir noch mit  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{Z}e^\lambda$  den Gruppenring der (abelschen) Gruppe  $\mathfrak{h}^*$ . Um nicht mit der Addition in  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$  in Konflikt zu kommen, schreiben wir die Einbettung so:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\hookrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] \\ \lambda &\mapsto e^\lambda \quad \text{mit } e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

Das Einselement ist  $1 = e^0$ .

Wir haben die abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]] = \prod_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{Z}e^\lambda$ , die  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$  enthält. Es ist zu beachten, dass  $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]]$  kein Ring ist. Die Multiplikation in  $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$  kann (für  $\mathfrak{g} \neq 0$ , was wir ja voraussetzen) nicht auf ganz  $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]]$  erweitert werden.

Für den Charakter eines Verma-Moduls  $M(\lambda)$  erhalten wir nach (14.3) und (14.2)

$$\begin{aligned} \text{ch } M(\lambda) &= \sum_{\substack{q_1 \geq 0 \\ \vdots \\ q_N \geq 0}} e^{\lambda - q_1 \alpha_1 - \dots - q_N \alpha_N} = e^\lambda \prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - e^{-\alpha_j}} \\ &= \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha})} \in e^\lambda \underbrace{\mathbb{Z}[[e^{-\alpha_1}, \dots, e^{-\alpha_l}]]}_{\substack{\text{Potenzreihen in } e^{-\alpha_1}, \dots, e^{-\alpha_l} \\ \text{mit ganzzahligen Koeffizienten}}} \subseteq \mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]]. \end{aligned}$$

**Lemma 15.1** *Es sei*

$$0 \longrightarrow V_N \xrightarrow{f_N} V_{N-1} \xrightarrow{f_{N-1}} \dots \longrightarrow V_0 \xrightarrow{f_0} V \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge<sup>2</sup> von endlich dimensionalen Vektorräumen. Dann gilt

$$\dim V = \sum_{p=0}^N (-1)^p \dim V_p. \quad (15.1)$$

*Beweis.* Mit Induktion nach  $N$ .

$N \leq 1$ :  $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} V \longrightarrow 0$  exakt

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} f_0 \text{ surjektiv} \\ \ker f_0 = \text{im } f_1 \\ f_1 \text{ injektiv} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \implies \dim V &= \dim \text{im } f_0 = \dim V_0 - \dim \ker f_0 \\ &= \dim V_0 - \dim \text{im } f_1 = \dim V_0 - \dim V_1. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $f_N, \dots, f_0$  sind lineare Abbildungen, und  $f_N$  ist injektiv,  $f_0$  ist surjektiv und  $\text{im } f_p = \ker f_{p-1}$  für  $p = 1, \dots, N$ .

$N \geq 2$ : Für die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \ker f_{N-2} \hookrightarrow V_{N-2} \xrightarrow{f_{N-2}} V_{N-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_0 \xrightarrow{f_0} V \longrightarrow 0$$

gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\dim V = \sum_{p=0}^{N-2} (-1)^p \dim V_p + (-1)^{N-1} \dim \ker f_{N-2}. \quad (15.2)$$

Mit der exakten Folge

$$0 \longrightarrow V_N \xrightarrow{f_N} V_{N-1} \xrightarrow{f_{N-1}} \operatorname{im} f_{N-1} \longrightarrow 0$$

erhalten wir  $\dim \operatorname{im} f_{N-1} = \dim V_{N-1} - \dim V_N$ , zusammen mit (15.2) und mit  $\dim \operatorname{im} f_{N-1} = \dim \ker f_{N-2}$  also die alternierende Summenformel (15.1).  $\square$

**Korollar 15.2** *Es sei*

$$0 \longrightarrow C_N \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von zulässigen  $\mathfrak{g}$ -Moduln und  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismen. Dann gilt

$$\operatorname{ch} L = \sum_{p=0}^N (-1)^p \operatorname{ch} C_p.$$

*Beweis.* Wir zerlegen alle vorkommenden Moduln in ihre Gewichtsräume. Jeder  $\mathfrak{g}$ -Homomorphismus (sogar jeder  $\mathfrak{h}$ -Homomorphismus)  $\varphi : V \rightarrow V'$  bildet den Gewichtsräume zum Gewicht  $\mu$  in den Gewichtsräume zum selben Gewicht  $\mu$  ab:

$$v \in V_\mu \implies H\varphi(v) = \varphi(Hv) = \varphi(\mu(H)v) = \mu(H)\varphi(v), \text{ d. h. } \varphi(v) \in V'_\mu.$$

(Wir benötigten dies schon auf Seite 82.)  $\square$

**Satz 15.3 (Weylsche Charakterformel)** *Für jedes dominante ganzzahlige Gewicht  $\lambda \in P_+$  gilt die Charakterformel*

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})}. \quad (15.3)$$

*Bemerkung* Zähler und Nenner in (15.3) sind Elemente des Gruppenrings  $\mathbb{Z}[P]$ . (Im allgemeinen ist  $\frac{\alpha}{2}$  für  $\alpha \in \Phi_+$  kein ganzzahliges Gewicht, aber das Produkt  $\prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) = e^{-\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^\alpha - 1) \in \mathbb{Z}[P]$ .) Wegen  $P = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{Z}\varpi_\alpha$  ist  $\mathbb{Z}[P]$  der

Ring der Laurent-Polynome in den Variablen  $(e^{\varpi_\alpha})_{\alpha \in \Sigma}$  mit ganzzahligen Koeffizienten, also

$$\mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[(e^{\pm \varpi_\alpha})_{\alpha \in \Sigma}] = \mathbb{Z}[(e^{\varpi_\alpha})_{\alpha \in \Sigma}, e^{-\rho}].$$

Die Weylgruppe wirkt auf dem Gewichtsgitter  $P \subseteq \mathfrak{h}^*$  und folglich auch auf  $\mathbb{Z}[P]$ . Zähler und Nenner in (15.3) sind antisymmetrisch ( $w\xi = \varepsilon(w)\xi$ ) unter der  $W$ -Wirkung. Dies ist evident für den Zähler und folgt für den Nenner aus Lemma 11.3. Der Quotient ist dann invariant unter  $W$ , was im Einklang mit Proposition 13.1 c) steht. Das folgende Lemma zeigt, dass der Quotient, der a priori ein Element des Quotientenkörpers des Integritätsbereichs  $\mathbb{Z}[P]$  ist, tatsächlich zu  $\mathbb{Z}[P]$  gehört. (Dies folgt übrigens auch daraus, dass der Quotient  $W$ -invariant ist und  $e^\lambda$  als maximales Monom besitzt.)

**Lemma 15.4** *Für  $\lambda \in P$  ist das Element  $\xi = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}$  in  $\mathbb{Z}[P]$  durch  $\delta = \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) = e^\rho \prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha})$  teilbar.*

*Beweis.* Es sei  $\alpha \in \Phi_+$  eine positive Wurzel. Wir schreiben  $W = W' \dot{\cup} s_\alpha W'$ , das heisst  $W'$  ist ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen  $\langle s_\alpha \rangle \backslash W$ . Dann ist  $\xi = \sum_{w \in W'} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)} + \varepsilon(s_\alpha w) e^{s_\alpha w(\lambda+\rho)}$ , und jeder Summand

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) e^\mu + \varepsilon(s_\alpha w) e^{s_\alpha(\mu)} &= \varepsilon(w) e^\mu - \varepsilon(w) e^{\mu - \langle \mu, \alpha^\vee \rangle \alpha} \\ &= \varepsilon(w) e^\mu (1 - e^{-\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \alpha}) \end{aligned}$$

ist wegen  $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  durch  $1 - e^{-\alpha}$  teilbar. Weil  $1 - e^{-\alpha}$  für  $\alpha \in \Phi_+$  paarweise zueinander teilerfremde Elemente im faktoriellen Ring  $\mathbb{Z}[P]$  sind, ist also  $\xi$  durch  $\delta$  teilbar.  $\square$

*Beweis.* (Satz 15.3) Die BGG-Auflösung (Satz 14.2) liefert (mit Korollar 15.2)

$$\begin{aligned} \text{ch } L(\lambda) &= \sum_{p=0}^N \sum_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=p}} (-1)^p \text{ch } M(w \cdot \lambda) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \frac{e^{w \cdot \lambda}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha})} \\ &= \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})}. \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 15.5 (Nennerformel)** *Es gilt*

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho} = \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}).$$

*Beweis.* Dies ist die Charakterformel für den Modul  $L(0)$ , denn  $L(0) \cong \mathbb{C}$  ist ein trivialer 1-dimensionaler Modul, also  $\text{ch } L(0) = 1$ .  $\square$

**Beispiel** Nennerformel für  $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$  (Typ  $A_l$ ). Wir verwenden die Notationen vom Beispiel auf Seite 69.

