

# Geometrie

Skript für die Vorlesung: 91-157, G, Geometrie, 86-3,  
Ausgabe 2002

## **Educational Material**

### **Author(s):**

Walser, Hans

### **Publication date:**

2002

### **Permanent link:**

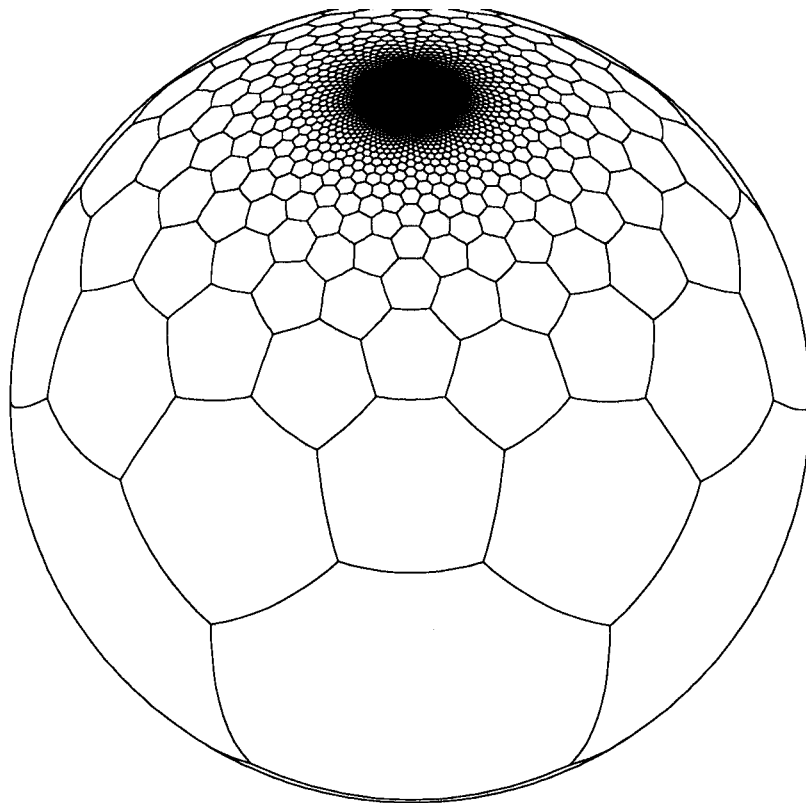
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004377954>

### **Rights / license:**

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

# Die stereografische Projektion

Hans Walser



**Inhalt**

1 Worum geht es? ..... 1

2 Die stereografische Projektion ist winkeltreu ..... 3

3 Die stereografische Projektion ist kreistreu ..... 5

    3.1 Bild eines Kleinkreises ..... 5

    3.2 Sonderfälle ..... 6

        3.2.1 Großkreise ..... 6

        3.2.2 Kreise durch den Nordpol ..... 7

    3.3 Möbiuskreise ..... 10

4 Das Wulffsche Netz ..... 11

    4.1 Konstruktionsprinzip des Wulffschen Netzes ..... 12

    4.2 Konstruktives Vorgehen ..... 12

    4.3 Parameterdarstellung des Wulffschen Netzes ..... 13

    4.4 Bestimmung der Länge von Großkreisbogen ..... 14

5 Konstruktives in der stereografischen Projektion ..... 16

    5.1 Diametraler Punkt ..... 16

    5.2 Großkreis durch zwei Punkte ..... 17

    5.3 Wahre Länge eines Großkreisbogens ..... 18

Literatur ..... 20

Websites ..... 20

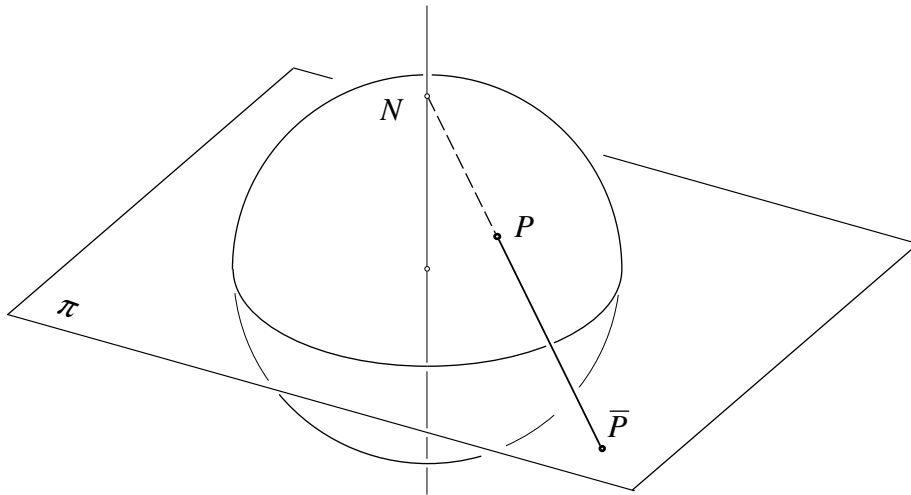
1995: Erstausgabe  
 1996: Korrektur von Fehlern  
 1999: Erweiterungen. Grafische Überarbeitung  
 2001: Erweiterungen. Neue Moduleinteilung.

hwalsen@bluewin.ch



## 1 Worum geht es?

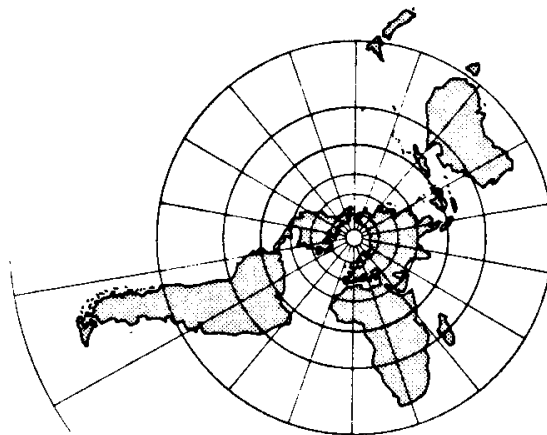
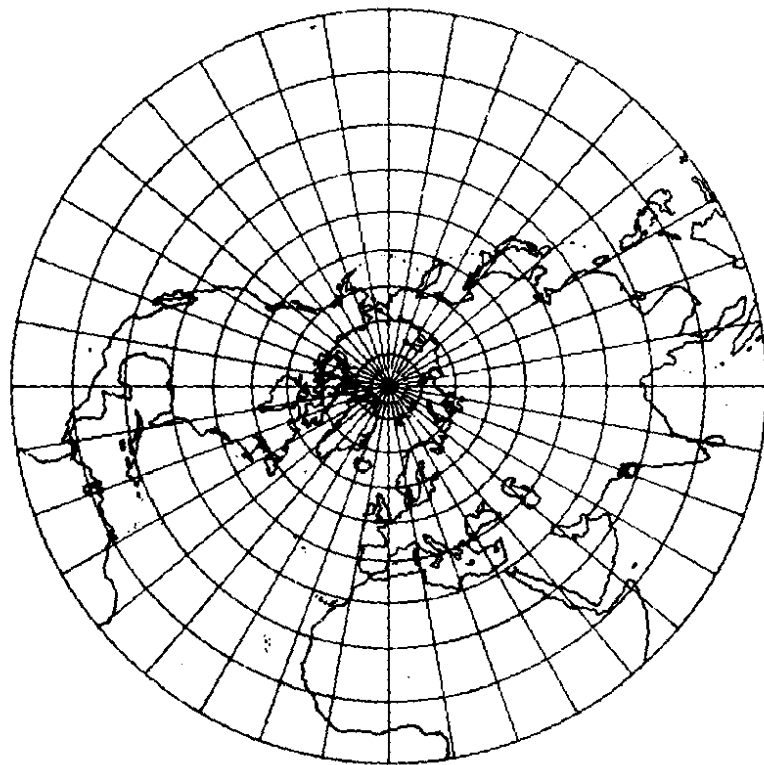
Die stereografische Projektion ist eine Abbildung von der Kugel auf die Ebene. Sie liefert also eine Möglichkeit, eine Karte der Kugel herzustellen. Bei der stereografischen Projektion wird in Kugelpunkt  $P$  vom Nordpol  $N$  aus auf die Äquatorebene  $\pi$  projiziert. Der Bildpunkt in der Bildebene  $\pi$  wird mit  $\bar{P}$  bezeichnet.



