



Doctoral Thesis

## Worksheet boundaries, supersymmetry, and quantum geometry

**Author(s):**

Walcher, Johannes

**Publication Date:**

2001

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004184522> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 14225

# Worldsheet Boundaries, Supersymmetry, and Quantum Geometry

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH  
(ETH Zürich)

for the degree of  
Doctor of Natural Sciences

presented by  
Johannes Walcher, Dipl. Phys. ETH  
born October 3, 1973  
German citizen

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. J. Fröhlich, examiner  
Prof. Dr. W. Lerche, co-examiner  
Dr. Ch. Schweigert, co-examiner

2001

## Kurzfassung

Gegenstand der vorliegenden Abhandlung ist die Beziehung zwischen Randbedingungen in zwei-dimensionalen,  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetrischen und konformen Quantenfeldtheorien auf der einen Seite, und D-branes, die als ausgedehnte geometrische Objekte in nicht-perturbativer Stringtheorie auftreten, auf der anderen. Das Hauptforschungsinteresse gilt den Eigenschaften von D-branes in nicht-klassischen oder stark gekrümmten Hintergründen. Es werden in dieser Arbeit Methoden der konformen Feldtheorie auf Weltflächen mit Rändern entwickelt und zum Studium der Quantengeometrie von D-branes angewendet.

Das erste Resultat, das in dieser Arbeit vorgestellt wird, ist ein Beitrag zu dem Problem, Randbedingungen in rationalen konformen Feldtheorien zu definieren. Solche Theorien sind auf geschlossenen Riemannschen Flächen durch eine chirale Symmetriealgebra und eine modular invariante Toruszustandssumme gekennzeichnet. Das Problem, Randbedingungen zu definieren, hängt von beidem ab—Randbedingungen müssen einerseits nicht die gesamte Symmetrie der geschlossenen Theorie erhalten, und dürfen andererseits nur Felder einschliessen, die in der Zustandssumme vorkommen. Nun sind die meisten modularen Invarianten in rationalen konformen Feldtheorien vom simple-current Typ, und können unter Umständen eine erweiterte chirale Symmetrie aufweisen. Das Problem, das hier behandelt wird, ist, alle Randbedingungen zu bestimmen, die die nicht erweiterte chirale Algebra erhalten, für eine beliebige modulare Invariante vom simple-current Typ.

Der Hauptteil der Arbeit handelt von Feldtheorien, die zusätzlich zu konformer Invarianz  $\mathcal{N} = 2$  Supersymmetrie besitzen. Solche Theorien treten in der störungstheoretischen Definition auf der Weltfläche des Superstrings auf. Zusätzliche Einschränkungen sind notwendig, um Stabilität und ein Raumzeit-supersymmetrisches Spektrum zu erhalten. Für  $\sigma$ -Modelle ist das Kriterium, dass die Zielmannigfaltigkeit eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit ist. In einer abstrakten algebraischen Konstruktion können die notwendigen Projektionen ausgehend von einer beliebigen  $\mathcal{N} = 2$  rationalen konformen Feldtheorie ausgeführt werden.

Eine mikroskopische Beschreibung von D-branes erfordert das Einführen von Weltflächen mit Rändern, und die Bedingungen für Supersymmetrie müssen neu analysiert werden. Im Besonderen erklärt die vorliegende Arbeit, wie die Projektionen, die im abstrakten Rahmen der algebraischen konformen Feldtheorie auftreten, in systematischer Weise behandelt werden können, und wie die wichtigsten Eigenschaften von D-branes in diesem Zugang kodiert sind.

Die allgemeine Theorie wird anschliessend in einer Anzahl von Beispielen

len illustriert, nämlich dem zwei-dimensionalen Torus,  $\mathcal{N} = 2$  minimalen Modellen, Gepner-Modellen und  $\mathcal{N} = 2$  Coset-Modellen (Kazama-Suzuki-Modellen).