$$\Phi_+ = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k \mid 1 \leq j < k \leq l+1\}$$

Die halbe Summe der positiven Wurzeln ist dann

$$\rho = \frac{1}{2}(l\varepsilon_1 + (l-2)\varepsilon_2 + (l-4)\varepsilon_3 + \cdots - (l-2)\varepsilon_l - l\varepsilon_{l+1}).$$

Die Nennerformel lautet hier

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho} = \prod_{1 \leq j < k \leq l+1} (e^{\frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_k)} - e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}).$$

Wir multiplizieren mit  $e^{\frac{1}{2}l(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l+1})} = \prod_{1 \leq j < k \leq l+1} e^{\frac{1}{2}(\varepsilon_j + \varepsilon_k)}$  und verwenden, dass (wie im Beispiel auf Seite 69)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l+1}$  invariant ist unter der Weylgruppe  $W \cong \mathfrak{S}_{l+1}$ . Damit wird

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq j < k \leq l+1} (e^{\varepsilon_j} - e^{\varepsilon_k}) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(l\varepsilon_1 + (l-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_l + 0 \cdot \varepsilon_{l+1})} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{l+1}} \text{sign}(\sigma) (e^{\varepsilon_{\sigma(1)}})^l (e^{\varepsilon_{\sigma(2)}})^{l-1} \cdots (e^{\varepsilon_{\sigma(l)}})^1 (e^{\varepsilon_{\sigma(l+1)}})^0 \\ &= \begin{vmatrix} (e^{\varepsilon_1})^l & (e^{\varepsilon_2})^l & \cdots & (e^{\varepsilon_{l+1}})^l \\ (e^{\varepsilon_1})^{l-1} & (e^{\varepsilon_2})^{l-1} & \cdots & (e^{\varepsilon_{l+1}})^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\varepsilon_1} & e^{\varepsilon_2} & \cdots & e^{\varepsilon_{l+1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist die Formel für eine Vandermonde-Determinante.

**Satz 15.6 (Dimensionsformel)** *Es sei  $\lambda \in P_+$  ein dominantes ganzzahliges Gewicht. Dann gilt*

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Phi_+} \frac{(\lambda + \rho | \alpha)}{(\rho | \alpha)} = \prod_{\alpha \in \Phi_+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}{\langle \rho, \alpha^\vee \rangle}.$$

*Beweis.* Die Dimensionsformel folgt aus der Charakterformel mit einer algebraischen Version der Regel von Bernoulli-del'Hôpital. Für  $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  definieren wir den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} E_{\mu} : \mathbb{Z}[P] &\longrightarrow \mathbb{C}[[\tau]] \\ e^{\varpi_{\alpha}} &\longmapsto e^{(\mu|\varpi_{\alpha})\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu|\varpi_{\alpha})^n}{n!} \tau^n \quad \text{für } \alpha \in \Sigma. \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} E_{\rho} \left( \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)} \right) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{(\rho|w(\lambda+\rho))\tau} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w^{-1}) e^{(\lambda+\rho|w\rho)\tau} \\ &= E_{\lambda+\rho} \left( \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho} \right) = E_{\lambda+\rho} \left( e^{-\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\alpha} - 1) \right). \end{aligned}$$

Die gesuchte Dimension erhalten wir durch Evaluation von  $E_{\rho}(L(\lambda))$  in  $\tau = 0$ .

$$\begin{aligned} \dim L(\lambda) &= E_{\rho} \left( \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{e^{-\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\alpha} - 1)} \right) \Bigg|_{\tau=0} = \frac{E_{\lambda+\rho} \left( e^{-\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\alpha} - 1) \right)}{E_{\rho} \left( e^{-\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\alpha} - 1) \right)} \Bigg|_{\tau=0} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\rho|\rho)\tau}}{e^{-(\rho|\rho)\tau}} \prod_{\alpha \in \Phi_+} \frac{e^{(\lambda+\rho|\alpha)\tau} - 1}{e^{(\rho|\alpha)\tau} - 1} \Bigg|_{\tau=0} = \prod_{\alpha \in \Phi_+} \frac{(\lambda + \rho | \alpha)}{(\rho | \alpha)} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von  $\alpha^{\vee} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \alpha$  folgt die andere Formel.  $\square$

**Beispiel** Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  mit  $\Phi_+ = \{\alpha\}$  erhalten wir wie erwartet die Formel  $\dim L(r\frac{\alpha}{2}) = r + 1$  für  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Allgemeiner ( $\mathfrak{g}$  beliebig) gilt  $\dim L(r\rho) = (r + 1)^N$  für  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , wobei  $N = |\Phi_+|$ .

Wir definieren die Partitionsfunktion  $\mathcal{P} : P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  durch

$$\frac{1}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha})} =: \sum_{\gamma \in Q_+} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma}.$$

$\mathcal{P}(\gamma)$  ist also die Anzahl der Tupel  $(n_{\alpha})_{\alpha \in \Phi_+} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Phi_+}$  mit  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Phi_+} n_{\alpha} \alpha$ . Damit

können wir die Charakterformel so umformen, dass eine Formel für die Multiplizität eines Gewichts in einem endlich dimensionalen einfachen  $\mathfrak{g}$ -Modul entsteht.



**Proposition 15.7 (Multiplizitätsformel von Kostant)** *Es sei  $\lambda \in P_+$ . Für die Multiplizität des Gewichts  $\mu \in P$  in  $L(\lambda)$  gilt dann*

$$\dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)).$$

*Beweis.* Wir schreiben den Nenner in der Weylschen Charakterformel mit Hilfe der Partitionsfunktion und formen um.

$$\begin{aligned} \text{ch } L(\lambda) &= \left( \sum_{\gamma \in P} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma} \right) \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \rho) - \rho} \\ &= \sum_{\gamma \in P} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(\gamma) e^{w(\lambda + \rho) - (\gamma + \rho)} \\ &= \sum_{\mu \in P} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)) e^\mu. \end{aligned}$$

□

**Proposition 15.8 (Multiplizitätsformel von Racah)** *Für jedes dominante ganzzahlige Gewicht  $\lambda \in P_+$  und jedes von  $\lambda$  verschiedene Gewicht  $\mu \in P - \{\lambda\}$  von  $L(\lambda)$  gilt*

$$\dim L(\lambda)_\mu = - \sum_{\substack{w \in W \\ w \neq 1}} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_{\mu + \rho - w\rho}.$$

*Beweis.* Für  $\lambda = 0$  und  $\nu \in P - \{0\}$  gilt nach Proposition 15.7

$$0 = \dim L(0)_{-\nu} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w\rho + \nu - \rho)$$

oder

$$\mathcal{P}(\nu) = - \sum_{\substack{w \in W \\ w \neq 1}} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w\rho + \nu - \rho) \quad \text{für } \nu \neq 0. \quad (15.4)$$

Zusammen mit  $\mathcal{P}(0) = 1$  und  $\text{supp } \mathcal{P} = Q_+$  gibt (15.4) eine Formel zur induktiven Berechnung von  $\mathcal{P}(\nu)$ . Indem wir den Ausdruck für  $\mathcal{P}(\nu)$  in Proposition 15.7 einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim L(\lambda)_\mu &= - \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \sum_{\substack{w' \in W \\ w' \neq 1}} \varepsilon(w') \mathcal{P}(\underbrace{w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho) + w'\rho - \rho}_{\neq 0 \ \forall w \in W \text{ (Übung 15.1)}}) \\ &= - \sum_{\substack{w' \in W \\ w' \neq 1}} \varepsilon(w') \underbrace{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho - w'\rho + \rho))}_{= \dim L(\lambda)_{\mu + \rho - w'\rho}}. \end{aligned}$$

□

ÜBUNG 15.1 Ist  $\lambda \in P_+$  und ist  $\mu \neq \lambda$  ein Gewicht von  $L(\lambda)$ , so gilt

$$(\mu + \rho | \mu + \rho) < (\lambda + \rho | \lambda + \rho).$$

## 16 Tensorprodukte und Darstellungsring

Wir fassen zuerst einige Tatsachen zusammen, die wir bis jetzt über endlich dimensionale  $\mathfrak{g}$ -Moduln  $V$  gelernt haben.

- $V$  ist eine direkte Summe von einfachen  $\mathfrak{g}$ -Moduln.
- Es gibt eine natürliche Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von} \\ \text{endlich dimensionalen} \\ \text{einfachen } \mathfrak{g}\text{-Moduln} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cong} P_+.$$

Einem Repräsentanten der linken Seite wird sein höchstes Gewicht zugeordnet, und zu einem dominanten ganzzahligen Gewicht haben wir die Klasse  $[L(\lambda)]$  von  $L(\lambda)$ .