Die stereografische Projektion

### Bemerkungen:

- Mit der stereografischen Projektion können alle Kugelpunkte mit Ausnahme des Projektionszentrums  $N$  abgebildet werden. Das Bild von  $N$  käme "ins Unendliche" zu liegen. Wenn wir die Ebene durch einen uneigentlichen Punkt ergänzen, kann die ganze Kugel abgebildet werden. Die so ergänzte Ebene heißt "konforme Ebene", sie ist zu unterscheiden von der projektiven Ebene, welche durch Ergänzung der gewöhnlichen euklidischen Ebene durch eine ganze uneigentliche Gerade entsteht.
- Die Abbildung der Kugel auf die konforme Ebene ist bijektiv. Zu jedem Bildpunkt in der konformen Ebene gehört genau ein Urbildpunkt auf der Kugel.
- Der Äquatorkreis bleibt bei der stereografischen Projektion punktweise fest, ist also ein *Fixpunktkreis*. Die obere, nördliche Halbkugel wird auf das Äußere des Fixpunktkreises abgebildet, die untere, südliche Halbkugel auf das Innere.
- Statt auf die Äquatorebene kann auch auf eine dazu parallele Ebene, zum Beispiel auf die Tangentialebene im Südpol, abgebildet werden. Dadurch werden die Bildfiguren ähnlich vergrößert (gestreckt).
- Es gibt auch andere Dispositionen für die stereografische Projektion. So kann zum Beispiel der Südpol als Projektionszentrum gewählt werden. In jedem Fall muss die Projektionsebene eine Normalebene zur Achse durch das Projektionszentrum und den Kugelmittelpunkt sein.

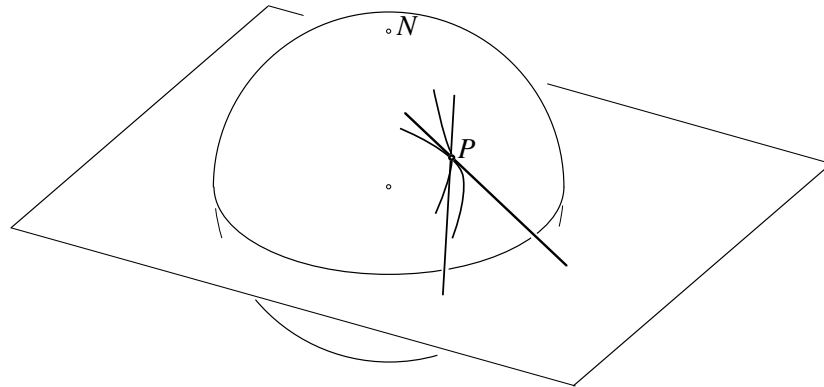


**Projektion vom Südpol aus**

- f) Die stereografische Projektion ist nicht längentreu; die Bilder werden längenmäßig verzerrt. Hingegen werden wir sehen, dass die stereografische Projektion zwei wichtige "positive" Eigenschaften hat: Sie ist winkeltreu und bei geeigneter Fassung des Begriffes "Kreis" auch kreistreu. Die stereografische Projektion gestattet also, konforme, das heißt winkeltreue Karten herzustellen.

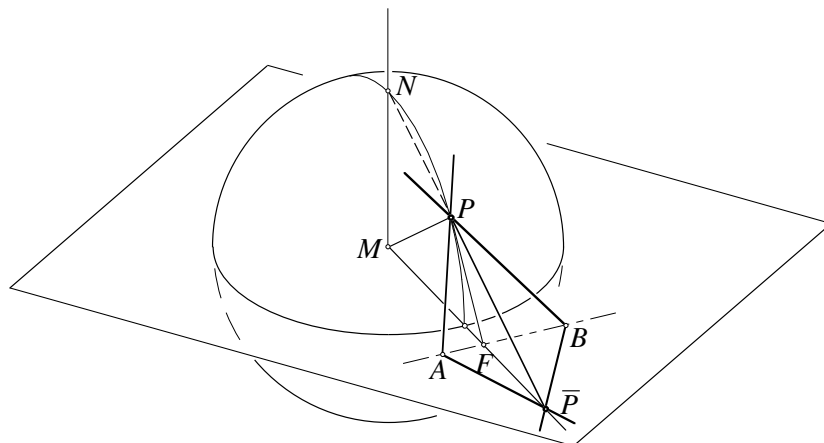
## 2 Die stereografische Projektion ist winkeltreu

Der Schnittwinkel zweier Kurven auf der Kugeloberfläche ist wie folgt definiert: Wir nehmen die Tangenten an diese beiden Kurven im Schnittpunkt. Diese beiden Tangenten sind auch Tangenten an die Kugeloberfläche. Unter dem Schnittwinkel der beiden Kurven verstehen wir nun den Schnittwinkel der beiden Tangenten.

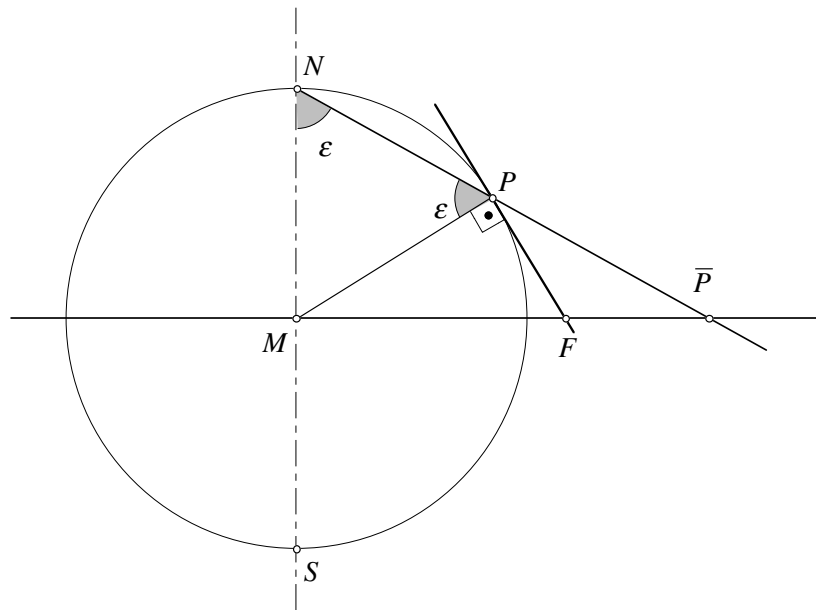


### Schnittwinkel zweier Kurven auf der Kugeloberfläche

Wir zeigen nun: Der Schnittwinkel der beiden Tangenten wird bei der stereografischen Projektion nicht verändert. Dazu studieren wir den Achsenschnitt (Schnitt durch die Kugelachse) durch den Punkt  $P$ .



