

# Analytische Lösung des Schneedruckproblems an der Wand

**Report**

**Author(s):**

Bader, Hans-Peter

**Publication date:**

1995

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004438375>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

# Analytische Lösung des Schneedruck- problems an der Wand

Hans-Peter Bader

Arbeit entstanden 1995, im Anschluss an Arbeiten am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung, Weissfluhjoch, Davos

---

## Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung.....	3
2.	Problemstellung.....	4
2.1.	Grundgleichungen.....	4
2.1.1.	Vereinfachungen.....	4
2.1.2.	Gleichungen.....	4
2.1.3.	Randbedingungen.....	5
2.1.4.	Parameter.....	5
2.1.5.	Skalierung.....	5
2.2.	Gleichungen für die Deformationsgeschwindigkeiten.....	6
2.2.1.	Partikuläre inhomogene Lösung.....	7
2.2.2.	Allgemeine homogene Lösung.....	7
3.	Bucher'sche Näherung.....	7
3.1.	Normalspannung.....	8
3.1.1.	Lösung.....	8
3.1.2.	Gesamtkraft auf die Wand.....	9
3.1.3.	Bemerkungen.....	9
3.2.	Schubspannung.....	9
3.2.1.	Gesamtschubspannung auf die Wand.....	10
3.2.2.	Bemerkung.....	10
4.	Analytische Lösung.....	10
4.1.	Frühere Arbeiten.....	10
4.2.	Lösungsansatz.....	11
4.2.1.	Airy-Spannungsfunktion $\chi(x,y)$ .....	12
4.3.	Fundamentallösungen.....	12
4.3.1.	Randbedingungen (homogene).....	13
4.3.2.	Erfüllung der Randbedingungen.....	14
4.4.	Allgemeine Lösung der homogenen Randbedingungen und Erfüllen der inhomogenen Randbedingungen.....	17
4.4.1.	Unbekannte Koeffizienten in (55).....	18
4.4.2.	Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten:.....	18
4.4.3.	Anwendung auf Gleichung (56).....	19
5.	Beispiele, Resultate und Diskussion.....	20
5.1.	Reduktion der Parameterzahl.....	20
5.2.	Beispiele für senkrechte Wand ohne Gleiten.....	21
5.2.1.	Skalierungsparameter.....	21
5.2.2.	Numerische Resultate.....	22
5.2.3.	Diskussion der Resultate.....	23
6.	Zusammenfassung.....	27
6.1.	Problemstellung.....	27
6.2.	Lösungsansatz.....	27
6.3.	Allgemeine homogene Lösung.....	28
6.3.1.	Berechnung der Fundamentallösungen.....	28
6.3.2.	Numerische Bestimmung der k-Werte und Koeffizienten.....	28
6.4.	Erfüllen der inhomogenen Randbedingung (15d),(15e).....	28
7.	Literatur.....	29

## 1. Einleitung

Für die Dimensionierung von Lawinverbauungen ist die Kenntnis der Kräfte und Verformungen in einer Schneedecke von entscheidender Bedeutung

Schon in den Anfängen der Schneemechanik wurde versucht, den Schneedruck auf ein Stützwerk zu berechnen. Dabei wurden verschiedene analytische Näherungslösungen entwickelt. [1], [2].

Sehr schön analysiert und diskutiert ist der ganze Problemkreis in „Snow Forces“ von B. Salm[3]. In den letzten 10 Jahren gewannen numerische Lösungen immer mehr an Bedeutung [4], [5]. Der Vorteil der numerischen Methoden wie Finite Elemente oder Boundary Elemente liegt darin, dass damit auch sogenannte „realistische“ Fälle behandelt werden können. Realistisch heisst dabei, dass Schneestruktur, Schichtgeometrie, Bodengeometrie, Randbedingungen (z.B. Gleiten), Stoffgleichungen etc. berücksichtigt resp. variiert werden können.

Andererseits haben analytische Lösungen den Vorteil, dass sie den Einfluss der verschiedenen Parameter direkt zeigen, während dem bei numerischen Verfahren der Einfluss der Parameter nur durch viele separate Rechnungen indirekt erfasst werden kann. Ausserdem sind analytische Lösungen sehr wichtig, um die Genauigkeit von approximativen numerischen Methoden zu erfassen.

Ziel dieser Arbeit ist es das idealisierte 2-dimensionale Stauprobem an der Wand analytisch zu lösen.

## 2. Problemstellung

Die Problemstellung ist in Fig.1 skizziert. Eine homogene Schneeschiicht staut sich an einer Wand auf einem idealen Hang.

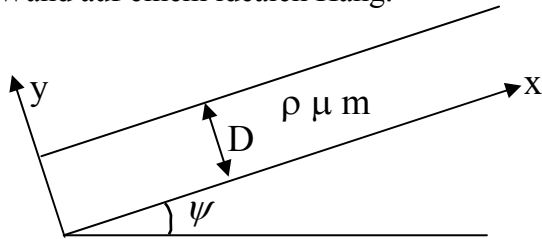


Fig.1 Stauproblem der homogenen Schneeschiicht

### 2.1. Grundgleichungen

Die physikalischen Grössen, die die Schneeschiicht vollständig beschreiben sind:

$V_i$  : Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit

$\sigma_{ij}$  : Komponenten des Spannungstensors

$\varepsilon_{ij}$  : Komponenten des Deformationsratentensors

#### 2.1.1. Vereinfachungen

Folgende Approximationen werden benützt

- 1) Vernachlässigung der kinetischen Deformationsenergie
- 2) Infinitesimale Deformationsraten
- 3) Linear viskose Stoffgleichung
- 4) Translationssymmetrie in z- Richtung

Für kriechende Schneebewegungen, „weit weg“ vom Entstehen von Schneebrettern sind diese Ausnahmen keine grosse Einschränkung.

#### 2.1.2. Gleichungen

**Kinematik (infinitesimale Deformationsraten)**

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} [V_{i,j} + V_{j,i}] \quad (1)$$

**Impulssatz:**

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad (2)$$

**Stoffgleichung:**

$$\sigma_{i,j} = 2\mu \left[ \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{m-2} \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} \right] \quad (3)$$

**Dabei gilt:**

$\rho$  : Schneedichte

$F_i$  : Gravitationskraft

- $\mu$  : Viskosität  
 $m$  : Querzahl  
 $\delta_{ij}$  : Kroneckerdelta,  
 $\cdot, j$  : partielle Ableitung nach  $x_j$

In der ganzen Arbeit wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet: über doppelt vorhandene Indizes wird summiert.

### 2.1.3. Randbedingungen

#### Boden:

$$V_{\perp}(x,0) = V_y(x,0) = 0 \quad : \text{keine Setzung} \quad (4a)$$

$$\tau(x,0) = \mu_r V_{\parallel}(x,0) \quad : \text{Haften oder Gleiten} \quad (4b)$$

#### Oberfläche:

$$\bar{p}(x,D) = 0 \quad : \text{spannungsfreie Oberfläche} \quad (5)$$

wobei

$$\bar{p} = \vec{\sigma} * \vec{n} \quad : \vec{n} \text{ äussere Oberflächennormale}$$

#### Wand:

$$V_{\perp}(0,y) = V_x(0,y) = 0 \quad : \text{Stauwirkung der Wand} \quad (6a)$$

$$V_{\parallel}(0,y) = V_y(0,y) = 0 \quad : \text{Haftung an der Wand} \quad (6b)$$

#### Asymptotisch: $x \rightarrow \infty$

$$\vec{V}(x,y) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \vec{V}_{id}(x,y) \quad : \text{Weit weg von der Wand gilt die ideale Hanglösung} \quad (7)$$

#### Dabei bedeuten:

$V_{\perp}, V_{\parallel}$  : Normal- und Tangential- (Parallel) Komponente der Deformationsgeschwindigkeit

$\tau$  : Schubspannung:  $\tau = p_{\parallel}$

$\bar{p}$  : Vektor der Oberflächenspannung

$\mu_r$  : Reibungviskosität

### 2.1.4. Parameter

Die Parameter  $\rho, \mu, m, \psi, D$  und  $\mu_r$  können in geometrische ( $D, \psi$ ) und stoffliche ( $\rho, \mu, m, \mu_r$ ) aufgeteilt werden. Die Reibungviskosität  $\mu_r$  des viskosen Reibungsgesetzes kann durch die Viskosität  $\mu$  ausgedrückt werden, (siehe [3] S.84):

$$\mu_r = \frac{\mu}{d};$$

wobei  $d$  dann die Bedeutung einer Grenzschicht hat.

### 2.1.5. Skalierung

Ähnlich wie in Ref. [6] kann gezeigt werden, dass  $\rho, \mu$  und  $D$  „Skalierungsparameter“ sind und nur  $m, \Psi$  und  $\mu_r$  „echte Parameter“ sind. D.h.  $\rho, \mu$  und  $D$  haben nur Skalierungseinfluss auf die Lösung der Gleichungen.

Gleichungen (1) bis (3) zusammen mit den Randbedingungen (4) bis (7) bestimmen die physikalischen Grössen  $V_i$  resp.  $\sigma_{ij}$  vollständig.

Oft geht man dabei so vor, dass zuerst die Gleichungen und Randbedingungen auf die Deformationsgeschwindigkeiten umgeschrieben werden. Anschliessend wird das entstehende System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen gelöst.

## 2.2. Gleichungen für die Deformationsgeschwindigkeiten

Die Translationssymmetrie in z- Richtung bedeutet  $V_z = \text{konst.}$  Resp.  $V_z = 0$ , was nichts anderes ist als der zweidimensionale Verformungszustand.