- $\dim L(\lambda)_\lambda = 1$ .
- $\text{ch } V \in \mathbb{Z}[P]^W = \{\xi \in \mathbb{Z}[P] \mid w\xi = \xi \ \forall w \in W\}$ .

Die Menge aller Äquivalenzklassen von endlich dimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  (Isomorphieklassen von endlich dimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Moduln) ist eine Halbgruppe mit der direkten Summe von Repräsentanten als Addition. Für jeden endlich dimensionalen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  oder seine Isomorphieklasse  $[V]$  gilt

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+} L(\lambda)^{\oplus n_\lambda} \quad \text{oder} \quad [V] = \sum_{\lambda \in P_+} n_\lambda \cdot [L(\lambda)] \quad (16.1)$$

mit eindeutig bestimmten Multiplizitäten  $n_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  und  $n_\lambda \neq 0$  nur für endlich viele  $\lambda \in P_+$ .

Wie bestimmt man die Koeffizienten  $n_\lambda$  in (16.1), wenn der endlich dimensionale  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  gegeben ist? Es gilt  $\text{ch } V = \sum_{\lambda \in P_+} n_\lambda \text{ch } L(\lambda)$ . Der folgende Algorithmus bestimmt also die Koeffizienten  $n_\lambda$ .

**Algorithmus**

→ EINGABE: ein endlich dimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$ .

1) Setze  $\xi := \text{ch } V$ .

2) Wähle  $\lambda \in P_+$  maximal (bezüglich der partiellen Ordnung  $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q_+$ ) so, dass der Koeffizient von  $e^\lambda$  in  $\xi$  nicht verschwindet. Dieser Koeffizient ist  $n_\lambda$ .

3) Ersetze  $\xi$  durch  $\xi - n_\lambda \text{ch } L(\lambda)$  (und nenne diesen Ausdruck wieder  $\xi$ ).

4) Falls  $\xi = 0$ , so gibt es keine weiteren von 0 verschiedenen Koeffizienten. Andernfalls gehe zurück zu 2).

→ AUSGABE: die Koeffizienten  $n_\lambda$  in (16.1).

Die additive Gruppe  $R(\mathfrak{g})$  ist die Gruppe der Äquivalenzklassen von endlich dimensionalen virtuellen Darstellungen von  $\mathfrak{g}$ :

$$R(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{Z} \cdot [L(\lambda)].$$

Bei virtuellen Darstellungen sind also auch negative Multiplizitäten zugelassen. Es ist klar, dass der oben beschriebene Algorithmus auch für Elemente in  $R(\mathfrak{g})$  angewendet werden kann.

Das Tensorprodukt  $V \otimes V'$  (Tensorprodukt über  $\mathbb{C}$ ) zweier  $\mathfrak{g}$ -Moduln  $V$  und  $V'$  trägt eine  $\mathfrak{g}$ -Modulstruktur, nämlich

$$X(v \otimes v') := (Xv) \otimes v' + v \otimes (Xv') \quad (X \in \mathfrak{g}, v \in V, v' \in V'). \quad (16.2)$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} [X, Y](v \otimes v') &= ([X, Y]v) \otimes v' + v \otimes ([X, Y]v') \\ &= (XYv) \otimes v' - (YXv) \otimes v' + v \otimes (XYv') - v \otimes (YXv') \\ &= XY(v \otimes v') - YX(v \otimes v'). \end{aligned}$$

Die Leibniz-Formel (16.2) haben wir auch schon angetroffen, nämlich bei der konkreten Realisierung der irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  auf Seite 53.

Die Zerlegung in Gewichtsräume sieht so aus: für  $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda$  und  $V' = \bigoplus_{\lambda' \in P} V'_{\lambda'}$  ist nach der Formel (16.2)

$$(V \otimes V')_\mu = \bigoplus_{\lambda + \lambda' = \mu} V_\lambda \otimes V'_{\lambda'}.$$

Für die Charaktere gilt also  $\text{ch}(V \otimes V') = \text{ch } V \cdot \text{ch } V'$ , wenn  $V$ ,  $V'$  und  $V \otimes V'$  zulässige  $\mathfrak{g}$ -Moduln sind.

Durch additive Erweiterung von

$$[V] \cdot [V'] := [V \otimes V']$$

wird  $R(\mathfrak{g})$  ein kommutativer Ring mit  $1 = [L(0)]$ , der *Darstellungsring* von  $\mathfrak{g}$ .

Der folgende Satz ist nun klar.

**Satz 16.1**  $R(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}[[L(\varpi_\alpha)]_{\alpha \in \Sigma}] \cong \mathbb{Z}[P]^W$ .

Zum  $1 \times 1$  des Darstellungsringes gehört die Bestimmung der Multiplizitäten in Tensorprodukten. Für  $\lambda, \mu, \nu \in P_+$  bestimme man die Koeffizienten  $N_{\lambda\mu}^\nu$  in

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) \cong \bigoplus_{\nu \in P_+} L(\nu)^{\oplus N_{\lambda\mu}^\nu} \quad \text{oder} \quad [L(\lambda)] \cdot [L(\mu)] = \sum_{\nu \in P_+} N_{\lambda\mu}^\nu [L(\nu)]. \quad (16.3)$$

Nehmen wir Charaktere in (16.3), so folgt

$$\text{ch } L(\lambda) \cdot \text{ch } L(\mu) = \sum_{\nu \in P_+} N_{\lambda\mu}^\nu \text{ch } L(\nu). \quad (16.4)$$

Die Koeffizienten  $N_{\lambda\mu}^\nu$  lassen sich dann nach dem obigen Algorithmus bestimmen. Die nächste Proposition gibt eine explizite Formel für  $N_{\lambda\mu}^\nu$ .

**Proposition 16.2 (Steinberg)** Für  $\lambda, \mu, \nu \in P_+$  gilt

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{w, w' \in W} \varepsilon(w w') \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - \nu - 2\rho).$$

*Beweis.* Wir betrachten (16.4), schreiben  $\text{ch } L(\lambda)$  nach der Formel von Kostant (Proposition 15.7),  $\text{ch } L(\mu)$  und  $\text{ch } L(\nu)$  nach der Weylschen Charakterformel und multiplizieren mit dem Nenner.

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\lambda' \in P} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) - (\lambda' + \rho)) e^{\lambda'} \right) \left( \sum_{w' \in W} \varepsilon(w') e^{w'(\mu + \rho)} \right) \\ &= \sum_{\nu \in P_+} N_{\lambda\mu}^\nu \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\nu + \rho)}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Die Zahl  $N_{\lambda\mu}^\nu$  ist nach Korollar 13.4 der Koeffizient von  $e^{\nu + \rho}$  auf der rechten Seite von (16.5). Aus  $e^{\lambda'} e^{w'(\mu + \rho)} = e^{\nu + \rho}$  erhalten wir  $\lambda' = -w'(\mu + \rho) + \nu + \rho$  und somit

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{w, w' \in W} \varepsilon(w w') \mathcal{P}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - \nu - 2\rho).$$

□

**Beispiel** Steinbergs Formel für die Multiplizitäten  $N_{\lambda\mu}^\nu$  ist für grosse Weylgruppen impraktikabel. Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  liefert sie die Clebsch-Gordan-Formel: mit  $\Phi_+ = \{\alpha\}$ ,  $\varpi := \varpi_\alpha = \frac{\alpha}{2} = \rho$  haben wir für die Partitionsfunktion

$$\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma} \implies \mathcal{P}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $\lambda = p\varpi$ ,  $\mu = q\varpi$ ,  $\nu = r\varpi$  mit  $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  und  $p \geq q$  erhalten wir nach Steinbergs Formel

$$\begin{aligned} N_{\lambda\mu}^\nu &= \mathcal{P}(p\varpi + \varpi + q\varpi + \varpi - r\varpi - 2\varpi) \\ &\quad - \mathcal{P}(p\varpi + \varpi - q\varpi - \varpi - r\varpi - 2\varpi) \\ &\quad - \mathcal{P}(-p\varpi - \varpi + q\varpi + \varpi - r\varpi - 2\varpi) \\ &\quad + \mathcal{P}(-p\varpi - \varpi - q\varpi - \varpi - r\varpi - 2\varpi) \\ &= \mathcal{P}((p+q-r)\varpi) - \mathcal{P}((p-q-r-2)\varpi) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } 2 \nmid (p+q+r) \text{ oder } r > p+q, \\ \mathcal{P}(s\alpha) - \mathcal{P}((s-q-1)\alpha) & \text{falls } r = p+q-2s \text{ mit } s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{cases} \\ &= 1 = \begin{cases} 1 & \text{falls } s > q, \\ 0 & \text{falls } s \leq q. \end{cases} \end{aligned}$$