### Nachweis der Konformität



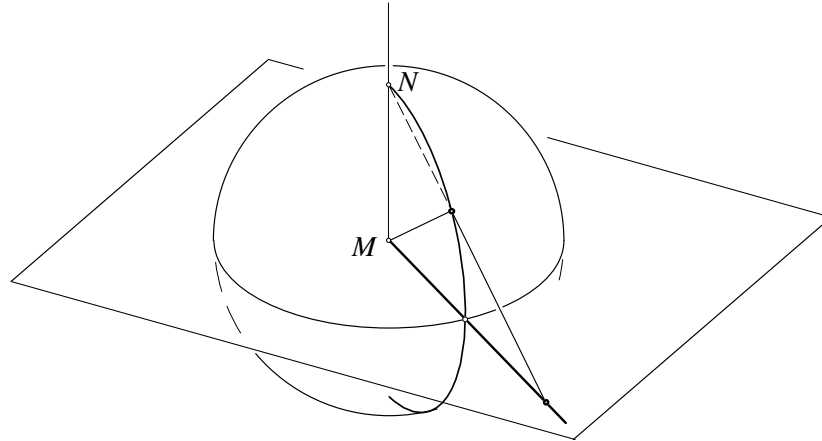
#### Achsenschnitt durch $P$

Das Dreieck  $PNM$  ist gleichschenkelig mit Spitze  $M$ , die Basiswinkel  $\varepsilon$  bei  $P$  und  $N$  sind daher gleich. Der Winkel  $\angle FPP$  ist der Komplementwinkel von  $\varepsilon$ , da die Tangente orthogonal auf dem Berührungsradius steht. Andererseits ist aber auch der Winkel  $\angle NPM$  als zweiter spitzer Winkel im rechtwinkligen Dreieck  $PNM$  komplementär zu  $\varepsilon$ . Das Dreieck  $PNM$  ist also ebenfalls gleichschenkelig mit gleich langen Schenkeln  $PN$  und  $PM$ . Das heißt aber, dass die beiden Dreiecke  $PNM$  und  $PNM$  gleich lange Höhen auf die gemeinsame Grundlinie  $PM$  mit dem gemeinsamen Höhenfußpunkt  $F$  haben und daher kongruent sind. Deshalb ist der Winkel  $\angle NPM$  gleich dem Winkel  $\angle NPM$ , woraus die Kongruenz der stereografischen Abbildung folgt:

**Die stereografische Projektion ist winkeltreu.**

### 3 Die stereografische Projektion ist kreistreu

Wir werden sehen, dass das Bild eines Kreises ein Kreis ist. Dies kann allerdings nicht ausnahmslos gelten, da ja zum Beispiel das Bild eines Meridiankreises eine Gerade ist.

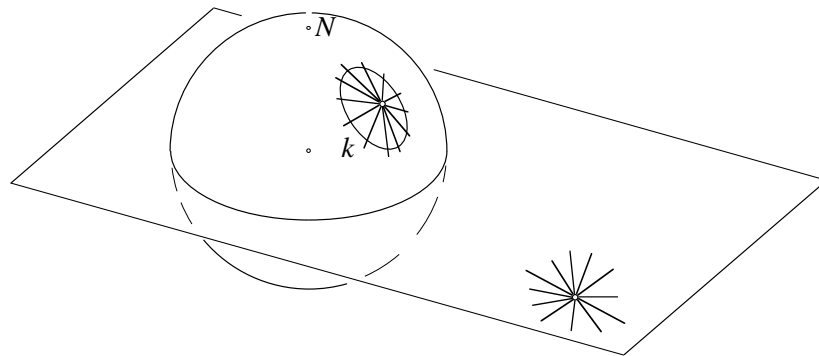


**Bild eines Meridians**

Auf diese Ausnahmen kommen wir anschließend zu sprechen und behandeln zunächst den allgemeinen Fall.

#### 3.1 Bild eines Kleinkreises

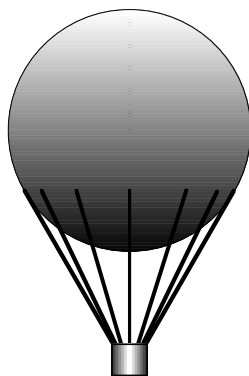
Zu einem allgemeinen Kleinkreis  $k$  auf der Kugeloberfläche bilden wir in jedem Punkt die zu  $k$  orthogonale Kugeltangente.



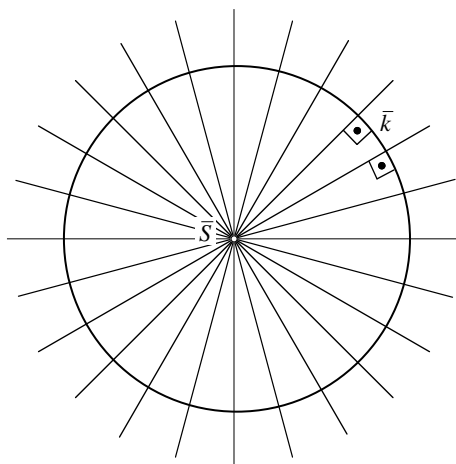
**Orthogonale Kugeltangenten**

Diese Kugeltangenten bilden einen Kegel; die Tangenten sind Mantellinien dieses Kegels und schneiden sich in der Kegelspitze  $S$ , der Kreis  $k$  ist Berührungskreis des Kegels mit der Kugel.



**Luftballon**

Die Zentralprojektion dieser Mantellinien von  $N$  aus auf die Äquatorebene  $\pi$  ist ein Geradenbüschel durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich das Bild  $\bar{S}$  der Kegelspitze  $S$ . Da die stereografische Projektion winkeltreu ist, muss das Bild  $\bar{k}$  des Kreises  $k$  eine Kurve sein, welche alle Geraden des Geradenbüschels senkrecht schneidet (sogenannte Orthogonaltrajektorie); dies ist aber ein Kreis.

**Orthogonaltrajektorie eines Geradenbüschels**

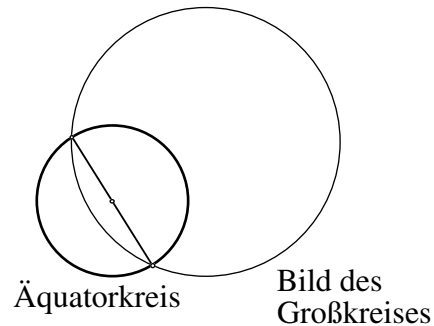
## 3.2 Sonderfälle

### 3.2.1 Großkreise

Unter *Großkreisen* verstehen wir diejenigen Kugelkreise, welche denselben Radius haben wie die Kugel. Die Großkreise haben dann auch denselben Mittelpunkt wie die Kugel. Für eine Großkreis  $k$ , der nicht durch  $N$  verläuft, also kein Meridian ist, erhalten wir durch die zu  $k$  senkrechten Kugeltangenten keinen Kegel, sondern einen Zylinder. Die zu  $k$  senkrechten Kugeltangenten sind Mantellinien dieses Zylinders. Bei der Zentralprojektion (mit dem Projektionszentrum  $N$ ) dieser zueinander parallelen Mantellinien auf die Äquatorebene  $\pi$  erhalten wir einen Fluchtpunkt; dieser ist der Schnittpunkt der zu den Mantellinien parallelen Geraden durch  $N$  mit der Äquatorebene  $\pi$ . Die Zentralprojektion der Mantellinien auf die Äquatorebene  $\pi$  ist also wiederum ein Geradenbüschel durch

einen gemeinsamen Punkt. Das Bild eines Großkreises, der nicht durch  $N$  verläuft, ist daher ebenfalls ein Kreis.