Für diesen gilt für den Deformationsratentensor gemäss (1)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} V_{x,x} & \frac{V_{x,y} + V_{y,x}}{2} & 0 \\ \frac{V_{x,y} + V_{y,x}}{2} & V_{y,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Die Stoffgleichung (3) kann in diesem Fall wie in Salm [3] (Gleichungen (53)-(56)) geschrieben werden:

$$V_{x,x} = \frac{m-1}{2\mu m} \left[ \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{m-1} \right] \quad (9a)$$

$$V_{y,y} = \frac{m-1}{2\mu m} \left[ \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx}}{m-1} \right] \quad (9b)$$

$$V_{x,y} + V_{y,x} = \frac{\sigma_{x,y}}{\mu} \quad (9c)$$

Aus dem Impulssatz (2) folgt:

$$2 \frac{m-1}{m-2} V_{x,xx} + V_{x,yy} + \frac{m}{m-2} V_{y,xy} = \frac{\rho g}{\mu} \sin \psi \quad (10a)$$

$$2 \frac{m-1}{m-2} V_{y,yy} + V_{y,xx} + \frac{m}{m-2} V_{x,xy} = \frac{\rho g}{\mu} \cos \psi \quad (10b)$$

Die Gleichungen (9) werden sich bei der Diskussion der Bucher'schen Näherung als praktisch erweisen.

Das Problem ist nun aber die Lösung des linearen, inhomogenen partiellen Differentialgleichungssystems (10) mit den Randbedingungen (4)-(7). Wie bei allen linearen DGL-Systemen ist die allgemeine Lösung die Superposition einer partikulären Lösung mit der allgemeinen homogenen Lösung. Die richtige Lösung erhält man dann durch Erfüllen der Randbedingungen.

Daraus folgt der Ansatz:

$$\vec{V} = \vec{V}^{(H)} + \vec{V}^{(P)} \quad (11)$$

mit:

$\vec{V}^{(H)}$  : allgemeine homogene Lösung

$\vec{V}^{(P)}$  : partikuläre inhomogene Lösung

### 2.2.1. Partikuläre inhomogene Lösung

Als partikuläre inhomogene Lösung bietet sich die asymptotische Lösung, d.h. die Lösung der ungestörten Schneedecke (ohne Wand) an: (neutrale Zone)

$$V_x^{(P)} = \frac{\rho g}{2\mu} \sin \psi \cdot y(y-2D) - \frac{\rho g D}{\mu_r} \sin \psi \quad (12a)$$

$$V_y^{(P)} = \frac{m-2}{m-1} \frac{\rho g}{4\mu} \cos \psi \cdot y(y-2D) \quad (12b)$$

$$\sigma_{xx}^{(P)} = \frac{\rho g}{m-1} \cos \psi (y-D) \quad (13a)$$

$$\sigma_{xy}^{(P)} = \rho g \sin \psi (y-D) \quad (13b)$$

$$\sigma_{yy}^{(P)} = \rho g \cos \psi (y-D) \quad (13c)$$

### 2.2.2. Allgemeine homogene Lösung

Aus dem Ansatz (11) folgt, dass die homogene Lösung folgende Differentialgleichungen und Randbedingungen erfüllen muss: (Impulssatz)

$$2 \frac{m-1}{m-2} V_{x,xx}^{(H)} + V_{x,yy}^{(H)} + \frac{m}{m-2} V_{y,xy}^{(H)} = 0 \quad (14a)$$

$$2 \frac{m-1}{m-2} V_{y,yy}^{(H)} + V_{y,xx}^{(H)} + \frac{m}{m-2} V_{x,xy}^{(H)} = 0 \quad (14b)$$

**Randbedingungen:**

$$V_y^{(H)}(x,0) = 0 \quad (15a)$$

$$\sigma_{xy}^{(H)}(x,0) = \mu_r V_x^{(H)}(x,0) \quad (15b)$$

$$\vec{p}^{(H)}(x,D) = 0 \quad (15c)$$

$$V_x^{(H)}(0,y) = -V_x^{(P)}(0,y) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \psi \cdot y(y-2D) + \frac{\rho g D}{\mu_r} \sin \psi \quad (15d)$$

$$V_y^{(H)}(0,y) = -V_y^{(P)}(0,y) = -\frac{m-2}{m-1} \frac{\rho g}{4\mu} \cos \psi \cdot y(y-2D) \quad (15e)$$

$$\vec{V}^{(H)}(x,y) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (15f)$$

Die Gleichung (14) ist einfach der homogene Teil von Gleichung (10) und die Randbedingungen (15) folgen sofort aus (4)-(7) und (11)-(13).

## 3. Bucher'sche Näherung

Diese ist ausführlich und klar in Salm [3] diskutiert. Als Vergleichslösung mit der exakten Lösung soll hier nochmals das Wichtigste behandelt werden. Zur Berechnung von Normal- und Schubspannung auf die Wand werden je verschiedene Vereinfachungen der Gleichungen (9) verwendet.



### 3.1. Normalspannung

In Gleichung (9a) wird  $\sigma_y$  und in Gleichung (9c)  $V_{y,x}$  vernachlässigt. Anstelle (14a) erhält man die folgende Gleichung:

$$2 \frac{m}{m-1} V_{x,xx} + V_{x,yy} = 0 \quad (16)$$

Und die Randbedingungen (15) werden im Falle  $\mu_r = \infty$  zu :

$$V_y(x,0) = 0 \quad (17a)$$

$$\sigma_{xy}(x,D) = \mu_r V_{x,y}(x,D) = 0 \quad (17b)$$

$$V_x(0,y) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \psi \cdot y(y-2D) \quad (17c)$$

$$V_x(x,y) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (17d)$$

Die Komponente  $V_y$  wird für die Berechnung der Normalspannung auf die Wand gar nicht betrachtet. Man beachte, dass zwar mit  $V_y \equiv 0$  die Randbedingungen, nicht aber Gleichung (14b) erfüllt ist. (Näherung!).

Der Einfachheit halber wurde und wird der Index (H) weggelassen.

#### 3.1.1. Lösung

Gleichung (16) mit Randbedingung (17) wird durch Separation und Superposition gelöst, wie schon in 2.2 beschrieben:

##### Allgemeine homogene Lösung:

Durch Separation  $V_x(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ , lösen der partiellen Differentialgleichung (16) und Erfüllung der homogenen Randbedingungen (17a), (17b) und (17d) erhält man die sogenannte Fundamentallösungen:

$$V_x^{(n)}(x,y) = e^{-\sqrt{\frac{m-1}{2m}} k_n x} * \sin(k_n y) \quad (18a)$$

$$k_n = \frac{\pi}{2D} (2n+1) \quad n = 0,1,2,\dots \quad (18b)$$

Die allgemeine homogene Lösung ist eine Superposition dieser Fundamentallösungen:

$$V_x(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n V_x^{(n)}(x,y) \quad (19)$$

Die „richtige“ homogene Lösung erhält man durch Erfüllung der letzten (inhomogenen) Randbedingung (17c). Es muss also gelten:

$$V_x(0,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n V_x^{(n)}(0,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(k_n y) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \psi \cdot y(y-2D) \quad (20)$$

Die Funktionen  $\sin(k_n y)$  bilden ein Orthogonalsystem der Funktionen im Intervall  $[0,D]$  bezüglich des Skalarproduktes:

$$(f,g) = \int_0^D f(x)g(x)dx \quad (21)$$

Es gilt nämlich:

$$\int_0^D \sin(k_n y) \sin(k_m y) dy = \frac{D}{2} \delta_{nm} \quad (22)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_n$  folgen nun durch Multiplikation der Gleichung (20) mit  $\sin(k_n y)$  und anschließender Integration über das Intervall  $[0, D]$ .

Wegen  $\int_0^D y(y-2D) \sin(k_n y) dy = \frac{-16D^3}{\pi^3 (2n+1)^3}$  folgt daraus:

$$\alpha_n = \frac{\rho g \sin \psi}{\mu} * \frac{16D^2}{\pi^3 (2n+1)^3} \quad (23)$$

Daraus ergibt sich für die endgültige Lösung der Gleichungen (16) und (17): („Störlösung“)

$$V_x(x, y) = \frac{\rho g \sin \psi}{\mu} * \frac{16D^2}{\pi^3} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\sqrt{\frac{m-1}{2m}} k_n x} \sin(k_n y) \quad (24)$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\sqrt{\frac{2m}{m-1}} \rho g \sin \psi * \frac{8D}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\sqrt{\frac{m-1}{2m}} k_n x} \sin(k_n y) \quad (25)$$

Für die gesamte Lösung in der Bucher'schen Näherung kommt noch der inhomogene Teil (12),(13) hinzu.

### 3.1.2. Gesamtkraft auf die Wand

Es gilt:

$$p_x^{tot} = \int_0^D \sigma_{xx}(0, y) dy = -\sqrt{\frac{2m}{m-1}} \rho g \sin \psi * \frac{16D^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad (26)$$

Die Reihe in Gleichung (26) ist bekannt unter dem Namen

$$\lambda(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

konvergiert sehr schnell und ist z.B. tabelliert in Ref. [7] S.803/812:  $\lambda(3) = 1.05179979$ .  
Wiederum kommt natürlich zu Gleichung (26) noch der Beitrag (13a) der „Setzung“ hinzu.