Für  $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gilt also

$$L(p\varpi) \otimes L(q\varpi) \cong \bigoplus_{\substack{r=|p-q| \\ r \equiv p+q \pmod{2}}}^{p+q} L(r\varpi).$$

Die nächste Formel, die schon viele Leute entdeckt haben und noch entdecken werden, hat wohl R. Brauer zuerst gefunden. Sie eignet sich besonders gut zur Bestimmung der Multiplizitäten in Tensorprodukten, wenn die eine Darstellung nur wenige Gewichte hat, deren Multiplizitäten explizit bekannt sind. Wir definieren

$$\tilde{\text{ch}} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})} \quad \text{für } \lambda \in P.$$

Für  $\lambda \in P_+$  ist  $\tilde{\text{ch}} L(\lambda) = \text{ch } L(\lambda)$ . Allgemein gilt

$$\tilde{\text{ch}} L(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon(w) \text{ch } L(w \cdot \lambda) & \text{falls } W \cdot \lambda \cap \overline{C} = \{w \cdot \lambda\}, \\ 0 & \text{sonst, d. h. falls } W \cdot \lambda \cap \overline{C} = \emptyset. \end{cases}$$

**Satz 16.3 (R. Brauer)** *Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathfrak{g}$ -Modul mit Charakter  $\text{ch } V = \sum_{\mu \in P} m_V(\mu) e^\mu$ . Weiter sei  $\lambda \in P_+$ . Dann gilt*

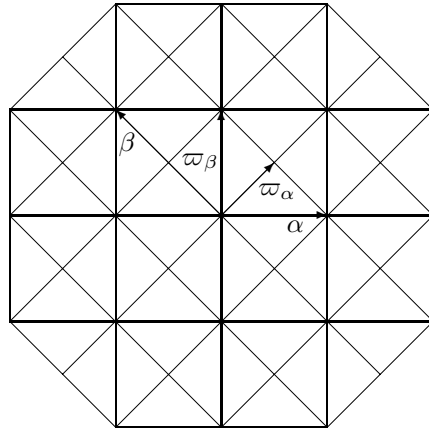
$$\text{ch } L(\lambda) \cdot \text{ch } V = \sum_{\mu \in P} m_V(\mu) \tilde{\text{ch}} L(\lambda + \mu).$$

*Beweis.* Wir schreiben  $\delta = \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$  für den Nenner in der Charakterformel.

$$\begin{aligned} \text{ch } L(\lambda) \cdot \text{ch } V &= \left( \frac{1}{\delta} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \rho)} \right) \left( \sum_{\mu \in P} m_V(\mu) e^\mu \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \sum_{\mu \in P} e^{w(\lambda + \rho)} m_V(w\mu) e^{w\mu} \\ &= \sum_{\mu \in P} m_V(\mu) \frac{1}{\delta} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \mu + \rho)} = \sum_{\mu \in P} m_V(\mu) \tilde{\text{ch}} L(\lambda + \mu) \end{aligned}$$

□

**Beispiel**  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$  (Typ  $B_2$ )



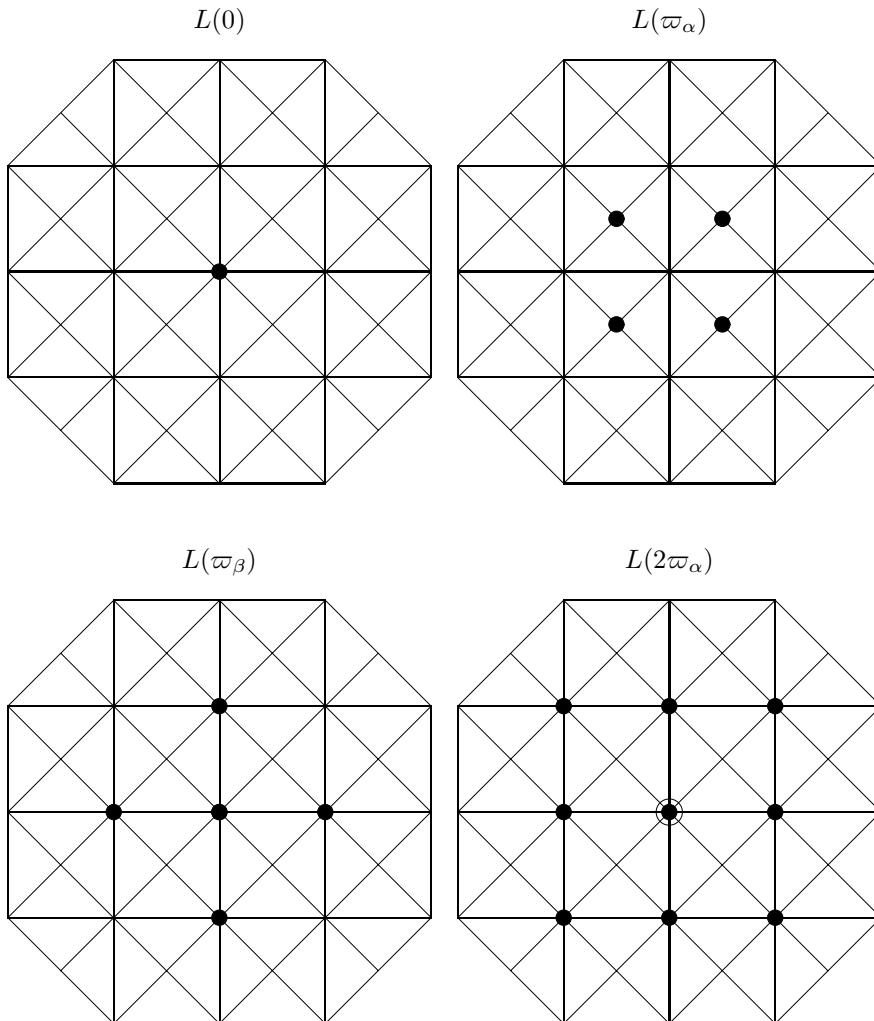
Nach der Dimensionsformel gilt

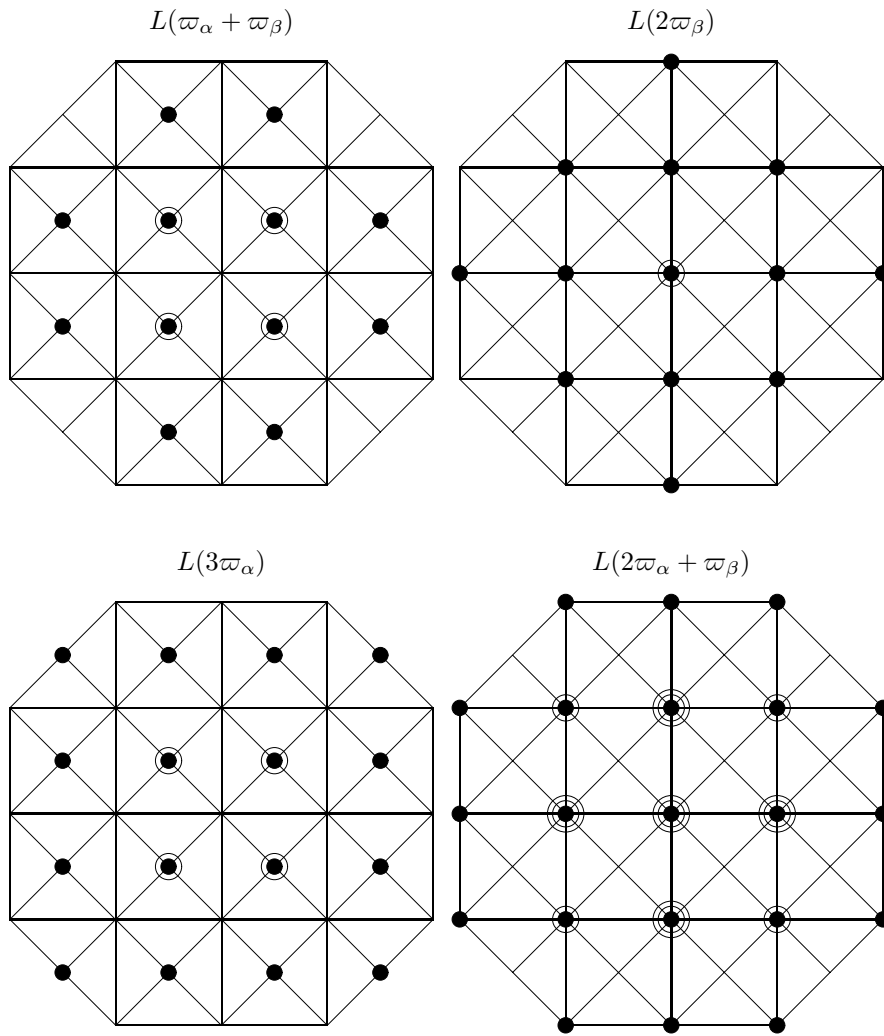
$$\dim L(n_\alpha \varpi_\alpha + n_\beta \varpi_\beta) = \frac{1}{6} (n_\alpha + 1)(n_\beta + 1)(n_\alpha + n_\beta + 2)(n_\alpha + 2n_\beta + 3).$$

$$\begin{array}{ll} \dim L(0) = 1 & \dim L(\varpi_\alpha) = 4 \\ \dim L(\varpi_\beta) = 5 & \dim L(2\varpi_\alpha) = 10 \\ \dim L(\varpi_\alpha + \varpi_\beta) = 16 & \dim L(2\varpi_\beta) = 14 \\ \dim L(3\varpi_\alpha) = 20 & \dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta) = 35 \end{array}$$

Als Darstellung von  $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$  ist  $L(\varpi_\beta)$  die Standarddarstellung, und  $L(\varpi_\alpha)$  ist die Spindarstellung. Als Darstellung von  $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$  ist  $L(\varpi_\alpha)$  die Standarddarstellung. Die Darstellung  $L(2\varpi_\alpha)$  ist die adjungierte Darstellung ( $2\varpi_\alpha = \theta$  ist die höchste Wurzel).

