Discretization of expanding maps

Author(s):
Flockermann, Paul Philipp

Publication Date:
2002

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004355362

Diss. ETH No. 14448

Discretizations of Expanding Maps

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
DOKTOR DER MATHEMATIK

presented by
PAUL PHILIPP FLOCKERMANN
Dipl. Phys. ETH
born 14.05.70
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Oscar E. Lanford III, examiner
Prof. Viviane Baladi, co-examiner

2002

Abstract

If we iterate a smooth expanding map f on a computer the orbit of a point x usually massively deviates from the corresponding exact orbit after only few steps. So the attempt to approximate $f^n(x)$ on a computer is useless except for very small values of n. In a numerical simulation the function f is iterated in a discretized form. So all results are contaminated by round-off errors. Nevertheless, the histogram of a numerically computed orbit of x often resembles the statistical distribution of typical exact orbits. By this we mean: If we can associate with f a unique absolutely continuous probability measure μ which is invariant under f, then the uniform counting measure on the numerical orbit is "near" μ in the weak-$*$ topology. Such results of computer experiments are given in [Lan98] and in Chapter 4.

In Chapter 2 we define a discretization f_N of a given smooth expanding map f, where N denotes the fineness of the discretization. We assign equal probabilities to initial points in the intersection of the domain of f_N with a macroscopically small neighbourhood Δ_N of x. Via the iteration of f_N a countable stochastic process of round-off errors of f_N is obtained. By multiplication with the reciprocal maximal error the values of this process are normalized. We let the number of initial points in Δ_N and the fineness N tend to infinity simultaneously. We prove that under a number theoretical hypothesis on $f'(x), (f^2)'(x), \dots$ the following holds true: Any finite segment of the stochastic process is asymptotically independent identically uniformly distributed. We then investigate smooth expanding maps of the circle onto itself, that are induced by circle mappings of degree 2 in view of the hypothesis and show: With only one exception, each analytic function f in this class satisfies the hypothesis for all but countably many x, and for generic f

in C^r, $r \geq 2$, the hypothesis is also satisfied for all but countably many x. So, if the limit behaviour of the stochastic process models the distribution of round-off errors in computer experiments correctly, then it can be said that round-off errors behave like random noise and one can apply that the dynamical system (f, μ) is stochastically stable under a large class of random perturbations.

In Chapter 3 we choose another approach to investigate why the experimentally observed similarity between the computed histograms and the density function $d\mu/d\lambda$ should hold. Similar to above, we introduce a discretization f_N and the uniform counting measure on the intersection of the domain of f_N with Δ_N. There may be points that do not have any preimage under f_N. Only points that are periodic under f_N have preimages of arbitrary order. Via the uniform counting measure we obtain a probability on preimages under f_N^n, $n > 0$, and so a probability on the multiplicity with which a point in Δ_N is attained by f_N^n. Under a similar number theoretical hypothesis as above we will show that this probability is determined via a branching process for all fixed n. In our models, limits are taken as follows: For all fixed n the fineness N of discretizations approaches infinity, and afterwards n also tends to infinity. Then the expectation of the number of preimages under f_N^n converges to the expected size of the corresponding generation of the branching process as N approaches infinity which in turn is shown to converge to $d\mu/d\lambda(x)$ as n tends to infinity. Moreover, we will show that the branching process is extinctive with probability 1. Finally, we will prove that the number theoretical assumption holds for generic $f \in C^r$, $r \geq 2$, in the above class of functions for all but countably many x.

Kurzfassung

Schon nach wenigen Schritten weicht üblicherweise eine durch numerische Iteration einer glatten expandierenden Funktion f erhaltene Bahn eines Punktes x massiv von der zugehörigen exakten Bahn ab. Somit ist eine Approximation der n-ten Iterierten mittels eines Computers mit Ausnahme von kleinen Werten von n sinnlos. In der numerischen Simulation wird eine diskretisierte Form der Funktion iteriert. Alle Resultate werden bei der Berechnung durch den Computer somit durch Rundungsfehler beeinflusst. Dennoch beschreibt das Histogramm einer numerisch berechneten Bahn von x häufig sehr genau die statistische Verteilung aller typischen Bahnen, die durch Iteration der exakten Funktion erhalten werden. Wir meinen hiermit: Falls wir f ein eindeutiges absolut stetiges invariantes Mass μ zuordnen können, liegt das normierte Zählmass auf einer numerisch berechneten Bahn bezüglich der schwach-$*$ Topologie häufig nahe bei μ. Resultate von Computerexperimenten, die dieses Verhalten aufweisen, sind in [Lan98] und in Kapitel 4 angegeben.