Gepner-Modelle sind ausgezeichnete Beispiele, in denen rationale konforme Feldtheorien im inneren Teil einer Stringkompaktifizierung verwendet werden. Sie werden aufgebaut auf Tensorprodukten von  $\mathcal{N} = 2$  minimalen Modellen. Das wichtigste neue technische Resultat zu Gepner-Modellen ist die Auflösung von simple-current-Fixpunkten, die in der Konstruktion von B-Typ Randbedingungen auftreten. In der physikalischen Interpretation führt dies zu einem interessanten neuen Mechanismus für die Erhöhung der Eichsymmetrie auf D-branes. Weiterhin wird in zwei Beispielen gezeigt, wie sich die Beziehung zwischen Gepner-Modellen und Calabi-Yau-Hyperflächen in gewichteten projektiven Räumen auf Randbedingungen und D-branes ausdehnen lässt.

$\mathcal{N} = 2$  Coset-Modelle, die die minimalen Modelle als Spezialfall enthalten, sind eine weitere Klasse von Beispielen von rationalen konformen Feldtheorien mit  $\mathcal{N} = 2$  Supersymmetrie. Eine Untermenge von superkonformen Randbedingungen in diesen Modellen können über die Cardy-Konstruktion definiert werden. Über ihre Schnitteigenschaften erhalten die Randzustände eine geometrische Interpretation in der Homologie der Auflösung einer zugeordneten Singularität. Ausserdem zeigt sich, dass die strukturelle Verwandtschaft zu Grassmannschen Mannigfaltigkeiten im offenen String bestehen bleibt.

## Abstract

The subject matter of the present dissertation is the relation between, on one side, boundary conditions in two-dimensional,  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetric, and conformal, quantum field theories, and D-branes, which are extended geometric objects appearing in non-perturbative string theory, on the other side. The primary research interest are the properties of D-branes in non-classical or strongly curved backgrounds. In this work, techniques of conformal field theory on worldsheets with boundaries are developed and applied to study the quantum geometry of D-branes.

The first result presented in this thesis is a contribution to the problem of defining boundary conditions in rational conformal field theories. These theories are specified, on closed Riemann surfaces, by a chiral symmetry algebra and a modular invariant torus partition function. The problem of defining boundary conditions depends on both—boundary conditions may, on the one hand, be allowed to break part of the bulk symmetry, and must, on the other hand, only involve bulk fields that are present in the bulk partition function. Now most modular invariants in rational conformal field theories are of simple-current type, and they may or may not exhibit an enlarged chiral symmetry. The problem which is treated here is to determine all boundary conditions that preserve the unextended chiral symmetry algebra, for an arbitrary modular invariant of simple-current type.

The main part of the thesis deals with field theories that in addition to conformal invariance exhibit  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetry. Such theories appear in the perturbative definition on the worldsheet of the superstring. Additional restrictions are needed to achieve stability and a space-time supersymmetric spectrum. For  $\sigma$ -models, the criterion is that the target be a Calabi-Yau manifold. In an abstract algebraic construction, the necessary projections can be performed starting from any  $\mathcal{N} = 2$  rational conformal field theory.

A microscopic description of D-branes requires the introduction of worldsheet boundaries, and the conditions for supersymmetry have to be reexamined. In particular, the present thesis explains how to deal in a systematic way with the projections that arise in the abstract setting of algebraic conformal field theory, and how the most important characteristics of D-branes are encoded in this approach.

The general theory is then illustrated in a number of examples, namely the two-dimensional torus,  $\mathcal{N} = 2$  minimal models, Gepner models, and  $\mathcal{N} = 2$  coset models (Kazama-Suzuki models).

Gepner models are examples in which rational conformal field theories are used for the internal part of a string compactification. They are built on tensor products of  $\mathcal{N} = 2$  minimal models. The main new technical

result on Gepner models is the resolution of simple-current fixed points that appear in the construction of B-type boundary conditions. In the physical interpretation, this leads to an interesting new mechanism for enhancement of gauge symmetry on D-branes. Furthermore, it is shown in two examples how the connection between Gepner models and Calabi-Yau hypersurfaces in weighted projective spaces can be extended to include boundary conditions and D-branes.

$\mathcal{N} = 2$  coset models, which contain minimal models as a special case, are another class of examples of rational conformal field theories with  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetry. A subset of superconformal boundary conditions in these models can be obtained by Cardy's construction. Through their intersection properties, the boundary states receive a geometric interpretation in terms of the homology of the resolution of an associated singularity. Also, the structural resemblance to Grassmannian spaces is found to extend to the open string.