Wir gehen ganz naiv vor und beschreiben die  $\mathfrak{g}$ -Moduln durch Gewichtsdiagramme, indem wir die Multiplizitäten der Gewichte auf die evidente Art darstellen.





Alle gezeigten Gewichtsdiagramme ausser das letzte erhält man mittels der Symmetrie unter der Weylgruppe aus den entsprechenden höchsten Gewichten und der Dimension und der Tatsache, dass die Diagramme „gesättigt“ sind: nach der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  können die Multiplizitäten (in der Nebenklasse (modulo dem Wurzelgitter) des höchsten Gewichts im Gewichtsgitter) nach „Innen“ nicht abnehmen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Gewichtsdiagramm von  $L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)$  zu erhalten. Zum Beispiel nach der Multiplizitätsformel von Racah erhält man aus



$\dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)_{2\varpi_\alpha + \varpi_\beta} = 1$  nacheinander

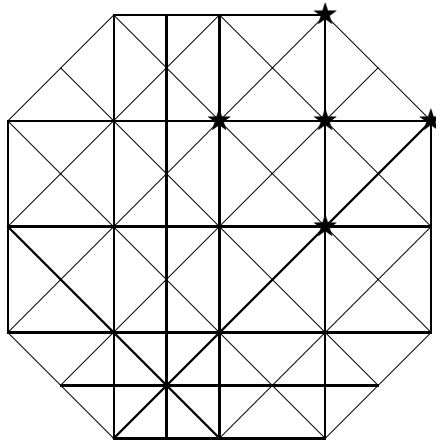
$$\begin{aligned} \dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)_{2\varpi_\beta} &= 1, \\ \dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)_{2\varpi_\alpha} &= 2, \\ \dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)_{\varpi_\beta} &= 3, \\ \dim L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)_0 &= 3. \end{aligned}$$

Hier ist ein anderes Vorgehen. Nach der Formel von Brauer für  $V = L(\varpi_\beta)$  und  $\lambda = 2\varpi_\alpha$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{ch } L(2\varpi_\alpha) \cdot \text{ch } L(\varpi_\beta) &= \text{ch } L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta) + \text{ch } L(2\varpi_\alpha) + \text{ch } L(\varpi_\beta) \\ &\quad + \underbrace{\tilde{\text{ch}} L(2\varpi_\alpha - \varpi_\beta)}_{=0} + \underbrace{\tilde{\text{ch}} L(4\varpi_\alpha - \varpi_\beta)}_{=0}, \end{aligned}$$

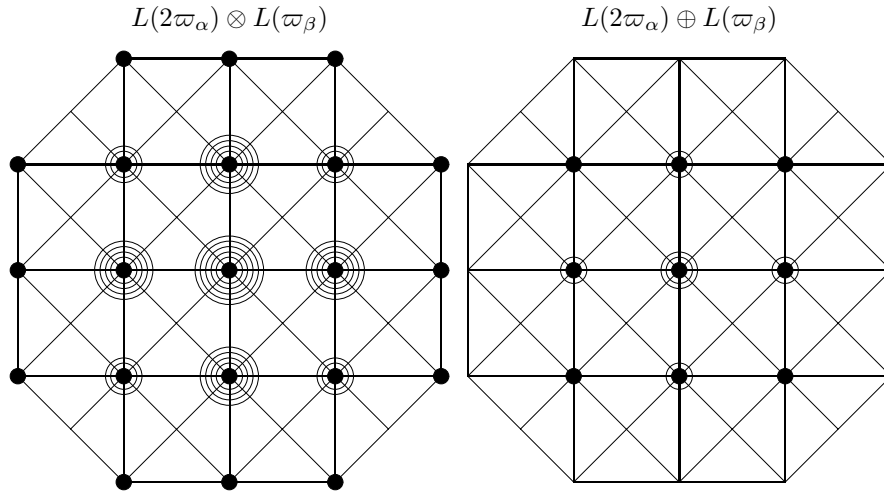
also

$$L(2\varpi_\alpha) \otimes L(\varpi_\beta) \cong L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta) \oplus L(2\varpi_\alpha) \oplus L(\varpi_\beta).$$



Um das Gewichtsdiagramm von  $L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)$  zu erhalten, müssen wir die Multiplizitäten der Gewichte in  $L(2\varpi_\alpha) \oplus L(\varpi_\beta)$  von denjenigen in  $L(2\varpi_\alpha) \otimes L(\varpi_\beta)$  subtrahieren. Das Gewichtsdiagramm von  $L(2\varpi_\alpha) \otimes L(\varpi_\beta)$  erhalten wir so: sind  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10})$  die Gewichte von  $L(2\varpi_\alpha)$  (0 doppelt) und  $(\mu_1, \dots, \mu_5)$  die Gewichte

von  $L(\varpi_\beta)$ , so sind  $(\lambda_j + \mu_k)_{\substack{j=1,\dots,10 \\ k=1,\dots,5}}$  die Gewichte von  $L(2\varpi_\alpha) \otimes L(\varpi_\beta)$ .



ÜBUNG 16.1 Bestimme die Multiplizitäten in  $L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)$  via die Multiplizitäten im Tensorprodukt  $L(\varpi_\alpha) \otimes L(\varpi_\alpha + \varpi_\beta)$ .

Setzen wir zur Abkürzung  $s := [L(\varpi_\alpha)]$  und  $t := [L(\varpi_\beta)]$ , so gelten im Darstellungsring die folgenden Identitäten.

$$\begin{aligned} [L(0)] &= 1 \\ [L(\varpi_\alpha)] &= s \\ [L(\varpi_\beta)] &= t \\ [L(2\varpi_\alpha)] &= s^2 - t - 1 \\ [L(\varpi_\alpha + \varpi_\beta)] &= st - s \\ [L(2\varpi_\beta)] &= t^2 - s^2 + t \\ [L(3\varpi_\alpha)] &= s^3 - 2st - s \\ [L(2\varpi_\alpha + \varpi_\beta)] &= s^2t - s^2 - t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

Zum Beispiel

$$t^2 = (t^2 - s^2 + t) + (s^2 - t - 1) + 1$$

bedeutet

$$L(\varpi_\beta) \otimes L(\varpi_\beta) \cong L(2\varpi_\beta) \oplus L(2\varpi_\alpha) \oplus L(0). \quad (16.6)$$

Sind  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$  die Gewichte von  $V$  (aufgezählt mit ihren Vielfachheiten), so sind

$(\lambda_j + \lambda_k)_{1 \leq j < k \leq d}$  die Gewichte von  $\bigwedge^2 V$  und

$(\lambda_j + \lambda_k)_{1 \leq j \leq k \leq d}$  die Gewichte von  $\odot^2 V$ .

Man findet etwa

$$\odot^2 s = \wedge^2 t = s^2 - t - 1.$$

Natürlich kann man auch höhere äussere Potenzen, symmetrische Potenzen oder allgemeiner Tensoren vom Grad  $n$  mit bestimmtem Symmetrietyp betrachten.

Der duale  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$  ist gegeben durch

$$(Xf)(v) = -f(Xv). \quad (16.7)$$

Die Gewichte sind dann  $(-\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ . In unserem Beispiel ist dies nicht so interessant, weil hier  $V \cong V^*$  ist. Allgemein ist  $L(\lambda)^* \cong L(-w_o \lambda)$  für  $\lambda \in P_+$ . Dabei ist  $w_o$  das längste Element der Weylgruppe.

ÜBUNG 16.2 Zeige, dass durch die Formel (16.7) eine  $\mathfrak{g}$ -Modulstruktur auf  $V^*$  definiert wird.