Wir definieren in Kapitel 2 eine Diskretisierung f_N mit Feinheit N einer gegebenen glatten expandierenden Funktion f. Wir ordnen allen Punkten, die sowohl im Definitionsbereich von f_N und in einem makroskopisch kleinen Bereich Δ_N um einen Anfangswert x liegen, die gleiche Wahrscheinlichkeit zu. Durch anschliessende Iteration von f_N erhalten wir einen abzählbaren stochastischen Prozess von Rundungsfehlern von f_N. Wir normieren alle Rundungsfehler durch Multiplikation mit dem inversen Wert des maximalen Fehlers. Die Anzahl der für die Iteration von f_N relevanten Anfangswerte in Δ_N lassen wir mit zunehmender Feinheit N der Diskretisierung gegen unendlich streben. Wir beweisen, dass unter einer zahlentheoretischen Voraussetzung für

$f'(x), (f^2)'(x), \ldots$ dann folgendes gilt: Über jedes endliche Zeitintervall ist der stochastische Prozess asymptotisch unabhängig identisch uniform verteilt. Glatte expandierende Selbstabbildungen des Kreises, die durch Kreisabbildungen vom Grad 2 induziert werden, untersuchen wir dann im Hinblick auf die zahlentheoretische Voraussetzung und zeigen: Für jedes solche analytische f, abgesehen von einer Ausnahme, ist die Voraussetzung für alle x bis auf abzählbar viele erfüllt, und für generisches $f \in C^r$, $r \geq 2$, ist die Annahme für alle x bis auf eine abzählbare Menge auch erfüllt. Falls also der stochastische Prozess im Grenzbereich unendlicher Feinheit N die Verteilung von Rundungsfehlern in Computerexperimenten zutreffend charakterisiert, dann verhalten sich Rundungsfehler ähnlich wie zufälliges Rauschen, und man kann anwenden, dass das dynamische System (f, μ) unter einer grossen Klasse von zufälligen Störungen stochastisch stabil ist.

Als Erklärungsversuch für die experimentell bestätigte Ähnlichkeit des aus einer Computersimulation resultierenden Histogramms und der Dichtefunktion $d\mu/d\lambda$ schlagen wir in Kapitel 3 ein zweites Modell vor. Wieder wird eine Diskretisierung f_N und das uniforme Zählmass auf dem Schnitt von dem Definitionsbereich von f_N mit Δ_N eingeführt. Ein Punkt muss nicht zwingend ein Urbild unter f_N haben. Nur Punkte, die unter f_N periodisch sind, haben Urbilder jeder Ordnung. Via das uniforme Zählmass erhalten wir eine Wahrscheinlichkeit auf Urbildern unter f_N^n, $n > 0$, und somit eine Wahrscheinlichkeit für die Vielfachheit, mit der ein Punkt in Δ_N Bildpunkt unter f_N^n ist. Unter einer ähnlichen zahlentheoretischen Vorraussetzung wie oben zeigen wir, dass diese Wahrscheinlichkeit für jedes feste n asymptotisch via einen Verzweigungsprozess bestimmt werden kann. In unseren Modellen werden Grenzwerte immer wie folgt genommen: Zuerst geht für alle feste n stets N nach unendlich, und dann lassen wir auch n gegen unendlich streben. Dann zeigen wir, dass der Erwartungswert für die Anzahl Urbilder unter f_N^n für grosse N durch die erwartete Grösse der entsprechenden Generation des Verzweigungsprozesses und diese für grosse n durch $d\mu/d\lambda(x)$ gegeben ist. Der Verzweigungsprozess stirbt mit Wahrscheinlichkeit 1 aus. Schliesslich zeigen wir: Die zahlentheoretische Voraussetzung gilt generisch für die obige Klasse von Funktionen in C^r, $r \geq 2$, für alle x bis auf eine abzählbare Menge.