Ramsey-type results on planar geometric objects

Author(s):
Solymosi, József

Publication Date:
2001

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004142165

DISS. ETH No. 14092, 2001

Ramsey-type results on planar geometric objects

A dissertation submitted to the
Swiss Federal Institute of Technology, ETH Zürich
for the degree of Doctor of Technical Sciences

presented by
József Solymosi
M.Sc.Applied Math. Eötvös Loránd Univ.Budapest
born in 20. November 1959, citizen of Hungary

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Emo Welzl, ETHZ, examiner
Prof. Dr. János Pach, Courant Institute NYU, co-examiner
Prof. Dr. Günter Rote, FU Berlin, co-examiner

0.1 Abstract

In this thesis we focus on the problem of finding special subsets of sets of points and line segments in the plane.

A typical Ramsey-type result, in general, asserts the existence of a special substructure in a large structure. One of the first results in this field, for example, states that a 0-1 matrix of size $n \times n$ contains a submatrix of size $\log n \times \log n$ with only 0 or only 1 entries.

Usually the size of the special structure is much smaller than the whole structure. The Ackermann function occurs sometimes in those results. If the original set has some regularities, then a better, sometimes even linear, bound can be expected. Most of the results in this thesis are of this type, because of the structure of planar geometric objects. This is the case, for instance, for the intersection graph G_n of n line segments in the plane. While in a graph with n vertices, a complete or empty bipartite subgraph of size $\log n$ can be asserted in general, we will see that G_n always contains a complete or empty bipartite subgraph with size $n/330$.

We can not always use geometric arguments to find regular subsets, sometimes all what we know is that the intersection graph does not contain a specific graph as induced subgraph. This already implies that the intersection graph contains a relatively large homogeneous (complete or empty) subgraph. Here we can use tools from graph theory. In this thesis, beyond the geometric results, we will see an overview of results around the Erdős-Hajnal conjecture, which concerns the size of the largest homogenius subgraph.

0.2 Zusammenfassung

Die vorliegende Doktorarbeit befasst sich mit der Existenz spezieller Teilmengen von Punktmengen und Mengen von Linienstrecken der Ebene.

Typische Resultate der Ramsey-Theorie sind derart, dass sie die Existenz einer besonderen Teilstruktur in einer grossen Struktur bestätigen. So war eines der ersten Ergebnisse dieser Theorie die Erkenntnis, dass jede $n \times n$-dimensionale 0-1 Matrix eine $\log n \times \log n$ Untermatrix enthält, welche nur aus Nullen oder nur aus Einsen besteht.

Normalerweise ist die besondere Struktur sehr viel kleiner als die gesamte Menge. Die Ackermannfunktion taucht manchmal in diesen Resultaten auf. Falls für die Ausgangsmenge Irregularitäten bekannt sind, kann eine bessere, manchmal sogar lineare Schranke erwartet werden. Die meisten Resultate in dieser Arbeit sind dieser Art, dank der besonderen Struktur geometrischer Objekte in der Ebene. Beispielsweise können wir für den Schnittgraph G_n von n Strecken in der Ebene die Existenz eines vollständigen oder leeren bipartiten Teilgraphen der Grösse $n/330$ beweisen, dagegen enthält ein Graph mit n Eckpunkten nachweisbar nur einen vollständigen oder leeren bipartiten Teilgraphen der Grösse $\log n$.

Nicht immer ist ein geometrischer Ansatz sinnvoll, wenn wir reguläre Teilmengen finden wollen. Manchmal können wir nur die Nichtexistenz eines speziellen Graphen als induzierten Teilgraph des Schnittgraphen zeigen. Dies impliziert jedoch bereits, dass der Schnittgraph einen relativ grossen homogenen (vollständigen oder leeren) Teilgraphen enthält. An dieser Stelle können wir graphentheoretische Ansätze verwenden. Zusätzlich zu den geometrischen Resultaten geben wir in dieser Arbeit einen Überblick über Resultate der Erdős-Hajnal Behauptung, die sich auf die Grösse der grössten homogenen Subgraphen bezieht.