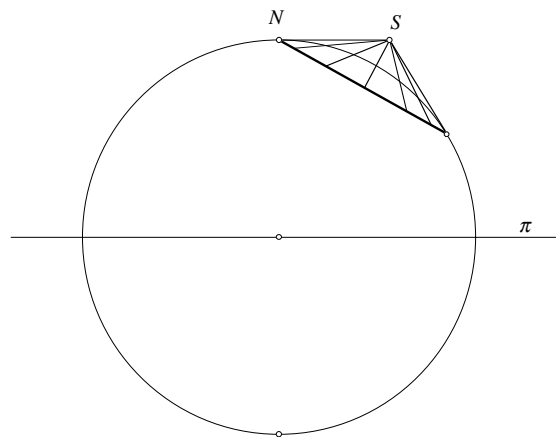
Zwei Großkreise schneiden sich in zwei diametralen Punkten. Insbesondere schneidet ein beliebiger Großkreis den Äquatorkreis in zwei diametralen Punkten. Da der Äquatorkreis bei der stereografischen Projektion punktweise fest bleibt, ist das stereografische Bild eines Großkreises ein Möbiuskreis, der den Äquatorkreis in zwei diametralen Punkten schneidet.



**Bild eines Großkreises**

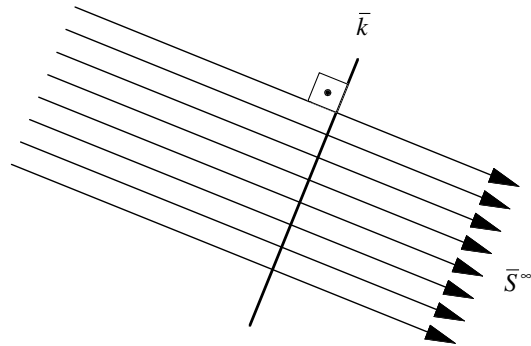
### 3.2.2 Kreise durch den Nordpol

Wir haben schon gesehen, dass die stereografischen Bilder von Meridianen Geraden sind. Wir studieren nun einen Kleinkreis durch den Nordpol  $N$ , und denken uns wieder die dazu orthogonalen Kugeltangenten. Die Kugeltangente durch den Nordpol  $N$  ist parallel zur Äquatorebene  $\pi$ .



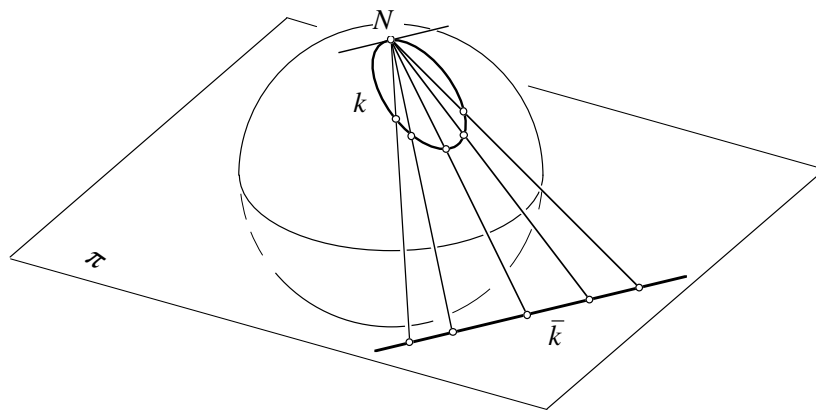
**Kleinkreis durch den Nordpol**

Das Bild  $\bar{S}$  der Kegelspitze  $S$  liegt daher im Unendlichen, die Mantellinien des Kegels werden auf eine Schar paralleler Geraden abgebildet. Die Orthogonaltrajektorie  $\bar{k}$  dazu ist eine Gerade.



### Orthogonaltrajektorie zu einer Schar paralleler Geraden

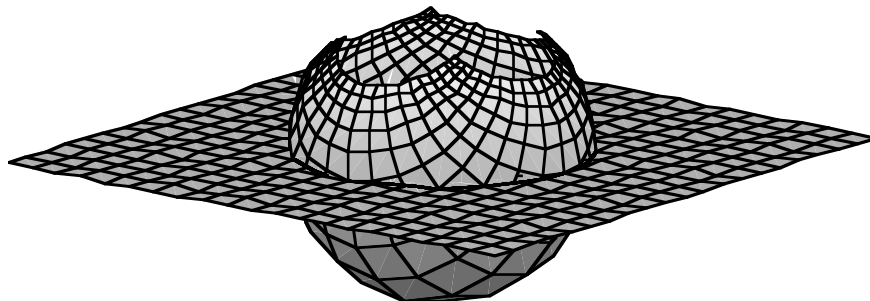
Dass das Bild  $\bar{k}$  eines Kreises  $k$  durch den Nordpol eine Gerade ist, kann auch direkt eingesehen werden: Die Projektionsstrahlen von  $N$  aus durch die Kreispunkte liegen in einer Ebene, nämlich der Trägerebene des Kreises, der Schnitt dieser Ebene mit der Äquatorebene  $\pi$  ist die Gerade  $\bar{k}$ . Diese Gerade  $\bar{k}$  ist parallel zur Kreistangente im Nordpol.



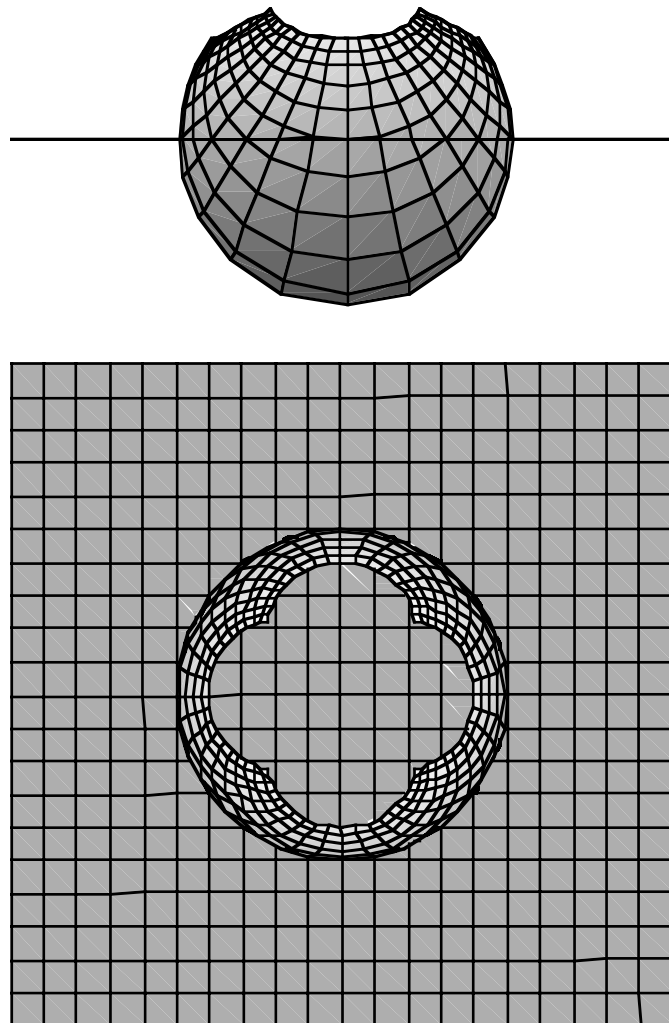
### Sonderfall eines Kreises durch den Nordpol

Somit sind die stereografischen Bilder sämtlicher Kreise durch den Nordpol  $N$  Geraden.

