Embedding problems in symplectic geometry

Author(s):
Schlenk, Felix

Publication Date:
2001

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004232481

Diss. ETH No. 14254

Embedding problems in symplectic geometry

A dissertation submitted to the
EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH
for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
FELIX SCHLENK
Dipl. Math. ETH Zürich
born on September 15, 1970
citizen of Zürich and Kilchberg

accepted on the recommendation of
Prof. Eduard Zehnder, examiner
Prof. Dietmar Salamon, co-examiner

Zürich 2001

Abstract

Fix a $2n$-dimensional symplectic manifold (M, ω) and an open subset U of standard symplectic space $\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0\right)$, where

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

The symplectic embedding problem associated with U and (M, ω) asks for the largest $\alpha > 0$ for which there exists a symplectic embedding of $\alpha U = \{\alpha z \mid z \in U\}$ into (M, ω). We choose U to be an open symplectic ellipsoid

$$E(r_1, \dots, r_n) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|^2}{r_i^2} < 1 \right\}$$

or a polydisc

$$P(r_1, \dots, r_n) = B^2(r_1) \times \cdots \times B^2(r_n).$$

Here, $B^{2n}(r)$ denotes the open ball of radius r. We may assume that $r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$. We first choose (M, ω) to be a ball.

Theorem 1 *Assume $r_n^2 \le 2\, r_1^2$. Then there does not exist a symplectic embedding of the ellipsoid $E(r_1, \dots, r_n)$ into the ball $B^{2n}(R)$ if $R < r_n$.*

This non-embedding result is sharp and therefore sheds some light on the power of Ekeland–Hofer capacities, which are used in its proof. Indeed, we have the following embedding result.

Theorem 2 *Assume $r_n^2 > 2\, r_1^2$. Then there exists a symplectic embedding of $E(r_1, \dots, r_1, r_n)$ into $B^{2n}(R)$ for all $\sqrt{r_n^2/2 + r_1^2} < R < r_n$.*

The basic ingredient in the proofs of all our embedding results is a refinement of a symplectic folding method first used by F. Lalonde and D. McDuff. In particular, Theorem 2 is proved by folding an ellipsoid once. It can be substantially improved by folding more often. We in particular show that a ball can be asymptotically filled with skinny ellipsoids. More generally, assume that (M, ω) is a

connected symplectic manifold of finite volume Vol $(M^{2n}, \omega) = \frac{1}{n!}\int_M \omega^n$. For $r > 1$ set

$$p_r(M, \omega) = \sup_\alpha \frac{\mathrm{Vol}\,(\alpha E(1, \dots, 1, r))}{\mathrm{Vol}\,(M, \omega)}$$

where the supremum is taken over all α for which $\alpha E^{2n}(1, \dots, 1, r)$ symplectically embeds into (M, ω).

Theorem 3 $\lim_{r\to\infty} p_r(M, \omega) = 1$.

An analogous result holds for polydiscs.

We finally use the symplectic folding method to answer a question about symplectic embeddings of balls into the standard symplectic cylinder

$$Z = B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2} \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0).$$

By Gromov's Nonsqueezing Theorem there is no symplectic embedding of $B^{2n}(r)$ into Z if $r > 1$. So assume $r \le 1$, and consider the symplectic invariant

$$c(r) = \inf_\varphi \sup_x \mathrm{area}\left(\varphi(B^{2n}(r)) \cap D_x\right)$$

where φ varies over all symplectic embeddings of $B^{2n}(r)$ into Z and where $D_x \subset Z$ denotes the 2-dimensional open disc $D_x = B^2(1) \times \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^{2n-2}$. Contrary to expectations we have

Theorem 4 $c(r) = 0$ *for all* $r \in\,]0, 1[$.

Zusammenfassung

Sei (M, ω) eine $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit, und sei U eine offene Teilmenge des symplektischen Raumes $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, wobei

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Das U und (M, ω) zugeordnete symplektische Einbettungsproblem fragt nach der grössten Zahl $\alpha > 0$ für welche die Menge $\alpha U = \{\alpha z \mid z \in U\}$ symplektisch in (M, ω) eingebettet werden kann. Wir wählen U als ein offenes symplektisches Ellipsoid

$$E(r_1, \dots, r_n) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|^2}{r_i^2} < 1 \right\}$$

oder als eine Polyscheibe

$$P(r_1, \dots, r_n) = B^2(r_1) \times \cdots \times B^2(r_n).$$

Hier bezeichnet $B^{2n}(r)$ den offenen Ball vom Radius r. Wir können annehmen, dass $r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass (M, ω) ein Ball ist.

Satz 1 *Sei $r_n^2 \le 2r_1^2$. Dann existiert keine symplektische Einbettung des Ellipsoids $E(r_1, \dots, r_n)$ in den Ball $B^{2n}(R)$ falls $R < r_n$.*

Dieser Nichteinbettungssatz ist scharf und zeugt daher von der Stärke der Ekeland–Hofer Kapazitäten, die in seinem Beweis verwendet werden. Es gilt nämlich der folgende Einbettungssatz.

Satz 2 *Sei $r_n^2 > 2r_1^2$. Dann existiert eine symplektische Einbettung des Ellipsoids $E(r_1, \dots, r_1, r_n)$ in $B^{2n}(R)$ für alle $\sqrt{r_n^2/2 + r_1^2} < R < r_n$.*

Die grundlegende Technik in den Beweisen aller unserer Einbettungssätze ist eine Verfeinerung einer symplektischen Faltungsmethode, die zuerst von F. Lalonde and D. McDuff verwendet wurde. Wir beweisen Satz 2 denn auch indem wir ein Ellipsoid einmal falten. Satz 2 kann durch mehrfaches Falten wesentlich

verbessert werden. Wir zeigen insbesondere, dass ein Ball asymptotisch mit dünnen Ellipsoiden gefüllt werden kann. Wir betrachten allgemeiner eine zusammenhängende $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) von endlichem Volumen $\operatorname{Vol}(M, \omega) = \frac{1}{n!} \int_M \omega^n$. Für $r > 1$ definieren wir

$$p_r(M, \omega) = \sup_\alpha \frac{\operatorname{Vol}(\alpha E(1, \dots, 1, r))}{\operatorname{Vol}(M, \omega)}$$

wobei das Supremum über all jene α genommen wird für die $\alpha E^{2n}(1, \dots, 1, r)$ symplektisch in (M, ω) eingebettet werden kann.

Satz 3 $\lim_{r \to \infty} p_r(M, \omega) = 1$.

Ein ähnlicher Satz gilt für Polyscheiben.

Wir verwenden die symplektische Faltungsmethode schliesslich, um eine Frage über symplektische Einbettungen von Bällen in den symplektischen Zylinder

$$Z = B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2} \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$$

zu beantworten. Aufgrund von Gromovs Nichteinbettungssatz existiert keine symplektische Einbettung von $B^{2n}(r)$ in Z falls $r > 1$. Wir nehmen daher $r \leq 1$ an und betrachten die symplektische Invariante

$$c(r) = \inf_\varphi \sup_x \operatorname{area}\left(\varphi(B^{2n}(r)) \cap D_x\right)$$

wobei φ über alle symplektischen Einbettungen von $B^{2n}(r)$ in Z läuft und $D_x \subset Z$ die 2-dimensionale offene Scheibe $D_x = B^2(1) \times \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^{2n-2}$, bezeichnet. Entgegen den Erwartungen gilt

Satz 4 $c(r) = 0$ *für alle* $r \in \,]0, 1[$.