### 3.1.3. Bemerkungen

- Gleichungen (24)-(26) sind die exakten Lösungen für die Problemstellungen (16)-(17). Bucher approximiert hingegen die Randbedingung (17c) durch einen sinusförmigen Verlauf. Der Unterschied in  $p_x^{tot}$  ist 8.5% (vgl. Gl.(26)) mit Gl.(61) in REF.[3]
- Diese Herleitung wurde ausführlich diskutiert, weil das gleiche Verfahren: Separation → Fundamentallösung → Superposition → Erfüllen der inhomogenen Randbedingungen auch im exakten Fall benützt wird.

## 3.2. Schubspannung

In Gleichung (9a) wird  $V_{x,x}=0$  gesetzt und in Gleichung (9c)  $V_{x,y}$  vernachlässigt. Anstelle (14b) ergibt sich folgende Gleichung:

$$2 \frac{m-1}{m-2} V_{y,yy} + V_{y,xx} = 0 \quad (27)$$

Die Randbedingungen (15) werden für  $\mu_r = \infty$  zu:

$$V_y(x, 0) = 0 \quad (28a)$$

$$\sigma_{yy}(x, D) = 0 \quad (28b)$$

$$V_y(0, y) = -\frac{m-2}{m-1} \frac{\rho g}{4\mu} \cos\psi \cdot y(y-2D) \quad (28c)$$

$$\vec{V}(x, y) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (28d)$$

Analog wie bei der Normalspannung wird hier die Komponente  $V_x$  gar nicht betrachtet. (Näherung!) Die Lösung ist völlig analog dem Fall der Normalspannung:

**Fundamentallösung:**

$$V_x^{(n)}(x, y) = e^{-\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}} k_n x} * \sin(k_n y) \quad (29a)$$

$$k_n = \frac{\pi}{2D} (2n+1) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29b)$$

**Wiederum durch Orthogonalentwicklung ergibt sich:**

$$V_y(x, y) = \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\rho g \cos\psi}{\mu} \frac{16D^2}{\pi^3} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} * e^{-\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}} k_n x} * \sin(k_n y) \quad (30)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\sqrt{\frac{m-2}{2(m-1)}} * \rho g \cos\psi * \frac{8D}{\pi^2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} * e^{-\sqrt{\frac{2(m-1)}{m-2}} k_n x} * \sin(k_n y) \quad (31)$$

### 3.2.1. Gesamtschubspannung auf die Wand

$$p_y^{tot} = \int_0^D \sigma_{xy}(0, y) dy = -\sqrt{\frac{m-2}{2(m-1)}} \rho g \cos\psi * \frac{16D^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad (32)$$

Man vergleiche wiederum mit Salm [3] Gleichung (62).

### 3.2.2. Bemerkung

Würde anstelle (28b)  $\sigma_{x,y}(x, D) = 0$  gefordert, so wäre die entsprechende Reihe in der Formel (32) logarithmisch divergent, wie eine detaillierte Rechnung zeigt.

## 4. Analytische Lösung

### 4.1. Frühere Arbeiten

Im Zusammenhang mit Spannungsproblemen an endlichen oder halbumendlichen Streifen, entstanden in der 50er und 60er Jahren eine ganze Reihe von analytischen Arbeiten. Horvay und Born [8] benützten exakte und Näherungsmethoden, Benthem [9] die Laplace-

Transformation und Johnson und Little [10] die Methode der Eigenfunktion zur Lösung von solchen Problemen.

Die Probleme werden dabei gemäss der Randbedingungen bei  $x=0$  in folgende drei Klassen eingeteilt:

**a) gemischte RB:**  $V_x(0, y), \sigma_{xy}(0, y)$  gegeben

$V_y(0, y), \sigma_{xx}(0, y)$  gegeben

**b) Spannungs-RB:**  $\sigma_{xx}(0, y), \sigma_{xy}(0, y)$  gegeben

**c) Verschiebungs-RB:**  $V_x(0, y), V_y(0, y)$  gegeben

Eine schöne Analyse der Problemstellung und Lösung bringen Johnson und Little [10]. Dort wird der Fall a) explizit gelöst, währendem Fall b) auf ein  $\infty$ -dimensionales lineares Gleichungssystem führt. Für Fall c) wird auf Fall b) verwiesen.

Yoshida [11] befasste sich auch mit diesen Problemen in Zusammenhang mit Schnee, indem er die Methode der Eigenfunktion benützte. Die Eigenwertgleichung und der Ansatz für die Eigenfunktionen werden diskutiert, aber nicht auf das Wandproblem angewandt.

Jaccard [12] schliesslich machte einen Lösungsansatz mit der Methode der Laplace-Transformation. Die Annahmen  $V_{x,x}(0, y) = V_{y,x}(0, y) = 0$  würden wegen  $V_{x,y}(0, y) = V_{y,y}(0, y) = 0$  Spannungsfreiheit an der Wand bedeuten, was sicher falsch ist. Ohne diese Annahmen werden die Gleichungen sehr kompliziert und müssten ähnlich wie in Ref. [9] angepackt werden.

**Zusammenfassend lässt sich folgendes sagen:**

- (1) Es gibt zwei Methoden, die Methode der Eigenfunktionen und die Methode der Laplace-Transformation. Beide führen auf  $\infty$ -dimensionale Gleichungssysteme für die „Entwicklungskoeffizienten“.
- (2) Die Lösung mit Eigenfunktionen ist formal durchgeführt in [10] und kann im Prinzip auf das Stauproblem angewendet werden.

## 4.2. Lösungsansatz

Die Lösung via Eigenfunktionen ist einfacher als die Methode der Laplace-Transformation. Sie wurde bereits in Kapitel 3 illustriert und führt in drei Schritten: Separation  $\rightarrow$  Fundamentallösungen  $\rightarrow$  Superposition zur Lösung.

Für das Stauproblem gibt es zwei Möglichkeiten: Die Lösung via Airy-Spannungsfunktion (Gleichung 4. Ordnung) oder die von Johnson [10] vorgeschlagene Lösung eines äquivalenten Systems von 4 Gleichungen 1. Ordnung.

Im allgemeinen kann es einfacher sein 4 Gleichungen 1. Ordnung anstelle einer Gleichung 4. Ordnung zu lösen. Im Falle der biharmonischen Gleichung können aber die Fundamentallösungen auf solche der harmonischen Gleichung zurückgeführt werden, was eine wesentliche Vereinfachung darstellt. Wir wählen deshalb diese Methode.

Die Problemstellung ist in den Gleichungen (14) und (15) formuliert. Wiederum lassen wir der Einfachheit halber den Index (H) für homogene Lösungen weg.

### 4.2.1. Airy-Spannungsfunktion $\chi(x,y)$

Für diese soll gelten:

$$\sigma_{xx} = \chi_{,yy} \quad (33a)$$

$$\sigma_{yy} = \chi_{,xx} \quad (33b)$$

$$\sigma_{xy} = -\chi_{,xy} \quad (33c)$$

Der Impulssatz  $\sigma_{ij,j} = 0$  ist dann automatisch erfüllt. Für die Deformationsraten folgt dann aus der „inversen“ Stoffgleichung (9).

$$V_{x,x} = \frac{1}{2\mu} \left[ \chi_{,yy} - \frac{1}{m} \Delta \chi \right] \quad (34a)$$

$$V_{y,y} = \frac{1}{2\mu} \left[ \chi_{,xx} - \frac{1}{m} \Delta \chi \right] \quad (34b)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ist dabei der Laplace-Operator.

Die Airy'sche Spannungsfunktion muss die Kompatibilitätsgleichung erfüllen:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \text{ also:}$$

$$\Delta \Delta \chi = 0$$

Diese Gleichung heisst biharmonische Gleichung.

### 4.3. Fundamentallösungen

Für die allgemeine Lösung der biharmonischen Gleichung (35) gilt:

(siehe Jaswon et al [13])

$$\chi = y\phi + \psi \quad (36a)$$

$$\chi = x\phi + \psi \quad (36b)$$

Wobei  $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$

Fundamentallösung von  $\Delta\phi = 0$ :

Diese erhält man durch den üblichen Separationsansatz:

$$\phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

Zu jedem Paar  $(k_1, k_2)$  mit  $k_1, k_2 \geq 0$  gibt es folgende 8 Lösungen der harmonischen Gleichung:

$$e^{+(k_1+ik_2)(x+iy)} \quad e^{+(k_1+ik_2)(x-iy)} \quad e^{+(k_1-ik_2)(x+iy)} \quad e^{+(k_1-ik_2)(x-iy)} \quad (37a)$$

$$e^{-(k_1+ik_2)(x+iy)} \quad e^{-(k_1+ik_2)(x-iy)} \quad e^{-(k_1-ik_2)(x+iy)} \quad e^{-(k_1-ik_2)(x-iy)} \quad (37b)$$

Die ersten vier fallen wegen der asymptotischen Randbedingung (15f) weg. Also erhält man folgende Fundamentallösungen:

$$\psi_k(z) = \alpha_1 e^{-kz} + \alpha_2 e^{-\bar{k}z} + \bar{\alpha}_2 e^{-k\bar{z}} + \bar{\alpha}_1 e^{-\bar{k}\bar{z}} \quad (38a)$$

$$\phi_k(z) = \beta_1 e^{-kz} + \beta_2 e^{-\bar{k}z} + \bar{\beta}_2 e^{-k\bar{z}} + \bar{\beta}_1 e^{-\bar{k}\bar{z}} \quad (38b)$$

Dabei wurde die komplexe Schreibweise verwendet:

$$k = k_1 + ik_2 \quad \bar{k} = k_1 - ik_2 \quad k_1, k_2 \geq 0 \quad (39a)$$

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy \quad (39b)$$

Der Querstrich z.B.  $\bar{k}$  bedeutet konjugiert komplex. Die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  sind ebenfalls komplex. Gleichungen (38) sind die allgemeinen Lösungen zu jedem Paar  $(k_1, k_2)$  in der  $k$ -Ebene. Man beachte die Wahl der Koeffizienten der Funktionen  $e^{-kz}, e^{-\bar{k}\bar{z}}$  damit  $\psi_k$  und  $\phi_k$  reell werden.