Die folgenden Figuren zeigt die Urbilder eines Quadratnetzes in der Äquatorebene  $\pi$ ; wir erhalten zwei Scharen orthogonaler Kreise. Jede Schar hat eine gemeinsame Tangente im Nordpol. Dies konnte in der Figur allerdings nicht gezeichnet werden, da der Computer nicht bis ins Unendliche gehen kann.



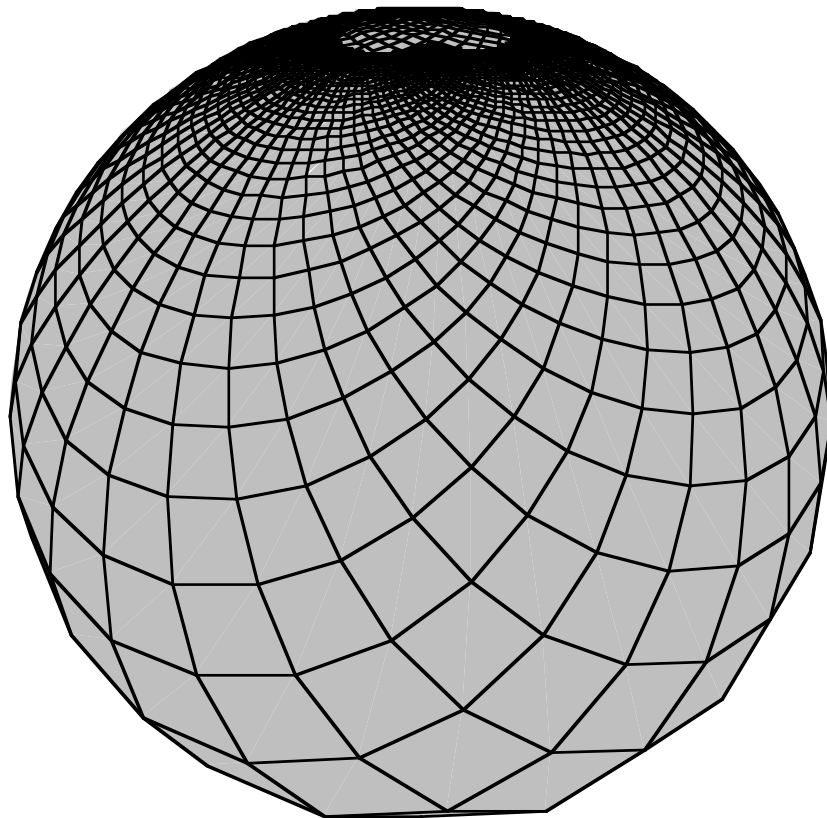
Urbilder eines Quadratnetzes in der Äquatorebene



#### Situation in Grund- und Aufriss

In der folgenden Figur ist die Äquatorebene nicht gezeichnet. Da ein größerer Bereich der Äquatorebene invertiert wurde, erscheint das „Loch“ beim Nordpol viel kleiner.

```
plot3d([      2*u/(u^2+v^2+1),
            2*v/(u^2+v^2+1),
            (u^2+v^2-1)/(u^2+v^2+1)  ],
u=-8..8, v=-8..8, grid=[81,81],
scaling=constrained, orientation=[38,76], style=patch, color=gray);
```



Schrägansicht ohne Äquatorebene

### 3.3 Möbiuskreise

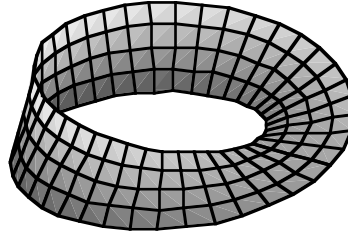
Der Sachverhalt, dass die stereografischen Bilder von Kugelkreisen entweder Kreise oder Geraden sind, führt zu folgender Definition:

Unter einem *Möbiuskreis* in der Bildebene der stereografischen Projektion verstehen wir entweder einen Kreis oder eine Gerade.



August Ferdinand MÖBIUS

Diese Definition nimmt Bezug auf den Mathematiker August Ferdinand *MÖBIUS*, 1790-1868. Möbius, der in Leipzig lehrte, befasste sich mit der projektiven Geometrie. Von ihm stammen die homogenen Koordinaten und das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie. Er ist auch der "Erfinder" des Möbius-Bandes.



**Möbius-Band**

Mit der Definition des Möbiuskreises gilt nun:

Die stereografische Projektion ist möbiuskreistreu.

#### **4 Das Wulffsche Netz**

Die folgende Figur zeigt den halben Globus, dargestellt in querachsiger stereografischer Projektion. Das Projektionszentrum liegt im Gegenpunkt des Schnittpunktes von Äquator und Nullmeridian, die Projektionsebene verläuft durch die  $\pm 90^\circ$ -Meridiane.

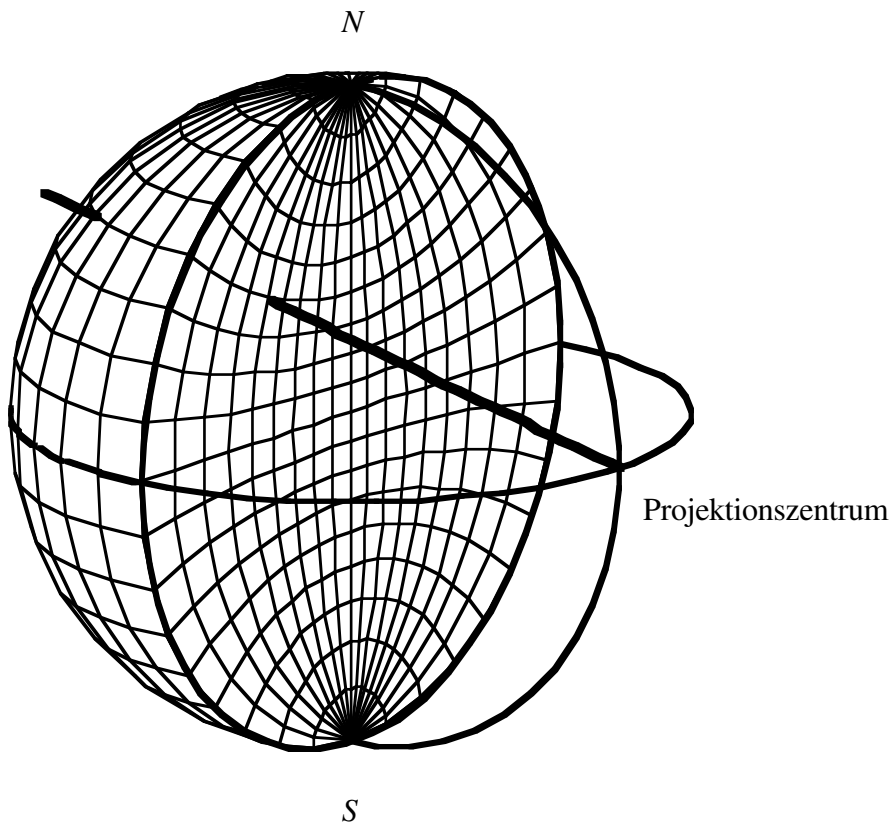


**Halber Globus**

Das bei dieser Projektion auftretende Netz der Meridiane und Breitenkreise wird als *Wulffsches Netz* bezeichnet.