## 17 Pfadmodell

Die Multiplizitätsformeln von Kostant, Racah, Steinberg und Brauer sind im folgenden Sinn nicht kombinatorisch: die Multiplizitäten werden nicht als Kardinalitäten von Mengen ausgedrückt, sondern als Summen mit positiven und negativen Termen. Für den Typ  $A_l$  waren mit der Theorie der Young-Tableaux schon lange rein kombinatorische Beschreibungen der Multiplizitäten bekannt. Littelmann hat eine vereinheitlichte Theorie für alle Typen gefunden. Sie liefert Mengen der Kardinalitäten  $\dim L(\lambda)_\mu$  für  $\lambda \in P_+$  und  $\mu \in P$  sowie  $N_{\lambda\mu}^\nu$  für  $\lambda, \mu, \nu \in P_+$ . Die Elemente dieser Mengen sind Pfade, die wir nun beschreiben.

Wir betrachten stückweise lineare (und somit insbesondere stetige) Pfade  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ , welche in 0 starten und zu einem ganzzahligen Gewicht führen.

$$\Pi := \frac{\left\{ \pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \begin{array}{l} \pi \text{ stückweise linear (endlich viele Stücke!)} \\ \pi(0) = 0, \pi(1) \in P \end{array} \right\}}{\text{Reparametrisierung}}$$

Für  $\pi \in \Pi$  sprechen wir von  $\pi$  und meinen zugleich einen Repräsentanten der Klasse  $\pi$  modulo Reparametrisierung. Zwei Pfade  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$  lassen sich zusammensetzen. Wir schreiben  $\pi_1 * \pi_2$  (zuerst  $\pi_1$ , dann  $\pi_2$ ) für den Pfad

$$(\pi_1 * \pi_2)(t) := \begin{cases} \pi_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \pi_1(1) + \pi_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Operation  $*$  ist assoziativ, weil wir Pfade modulo Reparametrisierung betrachten.

Der zu  $\pi$  duale Pfad  $\pi^*$  ist

$$\pi^*(t) := \pi(1-t) - \pi(1).$$

Ist  $\lambda \in P$  ein ganzzahliges Gewicht, so bezeichnen wir mit  $\lambda \in \Pi$  auch den Pfad  $t \mapsto t\lambda$ . Insbesondere ist damit  $0 \in \Pi$  der konstante Pfad und  $\lambda^* = -\lambda$ .

Für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Sigma$  werden Endomorphismen  $e_\alpha$  und  $f_\alpha$  der freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}\Pi = \bigoplus_{\pi \in \Pi} \mathbb{Z} \cdot \pi$  definiert. Für jeden Basisvektor  $\pi \in \Pi$  ist  $e_\alpha \pi$  entweder wieder ein Basisvektor, also  $e_\alpha \pi \in \Pi \subseteq \mathbb{Z}\Pi$ , oder  $e_\alpha \pi = 0 \in \mathbb{Z}\Pi$  (nicht zu verwechseln<sup>3</sup> mit dem konstanten Pfad  $0 \in \Pi$ ). Analoges gilt für  $f_\alpha$ .

### Definition der Wurzeloperatoren $e_\alpha$ und $f_\alpha$

Für  $\alpha \in \Sigma$  und  $\pi \in \Pi$  setzen wir

$$\begin{aligned} h_\alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle \end{aligned}$$

(was natürlich von der Parametrisierung abhängt). Das Minimum

$$m_\alpha := \min_{t \in [0, 1]} h_\alpha(t) \leq 0$$

ist wohldefiniert.

Falls  $m_\alpha \leq -1$ , definieren wir  $e_\alpha \pi \in \Pi$  wie folgt:

- fixiere  $t_1 \in [0, 1]$  minimal mit  $h_\alpha(t_1) = m_\alpha$ ,
- fixiere  $t_0 \in [0, t_1]$  maximal mit  $h_\alpha(t) \geq m_\alpha + 1$  für  $t \in [0, t_0]$ ,
- wähle  $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r = t_1$  so, dass entweder
  - (1)  $h_\alpha(s_{i-1}) = h_\alpha(s_i)$  und  $h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$  für  $t \in [s_{i-1}, s_i]$  oder
  - (2)  $h_\alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$  ist strikt abnehmend und  $h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$  für  $t \in [0, s_{i-1}]$ .

Wir setzen noch  $s_{-1} := 0$  und  $s_{r+1} := 1$ . Für  $i = 0, \dots, r+1$  definieren wir den Pfad  $\pi_i$  als „Einschränkung“ von  $\pi$  auf  $[s_{i-1}, s_i]$ , genauer

$$\pi_i(t) := \pi(s_{i-1} + t(s_i - s_{i-1})) - \pi(s_{i-1}).$$

Es gilt dann also  $\pi = \pi_0 * \pi_1 * \dots * \pi_{r+1}$ . Wir setzen

$$e_\alpha \pi := \pi_0 * \eta_1 * \eta_2 * \dots * \eta_r * \pi_{r+1},$$

---

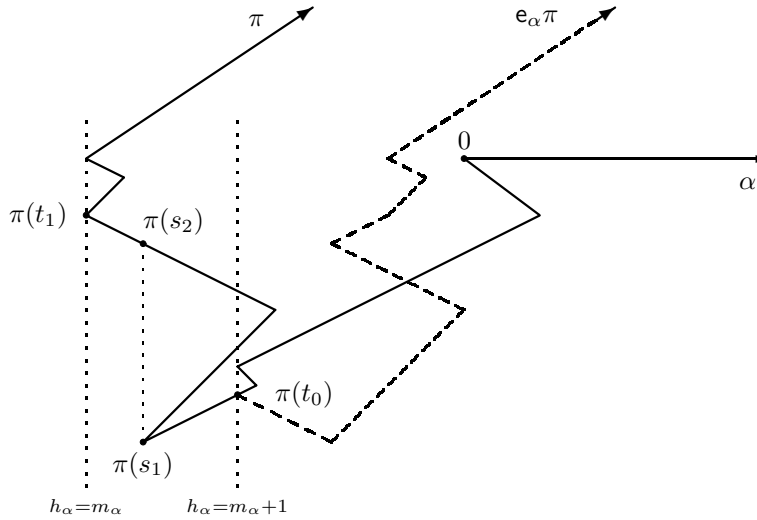
<sup>3</sup>Dazu besteht keine Gefahr, denn es gibt keinen Pfad  $\pi$  mit  $e_\alpha \pi = 0 \in \Pi$ .

wobei

$$\eta_i(t) := \begin{cases} \pi_i(t) & \text{falls sich } h_\alpha \text{ auf } [s_{i-1}, s_i] \text{ gemäss (1) verhält,} \\ s_\alpha(\pi_i(t)) & \text{falls sich } h_\alpha \text{ auf } [s_{i-1}, s_i] \text{ gemäss (2) verhält.} \end{cases}$$

Falls  $m_\alpha > -1$ , so ist  $e_\alpha \pi := 0 \in \mathbb{Z}\Pi$ .

**Beispiel** Wir nehmen an, der Pfad in der Figur werde monoton durchlaufen.



Der Endomorphismus  $f_\alpha \in \text{End } \mathbb{Z}\Pi$  wird durch

$$f_\alpha \pi := \begin{cases} (e_\alpha \pi^*)^* & \text{falls } e_\alpha \pi^* \neq 0, \\ 0 & \text{falls } e_\alpha \pi^* = 0. \end{cases}$$

definiert. Es folgt eine direkte Beschreibung.

Falls  $h_\alpha(1) - m_\alpha \geq 1$ , lässt sich  $f_\alpha \pi \in \Pi$  wie folgt beschreiben:

- fixiere  $t_0 \in [0, 1]$  maximal mit  $h_\alpha(t_0) = m_\alpha$ ,
- fixiere  $t_1 \in [t_0, 1]$  minimal mit  $h_\alpha(t) \geq m_\alpha + 1$  für  $t \in [t_1, 1]$ ,
- wähle  $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r = t_1$  so, dass entweder
  - (1)  $h_\alpha(s_i) = h_\alpha(s_{i-1})$  und  $h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$  für  $t \in [s_{i-1}, s_i]$  oder
  - (2)  $h_\alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$  ist strikt zunehmend und  $h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_i)$  für  $t \in [s_i, 1]$ .

Wir setzen noch  $s_{-1} := 0$  und  $s_{r+1} := 1$ . Für  $i = 0, \dots, r+1$  definieren wir wie oben den Pfad  $\pi_i$  durch

$$\pi_i(t) := \pi(s_{i-1} + t(s_i - s_{i-1})) - \pi(s_{i-1}).$$

Dann ist

$$f_\alpha \pi = \pi_0 * \eta_1 * \eta_2 * \dots * \eta_r * \pi_{r+1},$$

wobei

$$\eta_i(t) := \begin{cases} \pi_i(t) & \text{falls sich } h_\alpha \text{ auf } [s_{i-1}, s_i] \text{ gemäss (1) verhält,} \\ s_\alpha(\pi_i(t)) & \text{falls sich } h_\alpha \text{ auf } [s_{i-1}, s_i] \text{ gemäss (2) verhält.} \end{cases}$$

Falls  $h_\alpha(1) - m_\alpha < 1$ , so ist  $f_\alpha \pi = 0 \in \mathbb{Z}\Pi$ .