**Bemerkung:**

Anstelle der Funktion (37) könnte man genauso gut Funktionen des Typs:

$$e^{-k_1x} e^{k_2y} (\cos(k_2x) \cos(k_1y) - \sin(k_2x) \sin(k_1y)) \text{ ansetzen.}$$

Der Vorteil der komplexen Schreibweise gegenüber dieser reellen liegt darin, dass Ableitung nach  $x$  und  $y$  für Gleichung (38) einfachere Ausdrücke ergeben. Dies ist einfacher für die Erfüllung der Randbedingungen.

### 4.3.1. Randbedingungen (homogene)

Die Fundamentallösungen müssen die homogenen Randbedingungen (15a) bis (15c) erfüllen. Dies führt zu einer Gleichung für die erlaubten  $k$ -Paare und zu Bedingungen für die Koeffizienten, wie dies schon in Kapitel 3 diskutiert wurde. Für unsere Randbedingungen (15) kommt nur der Ansatz (36a) in Frage.

Begründung:

(15a)-(15c) sind vier komplexe Gleichungen für die vier komplexen Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  im Fall (36a). Im Fall (36b) führen diese Gleichungen auf Bedingungen der Form  $e^{-k_1x} [F(x, y) + x \cdot G(x, y)]_{y=0, D} = 0$

Das bedeutet nun  $F \equiv G = 0$ , d.h. jede Randbedingung führt auf 2 Gleichungen. Dieses System hat nur die triviale Lösung. Diese Begründung wird im folgenden noch klar werden.

**Für den Ansatz (36a) folgt aus (34) nach Umformungen:**

$$V_{x,x} = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,xx} - y\phi_{,xx} + 2\frac{m-1}{m}\phi_{,y} \right] \quad (40a)$$

$$V_{y,y} = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,yy} - (y\phi_{,y})_{,y} + \frac{m-2}{m}\phi_{,y} \right] \quad (40b)$$

**Durch Integration ergibt sich:**

$$V_x = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,x} - y\phi_{,x} + 2\frac{m-1}{m}i(\beta_1 e^{-kz} + \beta_2 e^{-\bar{k}z} - \bar{\beta}_2 e^{-k\bar{z}} - \bar{\beta}_1 e^{-\bar{k}\bar{z}}) \right] + f(y)$$

$$V_y = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,y} - y\phi_{,y} + \frac{m-2}{m}\phi \right] + g(x)$$

Wegen  $\sigma_{xy} = \mu(v_{x,y} + V_{y,x})$  sind die Funktionen  $f(y)$  und  $g(x)$  reine Konstanten.

**Damit erhält man endgültig:**

$$V_x = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,x} - y\phi_{,x} + 2\frac{m-1}{m}i(\beta_1 e^{-kz} + \beta_2 e^{-\bar{k}z} - \bar{\beta}_2 e^{-k\bar{z}} - \bar{\beta}_1 e^{-\bar{k}\bar{z}}) \right] + c_1 \quad (41a)$$

$$V_y = \frac{1}{2\mu} \left[ -\psi_{,y} - y\phi_{,y} + \frac{m-2}{m} \phi \right] + c_2 \quad (41b)$$

Damit können die Randbedingungen (15a)-(15c) in Gleichungen für die Funktionen  $\psi_k, \phi_k$  ausgedrückt werden. Es folgt:

$$\left[ -\psi_{,y} + \frac{m-2}{m} \phi \right]_{y=0} = 0 \quad c_2 = 0 \quad (42a)$$

$$\left[ -\psi_{,x} + 2i \frac{m-1}{m} (\beta_1 - \bar{\beta}_2) e^{-kx} + (\beta_2 - \bar{\beta}_1) e^{-\bar{k}x} \right] = \frac{2\mu}{\mu_r} \left[ -\psi_{,xy} - \phi_{,x} \right]_{y=0} \quad (42b)$$

$$\left[ \psi_{,xx} + D\phi_{,xx} \right]_{y=D} = 0 \quad (42c)$$

$$\left[ \psi_{,xy} + D\phi_{,xy} + \phi_{,x} \right]_{y=D} = 0 \quad (42d)$$

Die Konstante  $c_1 = -\frac{\tau_0}{\mu_r}$  ist die allfällige Konstante im Reibungsgesetz  $\sigma_{xy} = \mu_r V_x + \tau_0$ .

### 4.3.2. Erfüllung der Randbedingungen

#### 4.3.2.1. 1.Fall: $k = k_1 > 0 \quad k_2 = 0$ (reelle k-Werte)

In diesem Fall werden die Funktionen (38) zu:

$$\psi_k(x, y) = e^{-kx} [a_1 \cos(ky) + a_2 \sin(ky)] \quad (43a)$$

$$\phi_k(x, y) = e^{-kx} [b_1 \cos(ky) + b_2 \sin(ky)] \quad (43b)$$

Die Randbedingungen (42) ergeben folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{k} \frac{m-2}{m} & 0 \\ -1 & \frac{2\mu k}{\mu_r} & \frac{2\mu}{\mu_r} & \frac{2}{k} \frac{m-1}{m} \\ \cos(kD) & \sin(kD) & D \cos(kD) & D \sin(kD) \\ \sin(kD) & -\cos(kD) & (D \sin(kD) - \frac{\cos(kD)}{k}) & (-D \cos(kD) - \frac{\sin(kD)}{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Dabei wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$  gewählt. Dieses Gleichungssystem hat nur eine Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Eine Rechnung ergibt:

$$\left(3 - \frac{4}{m}\right) \cos^2(kD) - (kD)^2 + \left(\frac{m-2}{m}\right)^2 - \frac{4\mu}{\mu_r D} (kD) \frac{m-1}{m} [kD + \sin(kD) \cos(kD)] = 0 \quad (45)$$

Für den Fall  $\mu_r = \infty$  stimmt diese Bedingung mit Yoshida [11] überein. Im Falle Determinante (...) = 0 können alle Koeffizienten auf  $a_1$  bezogen werden. Wiederum ergibt eine Rechnung:

$$a_2 = -\kappa_1 \frac{u + \sin u \cos u}{u^2 + \kappa_1 \sin^2 u} a_1 \quad (46a)$$

$$b_1 = -\frac{u + \sin u \cos u}{u^2 + \kappa_1 \sin^2 u} \kappa a_1 \quad (46b)$$

$$b_2 = \frac{\kappa_1 \sin^2 u + \kappa_1 \sin u \cos^2 u}{u^2 + \kappa_1 \sin^2 u} \kappa a_1 \quad (46c)$$

$$\text{wobei: } \kappa_1 = \frac{m-2}{m} \quad (47a)$$

$$\kappa_2 = 2 \frac{m-1}{m} \quad (47b)$$

$$u = kD \quad (47c)$$

**Für die Deformationsraten und Spannungen ergibt sich aus (33) und (41):**

$$V_x = \frac{k}{2\mu} e^{-kx} \left[ \left( a_1 - \frac{\kappa_2 b_2}{k} + y b_1 \right) \cos(ky) + \left( a_2 + \frac{\kappa_2 b_1}{k} + y b_2 \right) \sin(ky) \right] \quad (48a)$$

$$V_y = \frac{k}{2\mu} e^{-kx} \left[ - \left( a_2 - \frac{\kappa_1 b_1}{k} + y b_2 \right) \cos(ky) + \left( a_1 + \frac{\kappa_1 b_2}{k} + y b_1 \right) \sin(ky) \right] \quad (48b)$$

$$\sigma_{xx} = -k^2 e^{-kx} \left[ \left( a_1 - \frac{2b_2}{k} + y b_1 \right) \cos(ky) + \left( a_2 + \frac{2b_1}{k} + y b_2 \right) \sin(ky) \right] \quad (48c)$$

$$\sigma_{yy} = k^2 e^{-kx} \left[ \left( a_1 + y b_1 \right) \cos(ky) + \left( a_2 + y b_2 \right) \sin(ky) \right] \quad (48d)$$

$$\sigma_{xy} = k^2 e^{-kx} \left[ \left( a_2 + \frac{b_1}{k} + y b_2 \right) \cos(ky) - \left( a_1 - \frac{b_2}{k} + y b_1 \right) \sin(ky) \right] \quad (48e)$$

Diese Funktionen bilden also die erste Fundamentallösung. Gleichung (45) hat zwischen  $kD=0$  und  $kD=\frac{\pi}{2}$  eine Lösung. Dies folgt sofort aus den Funktionswerten des linken Teils der Gleichung (45) bei  $kD=0$  und  $kD=\frac{\pi}{2}$ :

$$kD = 0 : \left( 3 - \frac{4}{m} \right)^2 + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 > 0$$

$$kD = \frac{\pi}{2} : \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \left[ 1 + \frac{4\mu}{\mu_r D} \frac{m-1}{m} \right] < 0$$

Gleichzeitig ist dies die einzige Lösung für reelle  $k$ -Werte

### Numerische Bestimmung:

Die transzendente Gleichung (45) kann sehr einfach (z.B. mit Newton-Raphson) gelöst werden. In Kapitel 5 werden einige Beispiele dazu gezeigt.

### Vergleich mit Bucher'schen Näherung:

Für die Bucher'sche Näherung gilt  $kD=\frac{\pi}{2}$ . Die exakte Lösung erfüllt  $kD<\frac{\pi}{2}$ . Sie klingt also langsamer ab als die Bucher'sche.