#### 4.1 Konstruktionsprinzip des Wulffschen Netzes

Das Projektionszentrum liegt im Gegenpunkt des Schnittpunktes von Äquator und Nullmeridian, die Projektionsebene verläuft durch die  $\pm 90^\circ$ -Meridiane.

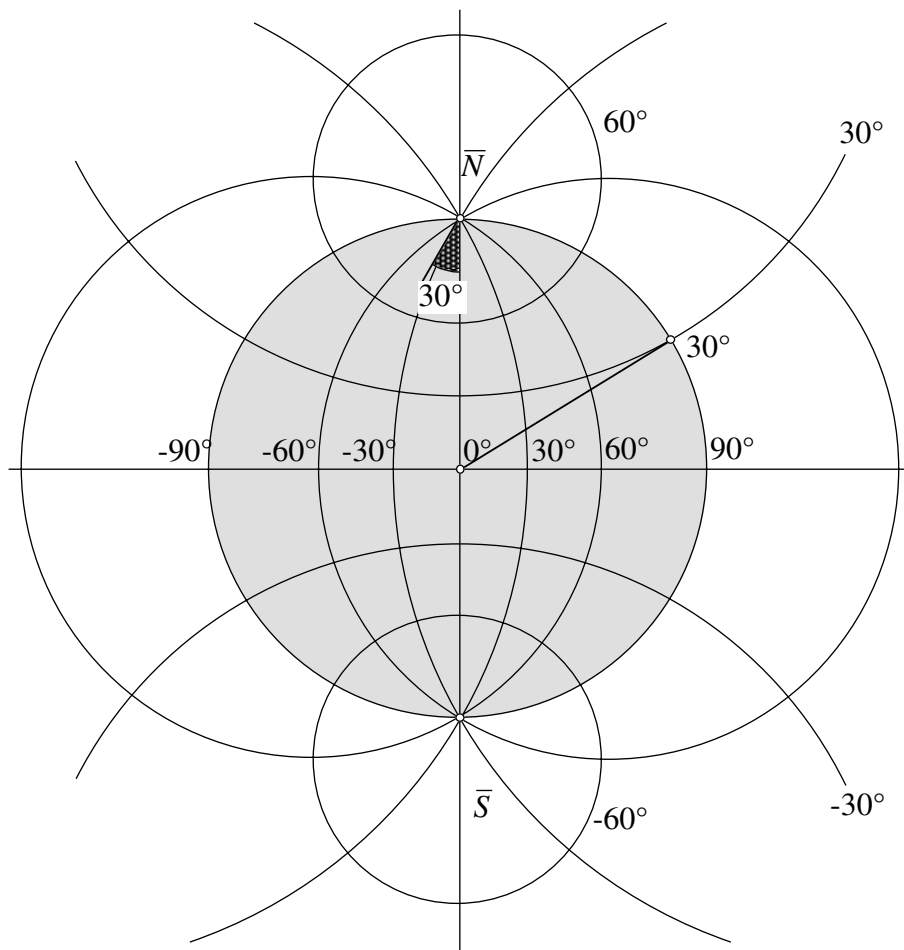


Ansicht „von hinten“

Die Ansicht auf die Projektionsebene geschieht aber „von vorne“, andernfalls hätten wir ein spiegelverkehrtes Bild.

#### 4.2 Konstruktives Vorgehen

Das konstruktive Vorgehen benutzt die Winkeltreue und die Tatsache, dass die  $\pm 90^\circ$ -Meridiane Fixpunkte sind. Zur Konstruktion der Bilder der Meridiane können an die Polen die geografischen Längen als Winkel abgetragen werden. Zur Konstruktion der Bilder der Breitenkreise können auf den  $\pm 90^\circ$ -Meridianen die geografischen Breiten abgetragen werden; die Bilder der Breitenkreise sind dann orthogonal zu diesen Meridianen.



Wulffsches Netz

### 4.3 Parameterdarstellung des Wulffschen Netzes

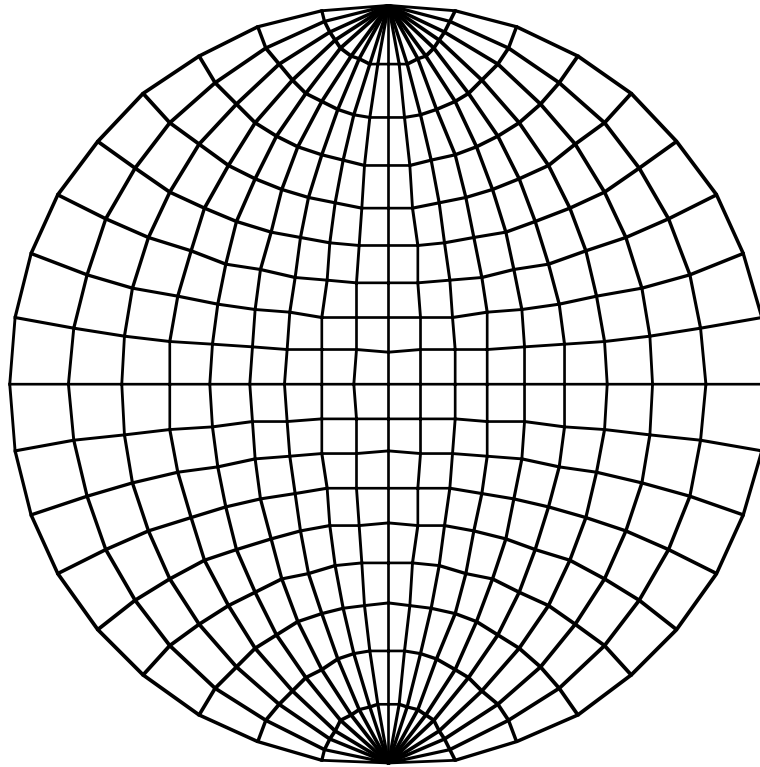
Die Zentralprojektion vom Punkt  $(-1, 0, 0)$  liefert für das Wulffsche Netz die Abbildungsgleichungen:

$$\vec{x}(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda} \\ \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda} \end{pmatrix}; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Das führt zum Maple Programm:

```
> plot3d([ 0,
           cos(phi)*sin(lambda)/(1+cos(phi)*cos(lambda)),
           sin(phi)/(1+cos(phi)*cos(lambda))],
  phi=-Pi/2..Pi/2, lambda=-Pi/2..Pi/2, grid=[19,19],
  scaling=constrained, orientation=[0,90], color=black);
```