**Lemma 17.1** *Es seien  $\alpha \in \Sigma$  eine einfache Wurzel und  $\pi \in \Pi$  ein Pfad. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

- a) Falls  $e_\alpha \pi \neq 0$ , dann gilt  $e_\alpha \pi(1) = \pi(1) + \alpha$ .  
Falls  $f_\alpha \pi \neq 0$ , dann gilt  $f_\alpha \pi(1) = \pi(1) - \alpha$ .
- b) Falls  $e_\alpha \pi \neq 0$ , dann gilt  $f_\alpha e_\alpha \pi = \pi$ .  
Falls  $f_\alpha \pi \neq 0$ , dann gilt  $e_\alpha f_\alpha \pi = \pi$ .
- c) Es seien  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  maximal mit  $f_\alpha^n \pi \neq 0$  und  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  maximal mit  $e_\alpha^m \pi \neq 0$ .  
Dann gilt  $\langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle = n - m$ .

Wir setzen  $\mathcal{A} := \langle e_\alpha, f_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \rangle \leq \text{End } \mathbb{Z}\Pi$ , der Unterring der Endomorphismen von  $\mathbb{Z}\Pi$ , welcher von den Wurzeloperatoren  $e_\alpha$  und  $f_\alpha$  für  $\alpha \in \Sigma$  erzeugt wird.

Die Menge der dominanten Pfade ist

$$\Pi_+ := \{ \pi \in \Pi \mid \pi([0, 1]) \subseteq \overline{C} \}.$$

Für  $\pi \in \Pi_+$  und  $\alpha \in \Sigma$  gilt  $e_\alpha \pi = 0$ . Andererseits ist aber die Menge der Pfade, welche von allen  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  annihiliert wird, die Menge

$$\{ \pi \in \Pi \mid \rho + \pi([0, 1]) \subseteq C \} \supsetneq \Pi_+.$$

Für einen dominanten Pfad  $\pi \in \Pi_+$  definieren wir den  $\mathcal{A}$ -Modul

$$\mathbf{L}(\pi) := \mathcal{A}\pi.$$

Die Menge der Pfade  $\mathbf{B}(\pi) := \mathbf{L}(\pi) \cap \Pi$  ist dann eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbf{L}(\pi)$ . Es gilt  $\mathbf{L}(\pi) \cap \Pi_+ = \{\pi\}$ , und  $\pi$  ist der einzige Pfad in  $\mathbf{B}(\pi)$ , für welchen  $e_\alpha \pi = 0$  für alle  $\alpha \in \Sigma$  gilt. Die Menge  $\mathbf{B}(\pi)$  ist auch die Menge der Pfade, die durch sukzessives Anwenden der Wurzeloperatoren  $(f_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  auf  $\pi$  entstehen. Zum dominanten

ganzzahligen Gewicht  $\lambda := \pi(1) \in P_+$  haben wir den Pfad  $\lambda \in \Pi_+$  definiert. Die  $\mathcal{A}$ -Moduln  $L(\pi)$  und  $L(\lambda)$  sind dann isomorph unter  $\pi \mapsto \lambda$ .

Wir definieren den Charakter von  $L(\pi)$  durch

$$\text{ch } L(\pi) := \sum_{\eta \in \mathcal{B}(\pi)} e^{\eta(1)}.$$

Es gilt dann

$$\text{ch } L(\pi) = \text{ch } L(\pi(1)).$$

Damit haben wir bereits eine Menge der Kardinalität  $\dim L(\lambda)_\mu$  gefunden, nämlich

$$\{\eta \in \mathcal{B}(\lambda) \mid \eta(1) = \mu\}.$$

Wir definieren einen gerichteten, gefärbten Graphen  $\mathcal{G}$ :

- Die Ecken von  $\mathcal{G}$  sind die Elemente von  $\Pi$ .
- Es gibt eine Kante  $\pi \xrightarrow{\alpha} f_\alpha \pi$  der Farbe  $\alpha \in \Sigma$  für alle Pfade  $\pi \in \Pi$  mit  $f_\alpha \pi \neq 0$ .

Für  $\pi \in \Pi_+$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{G}(\pi)$  die Zusammenhangskomponente von  $\pi$  in  $\mathcal{G}$ . Die Menge der Ecken in  $\mathcal{G}(\pi)$  ist dann  $\mathcal{B}(\pi)$ .

Der Graph  $\mathcal{G}(\pi)$  stimmt mit dem Kristallgraphen des  $\mathfrak{g}$ -Moduls  $L(\pi(1))$  überein, welcher von Kashiwara via die Theorie der Quantengruppen definiert wurde. (Mit „übereinstimmen“ meinen wir natürlich „isomorph sein“.) Der disjunkten Vereinigung von Kristallgraphen entspricht die direkte Summe von  $\mathfrak{g}$ -Moduln. Die Kristallgraphen von  $L(\lambda)$  und  $L(\mu)$  ( $\lambda, \mu \in P_+$ ) bestimmen in einfacher Weise den Kristallgraphen des Tensorproduktes  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ .

Kristallgraph von  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ :

- Ecken:  $(\eta, \pi) \in \mathcal{G}(\lambda) \times \mathcal{G}(\mu)$ .
- Kanten: 
$$\begin{cases} (\eta, \pi) \xrightarrow{\alpha} (f_\alpha \eta, \pi) & \text{falls } e_\alpha^k \pi \neq 0 \implies f_\alpha^{k+1} \eta \neq 0, \\ (\eta, \pi) \xrightarrow{\alpha} (\eta, f_\alpha \pi) & \text{falls } f_\alpha \pi \neq 0 \text{ und } f_\alpha^k \eta \neq 0 \implies e_\alpha^k \pi \neq 0. \end{cases}$$

Damit hat man eine Menge der Kardinalität  $N_{\lambda\mu}^\nu$ , nämlich die Anzahl Komponenten des Kristallgraphen von  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ , welche mit dem Kristallgraphen von  $L(\nu)$  übereinstimmen.

**Beispiel** Für  $\mathfrak{g}$  vom Typ  $B_2$  gilt (16.6)

$$L(\varpi_\beta) \otimes L(\varpi_\beta) \cong L(2\varpi_\beta) \oplus L(2\varpi_\alpha) \oplus L(0).$$

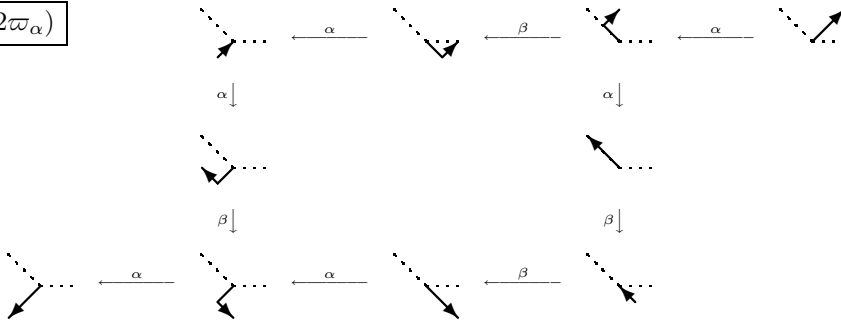
Dies wollen wir jetzt mit Kristallgraphen verifizieren. Der Kristallgraph  $\mathcal{G}(0)$  des trivialen  $\mathfrak{g}$ -Moduls  $\mathbb{C}$  hat nur eine Ecke (etwa der konstante Pfad  $0 \in \Pi$ ) und keine Kanten.

Die gestrichelten Linien deuten die einfachen Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  an.