### Bemerkung:

Im Fall  $k=k_1>0$  ist es auch einfach einzusehen, dass der Ansatz  $x\phi_k + \psi_k$  keine Lösung liefert.

#### 4.3.2.2. 2. Fall $k=k_1+ik_2$ : $k_1, k_2>0$

Das Vorgehen ist analog wie im 1. Fall, nur viel aufwendiger.

Einsetzen des Ansatzes (36a) und (38) in die homogenen Randbedingungen (42) ergibt:

$$\begin{aligned} ik \left( e^{-k_1 x} e^{-ik_2 x} \right) \left[ \alpha_1 - \bar{\alpha}_2 - \frac{i}{k} \frac{m-2}{m} \beta_1 - \frac{i}{k} \frac{m-2}{m} \bar{\beta}_2 \right] \\ - i\bar{k} \left( e^{-k_1 x} e^{ik_2 x} \right) \left[ \bar{\alpha}_1 - \alpha_2 - \frac{i}{k} \frac{m-2}{m} \bar{\beta}_1 + \frac{i}{k} \frac{m-2}{m} \beta_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (49a)$$



$$e^{-k_1 x} e^{-ik_2 x} \left[ k\alpha_1 + k\bar{\alpha}_2 + 2i \frac{m-1}{m} (\beta_1 - \bar{\beta}_2) + \frac{2\mu}{\mu_r} \left[ ik^2 (\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) - k(\beta_1 + \bar{\beta}_2) \right] \right] \\ + e^{-k_1 x} e^{ik_2 x} \left[ \bar{k}\bar{\alpha}_1 + \bar{k}\alpha_2 - 2i \frac{m-1}{m} (\bar{\beta}_1 - \beta_2) + \frac{2\mu}{\mu_r} \left[ -ik^2 (\bar{\alpha}_1 - \alpha_2) - \bar{k}(\bar{\beta}_1 + \beta_2) \right] \right] = 0 \quad (49b)$$

$$k^2 e^{-k_1 x} e^{-ik_2 x} \left[ (\alpha_1 + D\beta_1) e^{-ikD} + (\bar{\alpha}_2 + D\bar{\beta}_2) e^{ikD} \right] \\ + \bar{k}^2 e^{-k_1 x} e^{ik_2 x} \left[ (\bar{\alpha}_1 + D\bar{\beta}_1) e^{ikD} + (\alpha_2 + D\beta_2) e^{-ikD} \right] = 0 \quad (49c)$$

$$ik^2 e^{-k_1 x} e^{-ik_2 x} \left[ \left( \alpha_1 + D\beta_1 + \frac{i\beta_1}{k} \right) e^{-ikD} - \left( \bar{\alpha}_2 + D\bar{\beta}_2 - \frac{i\bar{\beta}_2}{k} \right) e^{ikD} \right] \\ - i\bar{k}^2 e^{-k_1 x} e^{ik_2 x} \left[ \left( \bar{\alpha}_1 + D\bar{\beta}_1 + \frac{i\bar{\beta}_1}{k} \right) e^{ikD} - \left( \alpha_2 + D\beta_2 + \frac{i\beta_2}{k} \right) e^{-ikD} \right] = 0 \quad (49d)$$

Diese vier komplexen Gleichungen müssen identisch in  $x$  gelten. Weil  $k_2 > 0$  ist, heisst dies, dass in jeder Gleichung jeweils beide Zeilen einzeln 0 sein müssen. Dies ergibt acht Gleichungen für die acht Unbekannten  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2$  (reell). Die Struktur des Gleichungssystems (49) vereinfacht aber die Lösung wesentlich:

- Die zweite Zeile der Gleichungen (49a),....(49d) sind genau die konjugiert komplexen Ausdrücke der jeweiligen ersten Zeile.
- In den ersten Zeilen kommen nur die Variablen  $\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \beta_1, \bar{\beta}_2$  vor

Aus diesen beiden Gründen zerfällt das Gleichungssystem in zwei zueinander konjugiert komplexe Gleichungssysteme für vier komplexe Unbekannte. Es genügt also das eine System zu lösen.

In Matrixschreibweise erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{i\kappa_1}{k} & -\frac{i\kappa_1}{k} \\ k + ik^2 \kappa_0 & k - ik^2 \kappa_0 & i\kappa_2 - k\kappa_0 & -i\kappa_2 - k\kappa_0 \\ e^{-ikD} & e^{ikD} & De^{-ikD} & De^{ikD} \\ e^{-ikD} & -e^{ikD} & (D + \frac{i}{k})e^{-ikD} & -(D - \frac{i}{k})e^{ikD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \beta_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Dabei wurde zusätzlich zu den Abkürzungen (47)

$$\kappa_0 := \frac{2\mu}{\mu_r} \quad (51)$$

verwendet.

Das lineare Gleichungssystem (50) hat nur eine Lösung, wenn die Determinante der Matrix verschwindet. Nach einigen Umformungen ergibt sich:

$$1 - 2D^2 \left[ k_1^2 - k_2^2 \right] + \left( 3 - \frac{4}{m} \right) \cos(2k_1 D) \cosh(2k_2 D) + 4 \left( \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m} \right) \\ + \frac{4\mu}{\mu_r D} \frac{m-1}{m} \left[ -2D^2 (k_1^2 - k_2^2) + (k_2 D) \cos(2k_1 D) \sinh(2k_2 D) - (k_1 D) \sin(2k_1 D) \cosh(2k_2 D) \right] \quad (52) \\ + i \left[ -4k_1 k_2 D^2 - \left( 3 - \frac{4}{m} \right) \sin(2k_1 D) \sinh(2k_2 D) + \right. \\ \left. \frac{4\mu}{\mu_r D} \frac{m-1}{m} \left[ -4k_1 k_2 D^2 - (k_1 D) \cos(2k_1 D) \sinh(2k_2 D) - (k_2 D) \sin(2k_1 D) \cosh(2k_2 D) \right] \right] = 0$$

Kontrolle:

- Für den Fall  $\mu_r = \infty$  ist Gleichung (52) in Übereinstimmung mit Jaccard [12] S.4.
- Für  $k_2=0$  ergibt sich Gleichung (45).

**Lösung der Gleichung (52)**

Die Komplexe Gleichung (52) oder die beiden dazu äquivalenten Gleichungen müssen numerisch gelöst werden. Es kann aber folgendes gezeigt werden.

(1) In jedem Streifen  $(i-1)\pi < x < i\pi$   $i=1,2,\dots$  existiert ein Paar konjugiert komplexer Lösungen.

(2) Für wachsendes  $i$  liegen sie immer näher an der Geraden  $x = i\pi$ .  
(asymptotische Betrachtung)

Ist einmal eine Lösung  $k$  der Gleichung (52) bekannt, so können, analog wie im Fall  $k_2=0$ , die Koeffizienten  $\bar{\alpha}_2, \beta_1, \bar{\beta}_2$  auf  $\alpha_1$  zurückgeführt werden. Man kann nämlich zeigen, dass folgendes gilt:

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{2(Dk)^2 + \kappa_1(1 - e^{-2ikD}) + 2i\kappa_1(kD)}{k^2\Delta} \alpha_1 \quad (53a)$$

$$\beta_1 = \frac{-2Dk + i(1 + e^{2ikD}) + 2i\kappa_1}{k^2\Delta} k\alpha_1 \quad (53b)$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{-2Dk - i(1 + e^{-2ikD}) - 2i\kappa_1}{k^2\Delta} k\alpha_1 \quad (53c)$$

$$k^2\Delta = 2(Dk)^2 + \kappa_1(1 - e^{2ikD}) - 2i\kappa_1(kD) \quad (53d)$$

Für die Deformationsraten und Spannungen erhält man aus (33) und (41) analog dem Fall  $k_2=0$ :

$$V_x = \frac{1}{2\mu} \left[ (k\alpha_1 + 2i\frac{m-1}{m}\beta_1 + yk\beta_1)e^{-kz} + (\bar{k}\alpha_2 + 2i\frac{m-1}{m}\beta_2 + y\bar{k}\beta_2)e^{-\bar{k}z} + k.k \right] \quad (54a)$$

$$V_y = \frac{1}{2\mu} \left[ (ik\alpha_1 + \frac{m-2}{m}\beta_1 + yik\beta_1)e^{-kz} + (i\bar{k}\alpha_2 + \frac{m-2}{m}\beta_2 + yi\bar{k}\beta_2)e^{-\bar{k}z} + k.k \right] \quad (54b)$$

$$\sigma_{xx} = \left[ (-k^2\alpha_1 - 2ik\beta_1 - yk^2\beta_1)e^{-kz} + (-\bar{k}^2\alpha_2 - 2i\bar{k}\beta_2 + y\bar{k}^2\beta_2)e^{-\bar{k}z} + k.k \right] \quad (54c)$$

$$\sigma_{yy} = \left[ (k^2\alpha_1 + yk^2\beta_1)e^{-kz} + (\bar{k}^2\alpha_2 + y\bar{k}^2\beta_2)e^{-\bar{k}z} + k.k \right] \quad (54d)$$

$$\sigma_{xy} = \left[ (k\alpha_1 - 2i\frac{m-1}{m}\beta_1 + yk\beta_1)e^{-kz} + (\bar{k}\alpha_2 + 2i\frac{m-1}{m}\beta_2 + y\bar{k}\beta_2)e^{-\bar{k}z} + k.k \right] \quad (54e)$$

Wobei  $+k.k = +$ konjugiert komplex bedeutet.

