



Doctoral Thesis

## Two applications of Topological Field Theory in mathematics and physics

**Author(s):**

Pedrini, Bill

**Publication Date:**

2002

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004394022> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 14671

# Two Applications of Topological Field Theory in Mathematics and Physics

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
(ETH Zürich)

for the degree of  
Doctor of Natural Sciences

presented by  
Bill Pedrini, Dipl. Phys. ETH  
born June 7, 1972  
Swiss Citizen

accepted under the recommendation of  
Prof. Dr. Jürg Fröhlich, examiner  
Prof. Dr. Alberto Cattaneo, co-examiner

2002

## Abstract

The subject matter of the present dissertation is topological field theory. We discuss an application to physics and an application to mathematics.

In the first part we discuss how topological field theory enters the physics of the quantum Hall effect. In this context, topological field theory is another name for ribbon (tensor) category. Such a field theoretical model describes universal (longrange) properties of an incompressible quantum Hall fluid (i.e., a two-dimensional electron gas showing the quantum Hall effect).

The main result is an explicit recipe to construct models satisfying certain consistency conditions which are thought to hold in a real incompressible quantum Hall fluid.

As a byproduct we show that the diamagnetic currents, which are located at the boundary of a real, finite quantum Hall sample, and, in general, all degrees of freedom living on that boundary, must be described by a chiral conformal field theory compatible with the topological field theory describing the fluid in the bulk of the sample. We also analyse the situation when the sample has a constriction allowing for tunnelling processes between dynamical modes living on two opposite boundaries. We suggest two experiments which could elucidate properties of the incompressible quantum Hall fluid.

In the second part we introduce a topological field theory which is a higher-dimensional generalization of three-dimensional Chern-Simons theory. The fields are generalized connections on a principal bundle over some manifold; typical observables are generalized Wilson loops, which take values in the string cohomology of that manifold. This field theoretical model relies on the Hamiltonian BRST formalism, for even-dimensional manifolds, and on the Lagrangian BV formalism, for odd-dimensional manifolds.

The main result is a cohomological interpretation of string topology. By string topology one means string homology furnished with a bracket operation; for even/odd dimensional manifolds, this bracket is even/odd. The bracket on string homology defines a cobracket on string cohomology. We show that the cobracket of generalized Wilson loops is easily determined using ingredients of the topological field theory model, provided that the structure group of the principal bundle is chosen to be  $GL(n, \mathbb{C})$ .

## Zusammenfassung

Gegenstand dieser Abhandlung ist topologische Feldtheorie. Wir untersuchen eine physikalische und eine mathematische Anwendung.

Im ersten Teil wird diskutiert, wie topologische Feldtheorie im Rahmen der Physik des Quanten Hall Effektes angewendet werden kann. In diesem Zusammenhang ist die Bezeichnung topologische Feldtheorie ein anderer Name für "Gummibändli" (Tensor) Kategorie. Ein solches feldtheoretisches Modell beschreibt universelle (langreichweitige) Eigenschaften einer inkompressiblen Quanten Hall Flüssigkeit (das heisst, eines zwei-dimensionalen Elektron Gases, welches den Quanten Hall Effekt aufweist).

Das Hauptresultat ist ein explizites Rezept, um Modelle zu konstruieren, die bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllen. Diese Bedingungen entsprechen Eigenschaften, die für eine wahre inkompressible Quanten Hall Flüssigkeit zutreffen sollten.

Als Nebenresultat zeigen wir, dass die diamagnetischen Randströme einer wahren, endlichen Quanten Hall Probe, und allgemeiner alle Randfreiheitsgrade, durch eine chirale konforme Feldtheorie zu beschreiben sind; diese Theorie muss mit der topologischen Theorie, die das Innere der Probe beschreibt, kompatibel sein. Zusätzlich analysieren wir die Anordnung, bei der die Probe einen Engpass aufweist; "Tunnelprozesse" zwischen dynamischen, auf den beiden gegenüberstehenden Ränder lokalisierten Moden sind dann möglich. Wir stellen zwei Experimente vor, die Eigenschaften der inkompressiblen Quanten Hall Flüssigkeit aufzeigen könnten.

Im zweiten Teil führen wir eine topologische Feldtheorie ein, die einer höher-dimensionalen Verallgemeinerung der drei-dimensionalen "Chern-Simons" Theorie entspricht. Die Felder sind verallgemeinerte Zusammenhänge auf einem Prinzipalbündel über einer Mannigfaltigkeit; typische Observablen sind verallgemeinerte "Wilson Schleifen", die Werte in der String Kohomologie der Mannigfaltigkeit annehmen. Das feldtheoretische Modell basiert auf dem Hamiltonschen BRST Formalismus, falls die Mannigfaltigkeit gerade Dimension hat, und auf dem Lagrangeschen BV Formalismus, falls die Mannigfaltigkeit ungerade Dimension hat.

Das Hauptresultat ist eine kohomologische Interpretation der String Topologie. Damit meint man String Homologie mit der zusätzlichen Struktur einer Klammeroperation; diese ist gerade/ungerade, je nach dem, ob die Mannigfaltigkeit gerade/ungerade Dimension hat. Diese Klammeroperation definiert eine Koklammeroperation auf der String Kohomologie. Wir zeigen, dass die Koklammer angewandt auf verallgemeinerte Wilson Schleifen mit Mitteln der topologischen Feldtheorie zu bestimmen ist, falls die Strukturgruppe des Prinzipalbündels  $GL(n, \mathbb{C})$  ist.