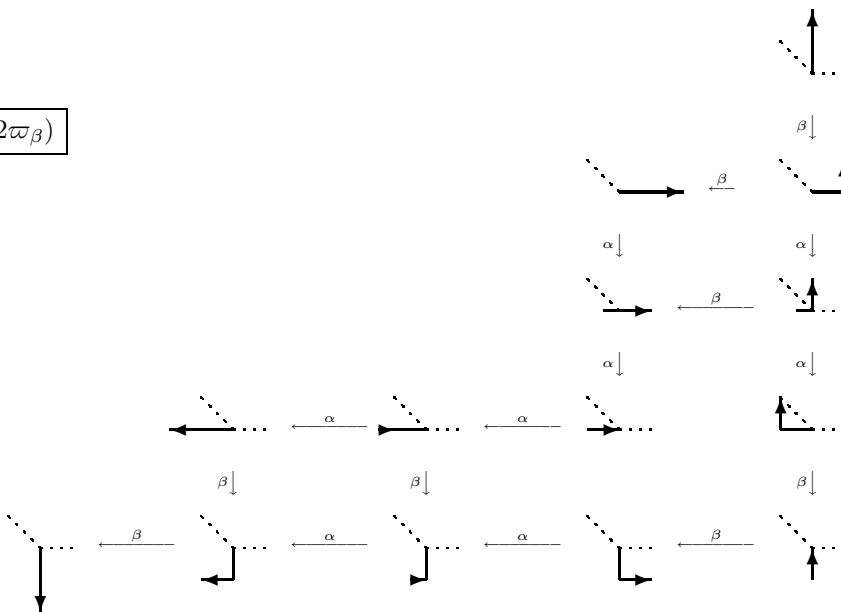
$\mathcal{G}(\varpi_\beta)$



$\mathcal{G}(2\varpi_\alpha)$

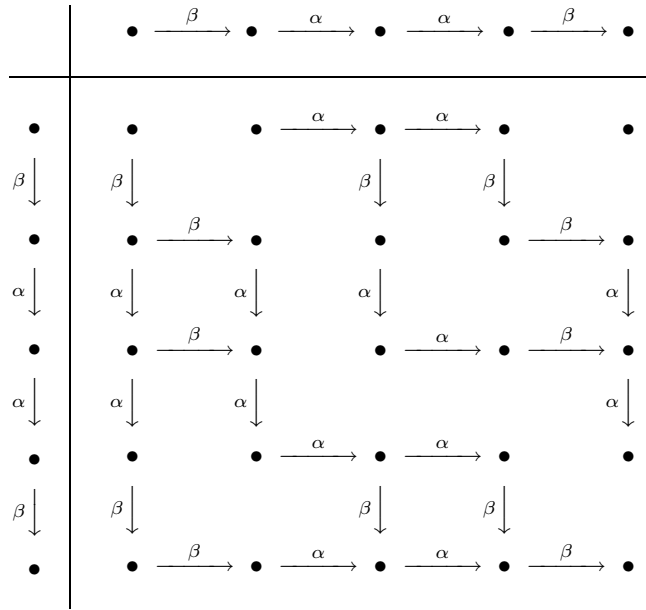


$\mathcal{G}(2\varpi_\beta)$





Nun bilden wir den Kristallgraphen von  $L(\varpi_\beta) \otimes L(\varpi_\beta)$ .



Als Zusammenhangskomponenten finden wir  $\mathcal{G}(2\varpi_\beta)$ ,  $\mathcal{G}(2\varpi_\alpha)$  und  $\mathcal{G}(0)$ .

Dies lässt sich auch auf die folgende Art algebraisch beschreiben: für  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_+$  betrachten wir die Untergruppe  $L(\pi_1) * L(\pi_2)$  von  $\mathbb{Z}\Pi$ , welche von den Pfaden  $\eta_1 * \eta_2$  mit  $\eta_i \in \mathcal{B}(\pi_i)$  ( $i = 1, 2$ ) aufgespannt wird. Dann ist  $L(\pi_1) * L(\pi_2)$  ein  $\mathcal{A}$ -Modul mit  $\mathbb{Z}$ -Basis  $(L(\pi_1) * L(\pi_2)) \cap \Pi = \mathcal{B}(\pi_1) * \mathcal{B}(\pi_2)$ .

**Proposition 17.2** Für  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_+$  gilt

$$L(\pi_1) * L(\pi_2) = \bigoplus_{\substack{\eta_1 \in \mathcal{B}(\pi_1) \\ \eta_2 \in \mathcal{B}(\pi_2) \\ \eta_1 * \eta_2 \in \Pi_+}} L(\eta_1 * \eta_2).$$

In der obigen direkten Summe ist stets  $\eta_1 = \pi_1$ .

Mit der evidenten Notation ist

$$\text{ch}(L(\pi_1) * L(\pi_2)) = \text{ch} L(\pi_1) \cdot \text{ch} L(\pi_2). \quad (17.1)$$

Andrerseits ist die rechte Seite von (17.1) der Charakter von  $L(\pi_1(1)) \otimes L(\pi_2(1))$ . Es gilt also die folgende verallgemeinerte Littlewood-Richardson-Regel.

**Satz 17.3 (Verallgemeinerte Littlewood-Richardson-Regel)** Für  $\lambda, \mu \in P_+$  gilt

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) \cong \bigoplus_{\substack{\eta \in \mathbf{B}(\mu) \\ \lambda * \eta \in \Pi_+}} L(\lambda + \eta(1)).$$

Mit anderen Worten,  $N_{\lambda\mu}^\nu$  ist die Kardinalität der Menge

$$\{\pi \in \Pi_+ \mid \pi = \lambda * \eta \text{ mit } \eta \in \mathbf{B}(\mu) \text{ und } \eta(1) = \nu - \lambda\}.$$

Littelmans Theorie gibt auch einen kombinatorischen Beweis der Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan-Vermutung.

**Satz 17.4 (PRV-Vermutung)** Sind  $\lambda, \mu \in P_+$  dominante ganzzahlige Gewichte und  $w, w' \in W$  mit  $\nu = w\lambda + w'\mu \in P_+$ , so gilt  $N_{\lambda\mu}^\nu > 0$ .



# LITERATUR

- [B1] N. Bourbaki: Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3. Translated from the French. Reprint of the 1975 edition. Elements of Mathematics. Berlin-New York: Springer 1989
- [B2] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV–VI. Actualités Scientifiques et Industrielles 1337. Paris: Hermann 1968
- [B3] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie. Chapitres VII–VIII. Paris: Diffusion C.C.L.S. 1975
- [B4] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IX. Paris: Masson 1982
- [Bo] A. Borel: Linear algebraic groups. Second edition. GTM 126. New York: Springer 1991
- [Br] K. S. Brown: Buildings. New York, Berlin: Springer 1989
- [BtD] T. Bröcker, T. tom Dieck: Representations of compact Lie groups. GTM 98. New York, Berlin: Springer 1985
- [Di] J. Dixmier: Enveloping algebras. Revised reprint of the 1977 translation. Graduate Studies in Mathematics 11. Providence, RI: American Mathematical Society 1996
- [FH] W. Fulton, J. Harris: Representation theory. A first course. GTM 129. Readings in Mathematics. New York: Springer 1991
- [FdV] H. Freudenthal, H. de Vries: Linear Lie groups. Pure and Applied Mathematics 35. New York-London: Academic Press 1969
- [Fu] W. Fulton: Young tableaux. With applications to representation theory and geometry. London Mathematical Society Student Texts 35. Cambridge: Cambridge University Press 1997
- [GOV] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg: Structure of Lie groups and Lie algebras. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 41. Berlin: Springer 1994
- [HHSV] M. Hazewinkel, W. Hesselink, D. Siersma, F. D. Veldkamp: The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the A-D-E problem). Nieuw Arch. Wisk. (3) **25** (1977), 257–307
- [Hi] H. Hiller: Geometry of Coxeter groups. Research Notes in Mathematics 54. Boston (MA), London: Pitman 1982
- [Hu1] J. E. Humphreys: Introduction to Lie algebras and representation theory. Second printing, revised. GTM 9. New York, Berlin: Springer 1978
- [Hu2] J. E. Humphreys: Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29. Cambridge: Cambridge University Press 1990
- [Jac] N. Jacobson: Lie algebras. Republication of the 1962 original. New York: Dover Publications 1979
- [Ja1] J. C. Jantzen: Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 3. Berlin-New York: Springer 1983

- [Ja2] J. C. Jantzen: Representations of algebraic groups. Pure and Applied Mathematics 131. Boston (Mass.): Academic Press 1987
- [Jo] A. Joseph: Quantum groups and their primitive ideals. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 29. Berlin: Springer 1995
- [Li] P. Littelmann: Paths and root operators in representation theory. Ann. of Math. (2) **142** (1995), 499–525
- [Sa] H. Samelson: Notes on Lie algebras. Second edition. Universitext. New York: Springer 1990
- [Se1] J.-P. Serre: Lie algebras and Lie groups. 1964 lectures given at Harvard University. Second edition. LNM 1500. Berlin: Springer 1992
- [Se2] J.-P. Serre: Algèbres de Lie semi-simples complexes. New York-Amsterdam: Benjamin 1966
- [Ti] J. Tits: Liesche Gruppen und Algebren. With the collaboration of Manfred Krämer and Hans Scheerer. Hochschultext. Berlin-New York: Springer 1983
- [We] H. Weyl: The classical groups. Their invariants and representations. Fifteenth printing. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. Princeton (NJ): Princeton University Press 1997