Damit sind alle Fundamentallösungen formal bekannt. Für die numerische Bestimmung der  $k$ -Werte und der Koeffizientenbeziehungen (53) muss wie folgt vorgegangen werden:

- (1) Bestimme die Lösungen  $k^{(n)}$   $n=1,2,\dots$  der Determinantenbedingung (52)
- (2) Berechne die Koeffizientenbeziehungen (53) für die  $k_n$ -Werte.

Damit sind nur noch die Koeffizienten  $\alpha_1$  unbestimmt.

#### 4.4. Allgemeine Lösung der homogenen Randbedingungen und Erfüllen der inhomogenen Randbedingungen

Die allgemeine homogene Lösung ist wie üblich eine Superposition der Fundamentallösung.

Formal also:

$$V_x = \sum_{n=1}^{\infty} V_x^{kn}(x, y) \quad (55a)$$

$$V_y = \sum_{n=1}^{\infty} V_y^{(kn)}(x, y) \quad (55b)$$

und entsprechend für  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ .

$V_x^{(kn)}, V_y^{(kn)}$  sind die Fundamentallösungen (48a,b) und (54a,b) zu den  $k^{(n)}$  Werten, die Gleichungen (45) resp. (52) erfüllen und den zugehörigen Koeffizientenbeziehungen (46) und (53).

#### 4.4.1. Unbekannte Koeffizienten in (55)

$k^{(1)}$  : reeller k-Wert

$\alpha_1$  : 1. reeller Koeffizient

$k^{(n)}$ ;  $n > 1$  : komplexe Lösung

$\alpha_1^{(n)}$  : 2 reelle Koeffizienten

#### 4.4.2. Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten:

Diese sind bestimmt durch die inhomogenen Randbedingungen (15d) und (15e):

$$V_x(0, y) = f(y) \quad (56a)$$

$$V_y(0, y) = g(y) \quad (56b)$$

Die Gleichungen (55) und (56) zusammen ergeben ein Paar von Funktionsgleichungen für die  $\infty$ -vielen Koeffizienten  $a_1$  und  $\alpha_1^{(n)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ .

Eine solche Funktionsgleichung wurde bereits in Kapitel 3 für die Buscher'sche Näherung gelöst und zwar durch die Entwicklung von  $f(y)$  nach orthogonalen Funktionen. Diese Methode soll hier nochmals kurz diskutiert werden.

Problem: Es sind die Koeffizienten einer Funktionsreihe gesucht, sodass diese Reihe identisch einer gegebenen Funktion ist. Formal muss gelten :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(y) \equiv f(y) \quad (57)$$

$a_i$  : unbekannte Koeffizienten

$f$  : gegebene Funktion

$f_i$  : Fundamentalfunktionen

Formal ist dieses Problem bekannt aus der Vektorgeometrie, wo die Entwicklungskoeffizienten eines Vektors  $\vec{b}$  bez. einer Basis  $\vec{e}_i$  gesucht sind, also:

$$\sum_i x^i \vec{e}_i = \vec{b} \quad (58)$$

Lösung:

Gleichung (58) ist äquivalent zu folgendem Gleichungssystem:

$$\left( \vec{d}_j, \sum_i x^i \vec{e}_i \right) = (\vec{d}_j, \vec{b}) \quad (59)$$

wenn  $\vec{d}_j$  eine Basis des betrachteten Vektorraumes ist und  $(*,*)$  das euklidische Skalarprodukt bedeutet.

Gleichung (59) wird dann zu:

$$\sum_i g_{ji} x^i = b_j \quad (60a)$$

wobei:

$$g_{ji} = (\vec{d}_j, \vec{e}_i) \quad (60b)$$

$$b_j = (d_j, \vec{b}) \quad (60c)$$

Gleichung (60) wird nun sehr einfach, wenn  $g_{ji} = \delta_{ji}$ , d.h. wenn  $\vec{d}_j$  die zu  $\vec{e}_i$  orthogonale Basis ist. Das Problem wird also durch Entwicklung in einer Basis gelöst.

Anwendung auf die Funktionalgleichung (57) im Bucher'schen Fall:

$$f_i(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2D}(2i+1)y\right) \quad i = 0, 1, \dots \quad (61a)$$

$$(f, g) = \int_0^D f(x)g(x)dx \quad (61b)$$

Der Satz von Funktionen  $f_i$  bildet nun im entsprechenden Funktionenraum eine orthogonale Basis. Also wählt man für  $\vec{d}_j$  auch  $f_i$ . Daraus folgt dann:

$$\left(f_j, \sum_i a_i f_i\right) = \frac{D}{2} a_j = (f_j, f) \text{ woraus } a_j \text{ sofort bestimmt werden kann.}$$

#### 4.4.3. Anwendung auf Gleichung (56)

Die Fundamentallösungen(48a,b) und (54a,b) sind leider nicht orthogonal bez. des  $L_2$ -Skalarproduktes (61b). D.h. Gleichung (60a) stellt ein  $\infty$ -dimensionales Gleichungssystem dar, das natürlich nur näherungsweise gelöst werden kann.

Näherung:

Die N-te Näherung besteht nun darin, dass die Entwicklungen (55) nur bis zur N-ten Fundamentallösung berücksichtigt werden, also:

$$\sum_{n=1}^N V_x^{(k^{(n)})}(0, y) \cong f(y) \quad (62a)$$

$$\sum_{n=1}^N V_y^{(k^{(n)})}(0, y) \cong g(y) \quad (62b)$$

Es ist klar, dass Gleichungen (62) nicht identisch für alle y erfüllt werden können, was mit dem Symbol  $\cong$  angedeutet ist. Gleichung (62) bedeutet die Lösung von (56) im durch die Funktionen  $V_x^{(k^{(n)})}, V_y^{(k^{(n)})}, n \leq N$  aufgespannten Unterraum.

Zur näherungsweisen Lösung von (62) gibt es verschiedene Möglichkeiten. Jede entspricht einer bestimmten Interpretation von  $\cong$ . Viele sind Standard in der Literatur:

#### Beispiele:

(a) Collocation Methode

$\cong$ : Gleichung (62) soll an N (z.B. äquivalent verteilten) Punkten gelten.

Das führt auf ein  $2N-1$ -dimensionales lineares Gleichungssystem. (für  $y=0$  gilt  $V_y^{(k^{(n)})}(0,0) = 0$  automatisch.

(b) Minimale  $L_2$ -Norm

$\cong$ : Gleichung (62) wird so interpretiert, dass  $\|V_x^{(N)}(0, y) - f(y)\|^2 + \|V_y^{(N)}(0, y) - g(y)\|^2 = \text{minimal}$  wird.

Dabei gilt:

$V_x^{(N)}(x, y)$ : N - te Näherung

$$\|\dots\|^2 = (*, *)$$

(c) Gewichtetes Residuum

$\equiv$ : Gleichung (62) soll gelten für die Entwicklungskoeffizienten bez.  $2N-1$  gewählten Basisfunktionen.

$$(V_x^{(N)}(o, y) - f(y), \omega_j^{(1)}) = 0$$

$$(V_x^{(N)}(o, y) - g(y), \omega_j^{(2)}) = 0$$

$\omega_j^{(l)}$  sind gut gewählte Basisfunktionen, z.B. solche, die die Funktionen  $f, g$  sehr gut approximieren.

Solchen Näherungsmethoden ist gemeinsam, dass sie auf ein lineares Gleichungssystem für die  $2N-1$  Koeffizienten  $a_1, \alpha_1^{(n)}$  führen.

## 5. Beispiele, Resultate und Diskussion

### 5.1. Reduktion der Parameterzahl

Bis jetzt wurde immer vorausgesetzt, dass die Stauwand senkrecht zum Hang steht. Das Lösungsverfahren von Kapitel 4 gilt aber ohne wesentliche Änderungen auch für „schiefe“ Stauwände. Insbesondere bleiben die Fundamentallösungen dieseleben, da der Wandwinkel nicht in die Berechnung eingeht. Das Einzige, was sich etwas ändert ist die Erfüllung der inhomogenen Randbedingung an der Stauwand: Gleichung (62) gilt nun nicht mehr für  $(x, y) = (0, y)$  sondern eben für  $(x, y)$  auf der Wand. Die angegebenen Näherungsmethoden (a) bis (c) können aber genauer angewendet werden wie im Spezialfall  $x=0$ .

Damit wird das System durch folgende Parameter beschrieben (vgl. Kapitel 2.1) und Fig.2.

geometrische:  $D, \psi, \varphi$

stoffliche:  $\rho, \mu, m, \mu_r$

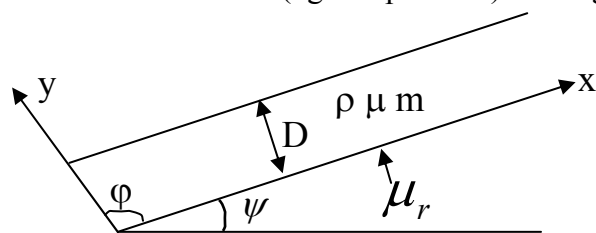


Fig.2: Stauproblem der homogenen Schneeschicht an der schiefen Wand.