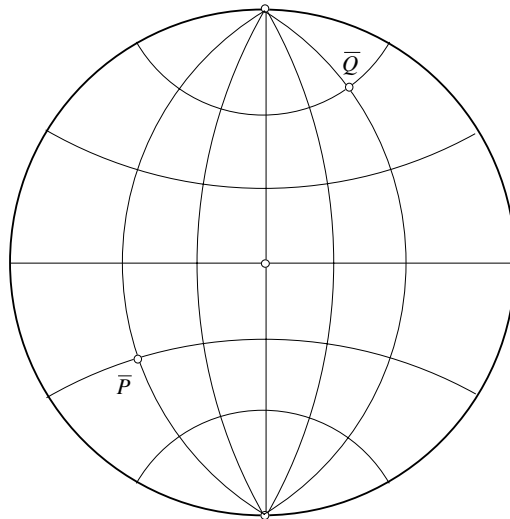




Wulffsches Netz

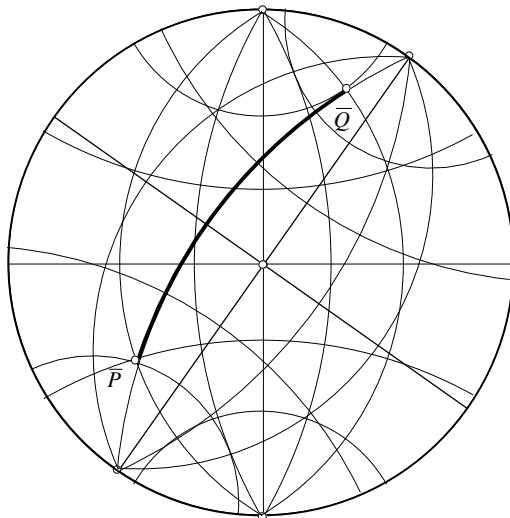
#### 4.4 Bestimmung der Länge von Großkreisbogen

Das Wulffsche Netz gibt eine grafische Methode, den sphärischen Abstand zweier Kugelpunkte  $P$  und  $Q$  zu bestimmen. Unter dem *sphärischen Abstand* verstehen wir die Länge der kürzesten Verbindung auf der Kugeloberfläche. Dieser kürzeste Weg ist Teil eines Großkreises; es geht zunächst also darum, den Großkreis durch die beiden Kugelpunkte  $P$  und  $Q$  zu finden. Dazu dient folgendes Verfahren: Wir zeichnen in das Wulffsche Netz die stereografischen Bilder  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$ .



### Großkreisbogen von $P$ nach $Q$ ?

Auf dieses Wulffsche Netz legen wir ein zweites Wulffsches Netz auf Transparentfolie und drehen dieses zweite Netz, bis die beiden Punkte  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  auf denselben Meridian zu liegen kommen. Auf diesem Meridian kann dann die Breitendifferenz abgelesen werden, die Umrechnung dieser Breitendifferenz ins Bogenmaß und Multiplikation mit dem Kugelradius liefert die Großkreisbogenlänge von  $P$  nach  $Q$ .



### Grafische Lösung

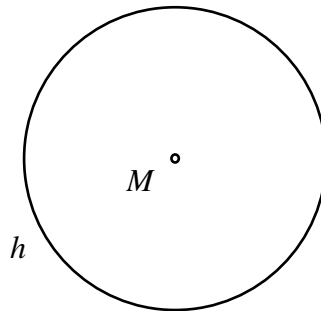
Die Genauigkeit dieser grafischen Methode ist natürlich beschränkt.

### 5 Konstruktives in der stereografischen Projektion

Wir diskutieren einige Probleme der Kugelgeometrie, welche im stereografischen Bild in der Bildebene  $\pi$  gelöst werden können. Für alle diese Konstruktionen setzen wir voraus, dass der Äquatorkreis gegeben ist. Er wird in diesem Zusammenhang oft als *Hauptkreis* bezeichnet.

#### 5.1 Diametraler Punkt

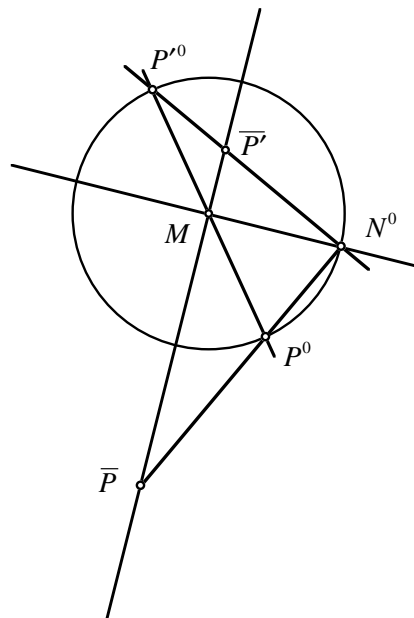
Gegeben ist der Hauptkreis  $h$  und ein Punkt  $P$  durch sein stereografisches Bild  $\bar{P}$ . Gesucht ist der dazu diametrale Punkt  $P'$ , das heißt sein stereografisches Bild  $\bar{P}'$ .



$\bar{P}$  ◦

**Gesucht ist der zu  $P$  diametrale Punkt  $P'$**

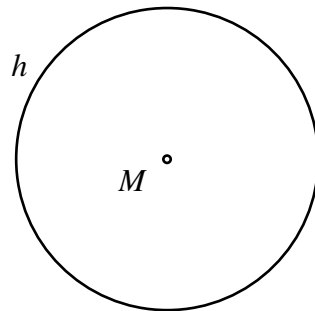
Die Lösung ergibt sich durch einen „umgelegten“ Achsenschnitt durch den Nordpol und den Punkt  $P$ .



**Lösungsidee**

**5.2 Großkreis durch zwei Punkte**

Diese Aufgabe entspricht der einfachen Aufgabe in der ebenen Geometrie, durch zwei Punkte eine Gerade zu zeichnen.

