DISS. ETH No. 14672, 2002

Complexity of Triangulation

A dissertation submitted to the
Swiss Federal Institute of Technology, ETH Zürich
for the degree of Doctor of Technical Sciences

presented by
Alexander Below
M.Sc. Operations Research, Cornell University, U.S.A.
born 19 June 1974 in Berlin, Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, TU München, examiner
Prof. Dr. Peter Gritzmann, TU München, co–examiner
Prof. Dr. Emo Welzl, ETH Zürich, co–examiner

Abstract

In this thesis we consider the complexity of finding subdivisions of polytopes and polytope complexes with certain extremal properties. Subdivisions will include dissections (subdivisions into simplices with vertices among the polytope vertices such that no two simplices intersect in their relative interiors) and triangulations (dissections that form a simplicial complex). Extremal will always mean having a minimal or maximal number of full-dimensional simplices.

In the first part we consider minimal subdivisions. The main result is that it is NP-hard to find the minimal triangulation of 3-dimensional polytopes. We also investigate the relations of minimal triangulations, minimal dissections and minimal triangulations using additional interior points in this context.

In the second part we consider maximal triangulations. The problem of finding a maximal boundary triangulation over all realizations of a polytope, i.e. of all polytopes having the same combinatorial face structure, will turn out very hard, as hard as solving systems of polynomial equations and inequalities — at least NP-hard.

Using the same techniques we were also able to find interesting results about the realization spaces of polytopes: There are 4-polytopes any realization of which has a certain polygon as a face, and the shape of this polygon is prescribed up to projective equivalence. We will show that this result is best possible in some ways and extend it to higher dimensions.

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die algorithmische Komplexität des Problems, gewisse extremale Unterteilungen von Polytopen und Polytopkomplexen zu finden. Die Unterteilungen umfassen simpliziale Zerlegungen (Unterteilungen der Polytope in Simplizes, deren Ecken auch Ecken der Polytope sind, sodass sich nie zwei Simplizes im relativen Inneren schneiden) und Triangulierungen (simpliziale Zerlegungen, die einen Simplizialkomplex bilden). Extremal heisst für uns eine minimale oder maximal Anzahl von volldimensionalen Simplizes.

Der erste Teil ist minimalen Zerlegungen gewidmet. Als Hauptergebnis zeigen wir, dass es NP-schwer ist, die minimal Triangulierung eines 3-dimensionalen Polytops zu finden. Ausserdem untersuchen wir die damit zusammenhängenden Beziehungen von minimalen Triangulierungen, minimalen simplizialen Zerlegungen und minimalen Triangulierungen, die zusätzliche innere Punkte verwenden. Dabei wird klar werden, wie stark die Annahme eines Simplizialkomplexes in diesem Zusammenhang ist.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit maximalen Triangulierungen. Das Problem, maximale Triangulierungen des Polytoprands über alle Realisierungen zu finden, d.h. wenn wir alle Polytope mit derselben kombinatorischen Seitenstruktur betrachten, stellt sich als sehr schwer heraus, so schwer, wie es ist ein System von Polynomgleichungen und -ungleichungen zu lösen — mindestens NP-schwer.

Wir benutzen die gleichen Techniken dazu, weitere Fragen in der Theorie der Realisationsräume von Polytopen zu beantworten. Zum Beispiel gibt es 4-dimensionale Polytope, die in jeder Realisierung ein gewisses Polygon als Seitenfläche haben, und diese Seitenfläche wird in jeder Realisierung bis auf projektive Äquivalenz die gleiche Form haben. Wir werden zeigen, dass dieses Resultat auf gewisse Art bestmöglich ist, und es auf höhere Dimensionen verallgemeinern.