Wie schon in Kapitel 2.1 diskutiert, sind von diesen 7 Parametern die drei Parameter  $\rho, \mu, D$  „Skalierungsparameter“ und nur die vier Parameter  $m, \mu_r, \varphi$  und  $\psi$  „echte“ Parameter. Insbesondere gilt nämlich, wie sich leicht zeigen lässt:

Seien:  $\tilde{V}_i(\psi, \varphi, m, \tilde{\mu}_r, x, y)$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\psi, \varphi, m, \tilde{\mu}_r, x, y)$$

Lösung der Gleichungen (2),(3) und Randbedingungen (4)-(7) mit „Einheitsparametern“:

$$\tilde{\rho} = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (63a)$$

$$\tilde{\mu} = 10^9 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \quad (63b)$$

$$\tilde{D} = 1\text{m} \quad (63c)$$

Dann sind die Funktionen:

$$V_i(\psi, \mu, \psi, \varphi, m, \mu_r; x, y) = \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \frac{\tilde{\mu}}{\mu} D^2 * \tilde{V}_i(\psi, \varphi, m, \tilde{\mu}_r; \frac{x}{D}, \frac{y}{D}) \quad (64a)$$

$$\sigma_{ij}(\psi, \mu, \psi, \varphi, m, \mu_r; x, y) = \frac{\rho}{\tilde{\rho}} D * \tilde{\sigma}_{ij}(\psi, \varphi, m, \tilde{\mu}_r; \frac{x}{D}, \frac{y}{D}) \quad (64b)$$

Lösungen der Gleichungen (2),(3) und Randbedingungen (4)-(7) und Parameter  $\rho, \mu, \psi, \varphi, m, \mu_r, D$ . Dabei ist:

$$\tilde{\mu}_r = \mu_r \frac{\tilde{\mu}}{\mu} D \quad (64c)$$

Eine einfache Verifizierung dieser Skaliereigenschaft erlaubt beispielsweise die inhomogene partikuläre Lösung der Gleichung (12), (13).

Die Skalierungseigenschaft ist sehr wichtig bei der Diskussion der Lösungsmannigfaltigkeit. Anstelle der ursprünglichen sieben Parameter müssen nämlich nur noch die vier wesentlichen Parameter  $\psi, \varphi, m, \tilde{\mu}_r$  variiert werden. In allen Beispielen unten wird nur die „Einheitslösung“ zu Skalierungsparametern (63) diskutiert. Mit Gleichung (64) kann diese dann sofort auf die aktuellen Werte der Parameter  $\rho, \mu, D$  übertragen werden.

## 5.2. Beispiele für senkrechte Wand ohne Gleiten

Der einfachste Fall ist  $\varphi = 90^\circ, \tilde{\mu}_r = \infty$ . Dann sind nur noch die zwei Parameter  $\psi$  und  $m$  frei.

### 5.2.1. Skalierungsparameter

Diese werden gleich gewählt wie in Literatur [6], nämlich:

$$D = 1\text{m}$$

$$\rho = 430 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\mu = 5 * 10^{10} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

Folgende zwei wichtigen Fälle sollen etwas näher diskutiert werden

Fall a):  $m = 5, \psi = 30^\circ$

Fall b):  $m = 5, \psi = 50^\circ$

### 5.2.2. Numerische Resultate

k-Werte:

Diese sind für beide Fälle gleich, da die  $k \cdot D$ -Werte gemäss Gleichungen(45) und (52) nicht von  $\psi$  abhängen. Die berechneten k-Werte sind in Tabelle 1 und Fig.3 dargestellt. Als Vergleich für die Realteile der k-Werte sind auch noch die Werte von  $(n-1)\pi$  in einer Kolonne eingetragen.

Nummer	$K_1 \cdot D$	$(I-1) \cdot \pi$	$K_2 \cdot D$
1	1.000559550	0.000000000	0.000000000
2	2.591139636	3.141592654	1.320424922
3	5.926851023	6.283185307	2.124556847
4	9.149443732	9.424777961	2.542839779
5	12.33865266	12.56637061	2.833231941
6	15.51227804	15.70796327	3.056889872
7	18.67714962	18.84955592	3.239119005
8	21.83654404	21.99114858	3.393005048
9	24.99225529	25.13274123	3.526237749
10	28.14535735	28.27433388	3.643734199
11	31.29653637	31.41592654	3.748834508
12	34.44625318	34.55751919	3.843913483
13	37.59482970	37.69911184	3.930721062
14	40.74249822	40.84070450	4.010584449
15	43.88943085	43.98229715	4.084534432
16	47.03575805	47.12388980	4.153387717
17	50.18158066	50.26548246	4.217802472
18	53.32697789	53.40707511	4.278316931
19	56.47201294	56.54866776	4.335376903
20	59.61673686	59.69026042	4.389355812
21	62.76119138	62.83185307	4.440569581
22	65.90541095	65.97344573	4.489287874
23	69.04942432	69.11503838	4.535742711
24	72.19325561	72.25663103	4.580135169
25	75.33692529	75.39822369	4.622640657
26	78.48045080	78.53981634	4.663413106
27	81.62384714	81.68140899	4.702588341
28	84.76712725	84.82300165	4.740286814
29	87.91030236	87.96459430	4.776615843
30	91.05338229	91.10618695	4.811671453
31	94.19637566	94.24777961	4.845539908
32	97.33929003	97.38937226	4.878298991
33	100.48213212	100.53096491	4.910019082
34	103.6249079	103.6725576	4.940764067
35	106.7676226	106.8141502	4.970592115
36	109.9102811	109.9557429	4.999556340
37	113.0528876	113.0973355	5.027705368
38	116.1954459	116.2389282	5.055083834
39	119.3379595	119.3805208	5.081732803
40	122.4804315	122.5221135	5.107690140

Tabelle 1:  $k \cdot D$ -Werte für  $m = 5, \tilde{\mu}_r = \infty$ .

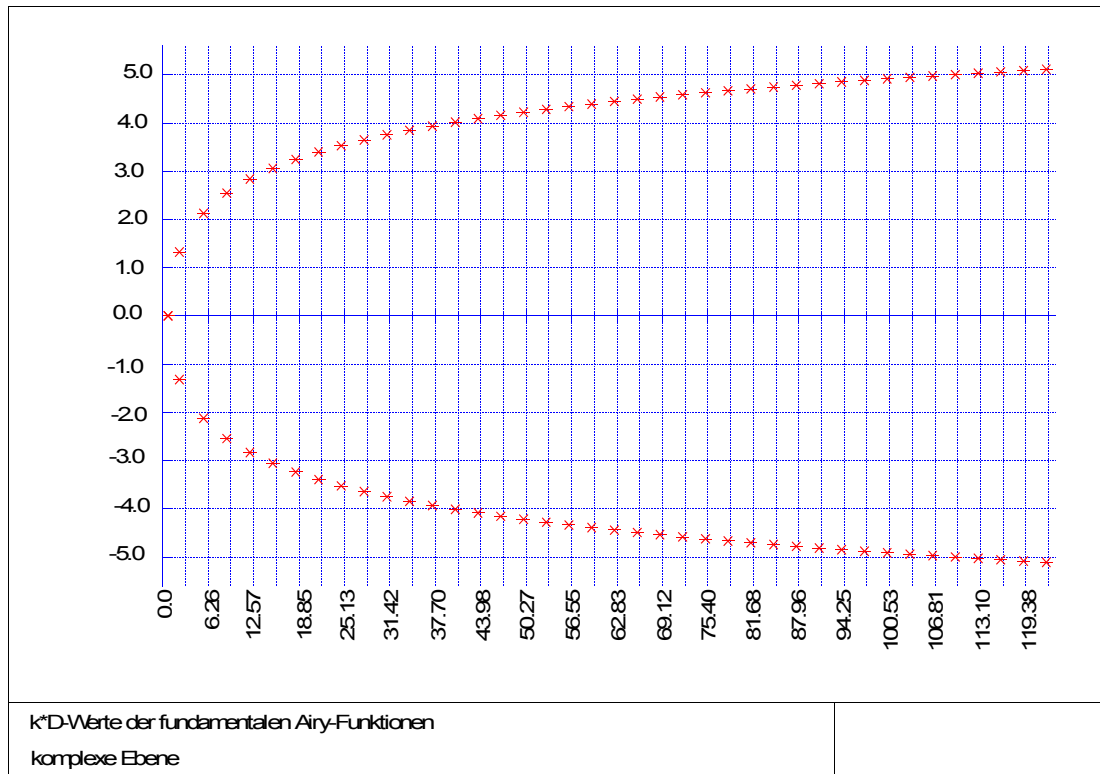


Fig.3: Graphische Darstellung der  $k^*D$ -Werte in der komplexen Ebene.

Tabelle 1 und Fig. 3 zeigen wie die Realteile von  $k^*D$ , ausser bei den ersten paar Lösungen, nahe bei  $(n-1)\pi$  liegen. Das heisst, dass die höheren Terme schnell in  $x$  abklingen. Fig. 4 und 6 zeigen die parallele und die senkrechte Komponente der Deformationsgeschwindigkeit an der Oberfläche für die Fälle a) und b). Fig. 5 und 7 entsprechend die Normal- und Schubspannung an der Stauwand für die beiden Fälle. In allen Rechnungen wurden die ersten 40 Fundamentallösungen berücksichtigt. Als Vergleich sind in den Figuren auch die entsprechenden Bucher'schen Näherungsfunktionen eingetragen.

### 5.2.3. Diskussion der Resultate

#### 1) Konvergenz der Entwicklung nach Fundamentalfunktionen:

Eine genaue Analyse zeigt folgendes:

- Deformationsgeschwindigkeit entlang der Wand.  
Eine gute Konvergenz ergibt sich ab ca.  $n=10$  Termen.
- Deformationsgeschwindigkeit an der Schneeoberfläche:  
gute Konvergenz in  $V_x(0,y)$  schon mit einem Term  
gute Konvergenz in  $V_y(0,y)$  ab ca. 10 Termen
- Spannungen entlang der Wand:  
gute Konvergenz ab ca. 20 Termen

#### 2) Deformationsgeschwindigkeiten

Konvergenz:

Die homogene Lösung muss an der Wand gegen die parabolische partikuläre Lösung konvergieren (inhomogene RB!). Diese Konvergenz ist sehr gut, und zwar überall, weil ja auch die Superpositionskoeffizienten nach diesem Kriterium bestimmt werden (Gl. (56)).

