Diss. ETH Nr. 14338

Finite-Elemente-Modellierung und Simulation von geometrisch exakten Timoshenko-Balken

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

MARIO CLERICI

Dipl. Math. ETH
geboren am 17. Dezember 1966
von St. Gallen-Tablat

angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. Hans Brauchli, Referent
Prof. Dr. Christoph Glocker, Korreferent

Zürich 2001

Zusammenfassung

Balkenförmige Komponenten in Mehrköpersystemen können sich aufgrund ihrer speziellen Struktur unter Trägheitskräften oder eingeprägten Lasten elastisch verformen. Oft ist es nicht möglich im vornherein abzuschätzen, wie gross die Belastungen und die daraus resultierenden Deformationen sind. Zu diesem Zweck wird eine echt nichtlineare Formulierung hergeleitet, die kleine und grosse Deformationen einheitlich erfasst, und die sowohl für die Statik und die Dynamik geeignet ist.

Die Gleichungen für den geometrisch nichtlinearen, schubweichen Balken werden konsistent aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie hergeleitet. Dabei wird eine Balkenkonfiguration als parameterisierte Kurve auf der Lie-Gruppe $\mathrm{SE}(3) = \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ aufgefasst. Geeignete Geschwindigkeits-, Variations- und Verzerrungsgrössen werden durch Linksreduktion bezüglich des semidirekten Produktes als Elemente der Lie-Algebra $\mathrm{se}(3)$ definiert. Auf diese Weise erscheinen die entsprechenden Bewegungsgleichungen und Variationsprinzipien in $\mathrm{SE}(3)$-invarianter Form. Mit derselben Systematik wird auch die Dynamik eines freien starren Körpers behandelt und dadurch eine euklidische Erweiterung der Kirchhoff'schen kinetischen Analogie erreicht.

Es wird klar getrennt zwischen einer Reduktion auf die intrinsische Balkengleichung und anschliessender Diskretisierung. Dazu wird eine abgewandelte Form der co-rotationellen Finite-Elemente-Methode verwendet, bei welcher nach wie vor im mitrotierten System interpoliert wird, aber danach die lokalen Knotenvariablen beibehalten und nicht auf absolute Knoten transformiert werden. Dies hat den Vorteil, dass einerseits gut getestete lineare Elementansätze verwendet werden können, andererseits ist mit den lokalen Knotenvariablen ein Anschluss an eine Minimalformulierung gegeben. Weiter ist durch Schubdeformationsparameter in den Ansatzfunktionen ein Übergang zur Normalenhypothese auf Elementniveau möglich, ohne die mechanische Formulierung zu wechseln.

Ein solches elastisches Element wird als kinetostatisches Übertragungselement mit den lokalen Knotenvariablen als inneren Variablen interpretiert. Darin sind sowohl die Vorwärtskinematik als auch die Rückwärtskinetik vollständig in Termen von Lie-algebraischen Operationen formuliert. Neben dem elastischen Element werden als weitere Beispiele auch ein Starrkörper- und ein Gelenkelement angegeben. Zur Assemblierung eines Systems aus Übertragungselementen werden verschiedene rekursive Verfahren aus der Mehrkörperdynamik vereinheitlicht. Mit diesen Methoden können wahlweise die inverse Dynamik, die Vorwärtsdynamik oder gesondert die einzelnen Mehrkörperterme berechnet werden. Als Spezialfall ist darin auch die Assemblierung eines Balkens aus seinen Elementen und der Einbau des Balkens in

ein Gesamtsystem enthalten.

Für Simulationsanwendungen ist die Anzahl der Balkenelemente neben den Systemparametern der einzige Designparameter. Mit diesem kann man sowohl die Konvergenz der Lösung kontrollieren als auch die Zeitschrittintegration auf die Steifigkeit der Struktur abstimmen. Zusammen mit einer lokalen Aufbereitung der Elementkräfte und der Verwendung von rekursiven Methoden kann die Dynamik von nicht zu weichen Balken in Echtzeit simuliert werden.

Mit diversen Testbeispielen wird die Verwendbarkeit der vorgeschlagenen Formulierung für die Statik und Dynamik grosser Deformationen gezeigt. Die numerischen Resultate werden durch analytische Rechnungen validiert und mit Ergebnissen anderer Methoden verglichen.

Abstract

Due to their special structure beamlike components in multibody systems may undergo elastic deformations on the influence of inertia forces and imposed loads. Often it is not possible to estimate the loading and the resulting deformations in advance. For this a genuine nonlinear formulation is derived which treats small and large deformations in the same way and which is suitable for static as well as dynamic computations.

The equations for a geometrically nonlinear beam with shear flexibility are derived in a consistent manner from the three-dimensional theory of elasticity. As a result a beam configuration is considered as a parameterised curve on the Lie Group $\mathrm{SE}(3) = \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$. Suitable quantities for velocity, variations and strain are defined on the Lie Algebra se(3) through left reduction with respect to the semidirect product. In this way the corresponding equations of motion and variational principles appear in an SE(3)-invariant form. With the same systematic approach the dynamics of a free rigid body is addressed, and by this an Euclidean extension of Kirchhoff's kinetic analogy is obtained.

The reduction to an intrinsic beam equation is separated entirely from the following discretisation process. For this a modified version of the co-rotational Finite Element method is used. As in the conventional method the interpolation is carried out with respect to the co-rotating system, but with the difference that the local nodal variables are retained and not transformed to absolute nodes. As the main advantages reliable linear shape functions can be used, and a connection to a minimal formulation via the local nodal variables can be established. In addition, the shape functions depend on shear deformation parameters that allow for switching to the normal-hypothesis on element level without changing the mechanical formulation.

Such an elastic element is then interpreted as a kinetostatic transmission element with the local nodal variables as internal variables. In this setting the forward kinematics as well as the backward kinetics are expressed entirely in terms of Lie algebraic operations. In addition to the elastic element a rigid element and a joint element are presented as further examples. For the assembly of a system from its transmission elements several recursive methods from multibody dynamics are unified. With these methods the inverse dynamics, the forward dynamics or single multibody terms can be calculated by choice. As a special case this unified formulation also contains the assembly of the beam elements and the integration of the beam in an entire system.

For numerical applications the number of beam elements is used to control the convergence of the solution, but also to tune the time step integration according to

the stiffness of the structure. Due to the local calculation of the element forces and the recursive schemes used, the numerical evaluation can be done in real-time as long as the beams are moderately stiff.

Several test examples are used to demonstrate the power of the proposed formulation for static and dynamic problems with large deformations. The numerical results are validated by analytic calculations and compared with other methods.