

Diss. ETH No. 14242

Stochastic Taylor Expansions and Saddlepoint Approximations for Risk Management

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
MICHAEL STUDER
Dipl. Math. ETH
born April 19, 1972
citizen of Brig-Glis and Mund (VS)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. P. Embrechts, examiner
Prof. Dr. F. Delbaen, co-examiner
Prof. Dr. P. Glasserman, co-examiner

2001

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit enthält zwei Teile. Nach einer kurzen Übersicht über Ansätze und Methoden im Risiko-Management, betrachten wir Sattelpunktapproximationen und stochastische Taylor-Entwicklungen. Sattelpunktapproximationen umfassen eine relativ alte statistische Methode, die wichtige Alternativen zur Fourier-Inversion liefern kann. Vor allem Fragestellungen im Zusammenhang mit der Berechnung von Quantilen können oft zuverlässig und schnell beantwortet werden. Stochastische Taylor-Entwicklungen sind das stochastische Analogon zu Taylor-Entwicklungen aus dem Bereich der deterministischen Analysis und werden vor allem zu Simulationszwecken verwendet. Zuerst zitieren wir die wichtigsten Resultate über stochastische Taylor-Entwicklungen für Diffusionsprozesse in der Art und Weise, wie sie später verwendet werden und anschliessend entwickeln wir stochastische Taylor-Entwicklungen für multivariate Poisson-Prozesse. Diese zwei Entwicklungen werden schliesslich verknüpft.

Im zweiten Teil dieser Arbeit untersuchen wir die Anwendbarkeit dieser Approximationen auf Probleme im Zusammenhang mit Risiko-Management und vergleichen die Qualität der Approximationen, die stochastische Taylor-Entwicklungen und Sattelpunktapproximationen verwenden, mit der Qualität bekannter Approximationen. Die Anwendbarkeit wird für drei spezielle Modelltypen untersucht, die eine breite Palette untersuchter Modelle in stetiger Zeit abdecken. Wir beginnen mit dem bekannten Black-Scholes Modell, obwohl dies eigentlich ein Untermodell des zweiten untersuchten Typs darstellt. Die Wichtigkeit dieses Modells in der Praxis stützt diese Spezialbehandlung. Danach untersuchen wir allgemeine Diffusionsmodelle. Diese Klasse enthält insbesondere Modelle mit stochastischer Volatilität und viele Zinsmodelle. Am Schluss wenden wir uns Modellen mit Sprüngen zu. Solche Modelle erfreuen sich wachsender Popularität und stellen besondere Probleme.

Abstract

The present work can be divided into two parts. The first part starts with an overview over different approaches to risk management and risk measures. Then we review and partly extend saddlepoint approximations and stochastic Taylor expansions. Saddlepoint approximations, a relatively old statistical technique, give in some cases important alternatives to Fourier inversion and may lead especially for the problem of quantile calculation to fast and often accurate answers. Stochastic Taylor expansions are stochastic analogues of the well-known Taylor expansion of deterministic analysis and are mainly used for simulation purposes. We review the basic facts of stochastic Taylor expansions for diffusion processes and develop an analogue for multivariate Poisson processes. These two expansions are then linked together.

In the second part of the thesis we examine the applicability of these approximations to questions relevant within risk management. We examine the performance of stochastic Taylor expansions and/or saddlepoint approximations in contrast to some existing approximations. The applicability is examined for three specific types of model, covering a large part of continuous time models used in finance. We start with the standard Black-Scholes model. Although this model is a special case of the second type, we devote to this model a separate chapter because of its importance for practice. We then move to general diffusion models which capture the important sub-classes of stochastic volatility models and models for bond prices. As a last type we examine Lévy type models which are currently in vogue as models for the price evolution of some financial asset.