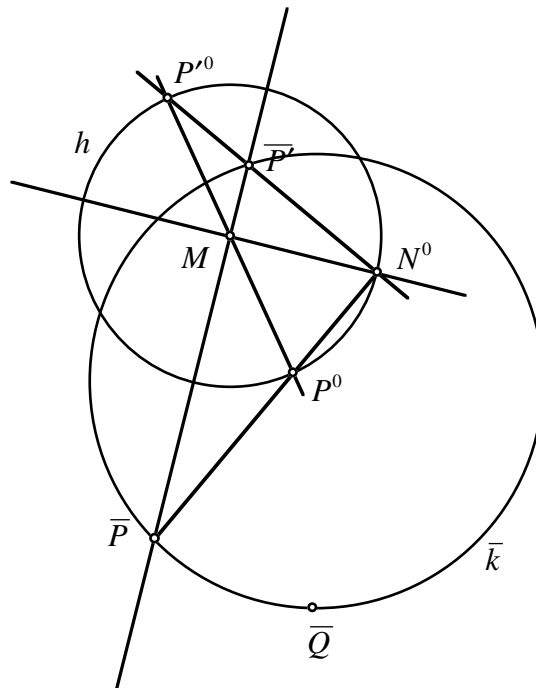


$\bar{P}$  ◦

◦  
 $\bar{Q}$

**Gesucht ist der Großkreis durch  $P$  und  $Q$**

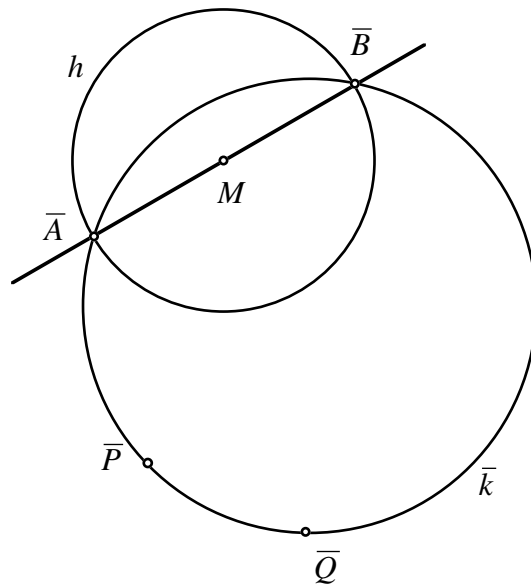
Die Lösungsidee besteht darin, dass wir zu einem der beiden Punkte zum Beispiel zu  $P$ , den diametralen Punkt  $P'$  zeichnen. Der gesuchte Großkreis geht nun durch die drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $P'$  und kann in der stereografischen Projektion als Umkreis der drei Bildpunkte  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  und  $\bar{P}'$  gezeichnet werden.



**Lösungsidee mit diametralem Punkt**

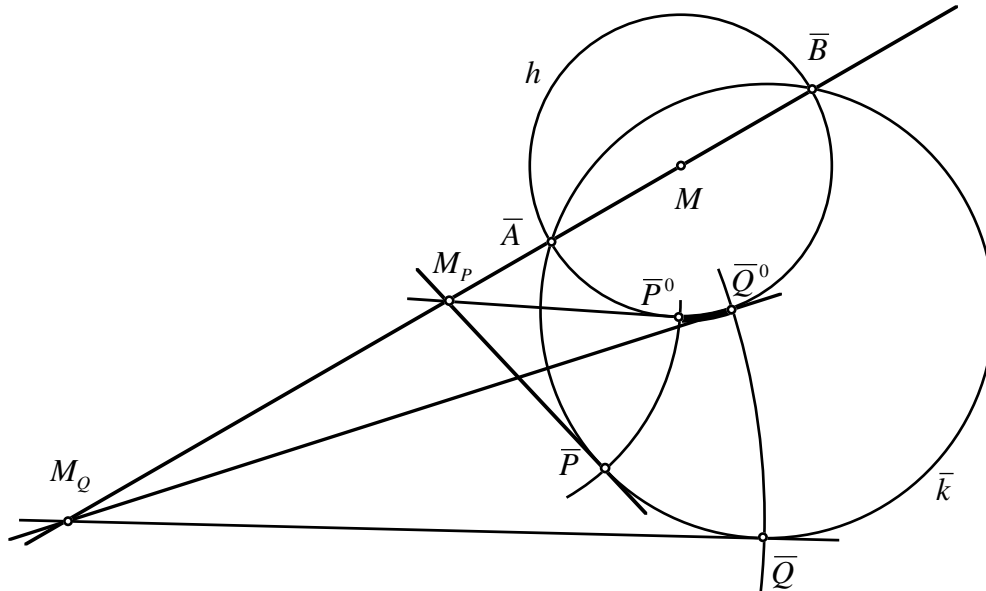
### 5.3 Wahre Länge eines Großkreisbogens

Diese Aufgabe hatten wir schon mit Hilfe des Wulffschen Netzes gelöst. Sie lässt sich auch konstruktiv mit Hilfe der stereografischen Projektion lösen.



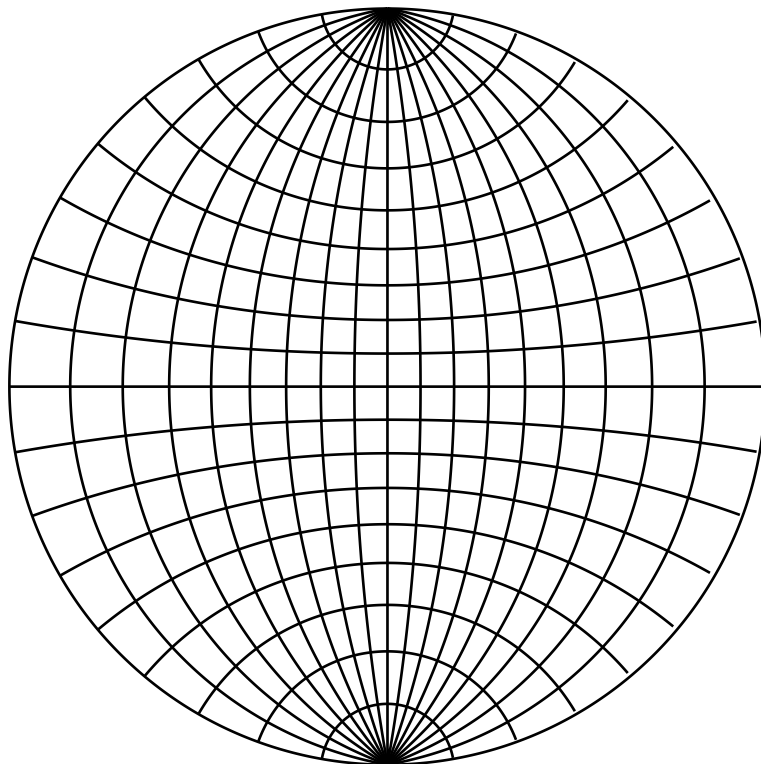
**Wie lang ist der Großkreisbogen von  $P$  nach  $Q$  in Wirklichkeit?**

Der Großkreis durch  $P$  und  $Q$  schneidet den Äquatorkreis in zwei diametralen Punkten  $A$  und  $B$ . Die Lösungsidee besteht nun darin, den Großkreis um die Achse durch  $A$  und  $B$  auf den Äquatorkreis  $h$  zu drehen.



**Herunterdrehen des Großkreises auf den Äquatorkreis**

Beispiel: Wie lang ist der Bogen  $c$  mit den Endpunkten  $P(30^\circ\text{S}, 60^\circ\text{W})$ ,  $Q(60^\circ\text{N}, 60^\circ\text{E})$ ?



**Konstruktion der Länge eines Großkreisbogens**

**Literatur**

- [Berger 1987.2] Berger, Marcel: Geometry II. New York: Springer 1987. ISBN 0-387-17015-4
- [Bigalke 1984] Bigalke, Hans Günther: Kugelgeometrie. Otto Salle Verlag, Frankfurt am Main 1984. ISBN 3-7935-5530-5
- [Gray 1993] Gray, Alfred: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Press, Boca Raton 1993. ISBN 0-8493-7872-9
- [Schröder E 1988] Schröder, Eberhard: Kartenentwürfe der Erde. Teubner Verlag, Leipzig 1988. ISBN 3-322-00479-1
- [Schröder EM 1991] Schröder, Eberhard M.: Vorlesungen über Geometrie. Band 1: Möbiussche, elliptische und hyperbolische Ebenen. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1991. ISBN 3-411-15291-5

**Websites**

<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html>

<http://www.inode.at/dief/>