Vergleich mit der Bucher'schen Näherung:



Fig. 4 und 6 zeigen, dass die Abweichungen innerhalb des Staubereiches bis ca. 30% gehen. Dabei steigt  $|V_x^{Bucher}|$  zu schnell an und  $|V_y^{Bucher}|$  eindeutig zu langsam in  $x$ . Ein wichtiger Punkt ist der obere Stauwandpunkt  $(0,D)$ . Hier ist der Verlauf der Bucher'schen Approximation eindeutig falsch, müssen doch sowohl  $V_x$  und  $V_y$  an dieser Stelle eine horizontale Ableitung in  $x$  haben, weil die Schneeoberfläche kräftefrei ist und an der Wand Haftung besteht. Deshalb ist hier auch der Unterschied zur analytischen Lösung gross. Was die Staulänge betrifft, ist die Bucher'sche Näherung gut mit Abweichungen bis zu  $\approx 5\%$ . Man vergleiche auch Tabelle 2, wo die Staulängen eingetragen sind.

### 3) Spannungen

Konvergenz:

Konvergenzprobleme treten am oberen Stauwandpunkt  $(0,D)$  auf. Dort müsste sowohl die Schubspannung wie auch die Normalspannung 0 sein. Das ist zwar für die Schub-, nicht aber für die Normalspannung erfüllt.

Vergleich mit der Bucher'schen Näherung:

Der Spannungsverlauf der analytischen Lösung ist für  $\psi=30^\circ$  trapezförmig. Für kleinere Winkel verschiebt sich das Schwerkraft nach unten und für grössere nach oben. Punkto Spannungsverlauf ist die Bucher'sche Näherung eindeutig schlecht, indem sie in Bodennähe die wahren Werte unterschätzt und in der Nähe der Oberfläche überschätzt. (Abweichungen bis mehr als 100%). Hingegen ist die Abweichung bei den Gesamtkräften und Momenten geringer: (siehe Tabelle 2) ca. 50% bei  $m=3$ .

### 4) Abhängigkeit von den Parametern $\psi$ und $m$

Neben den hier dargestellten Resultaten wurde eine grosse Anzahl Rechnungen für verschiedene Werte der Parameter  $\psi$ ,  $m$  und  $\tilde{\mu}_r$  durchgeführt. Die Resultate bestätigen sehr schön die Abhängigkeiten und Gesetzmässigkeiten, die schon in Ref. [5] aufgrund von numerischen Rechnungen diskutiert wurden.

Insbesondere gelten die dort publizierten Faustformeln auch für die analytischen Rechnungen.

### 5) Vergleich der analytischen Resultate mit den numerischen Resultaten aus Boundary (BEM) und Finite Elemente (FEM) Methoden

Als Basis dieses kurzen Vergleichs dienen die umfangreichen Parameterstudien für die analytische Lösung (Resultate Fig.4-7 und unpublizierte Resultate), die Boundary Element-Methode (Ref. [5] und unpublizierte Resultate von Bader) sowie die Finite Element-Methode mit dem Programm TPS10 (unpublizierte Resultate von Weilenmann). Ganz allgemein gilt, dass BEM, FEM und die analytischen Resultate sehr nahe beieinander sind. Dies ist eine Bestätigung, dass die beiden numerischen Verfahren sehr gute Approximationen sind.

### 6) Zusammenfassung der Hauptresultate

- (1) Die Bucher'sche Näherung ist relativ gut, was die Staulänge betrifft ( $\approx 5\%$ ). Die Abweichungen bei Gesamtkraft und Moment sind bis ca. 50%.
- (2) Die Bucher'sche Näherung ist schlecht, was den Spannungsverlauf an der Wand betrifft. Eine viel bessere Approximation wäre eine gleichmässige Verteilung anstelle der sinusförmigen Verteilung.

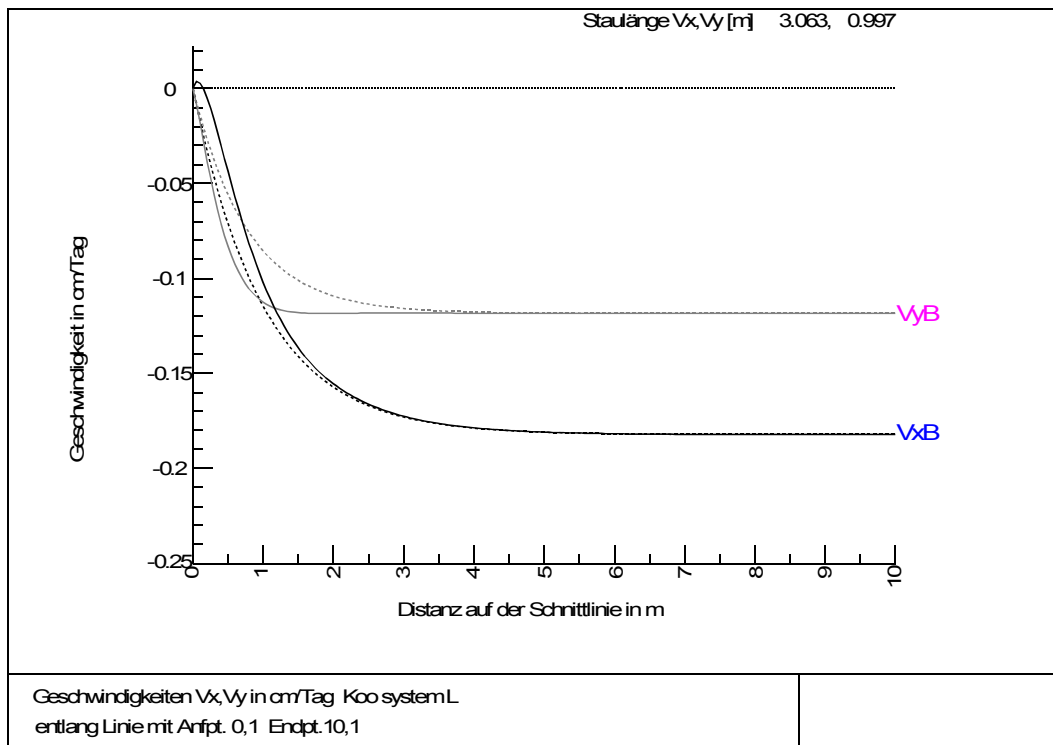


Fig 4: Deformationsgeschwindigkeiten an der Oberfläche. Die gestrichelten Linien sind die Bucher'schen Näherungen.  $\psi=30^\circ$ ,  $m=5$ .

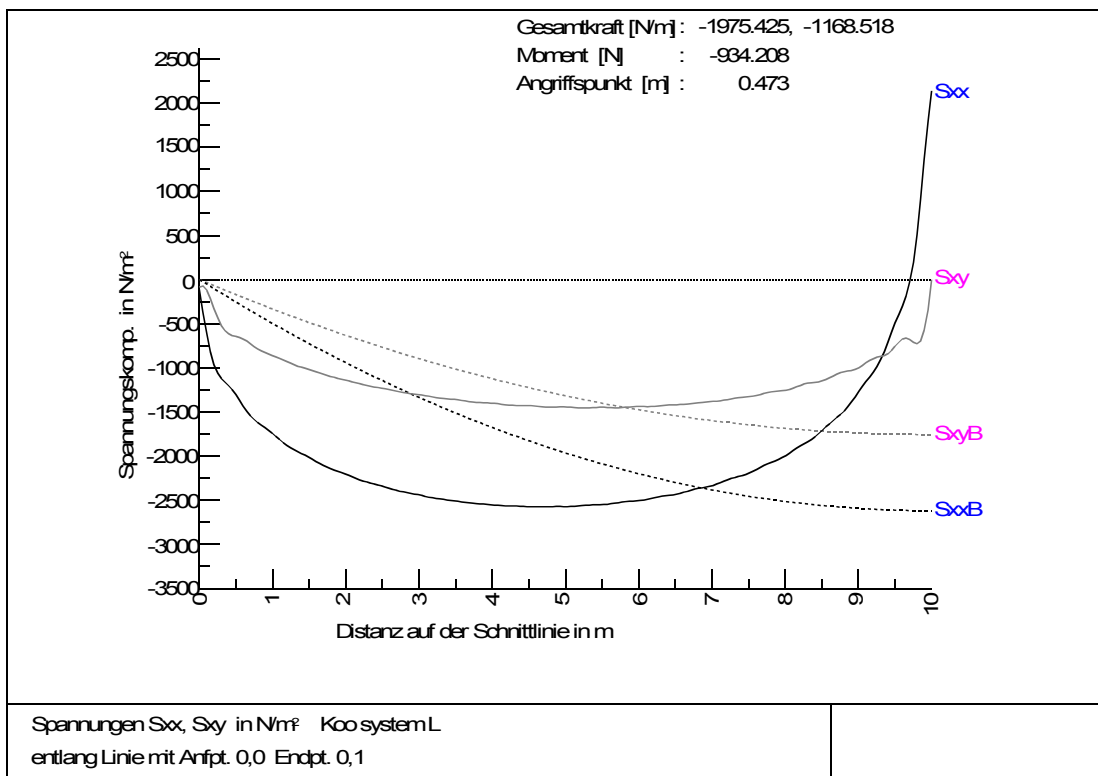


Fig 5. Normal- und Schubspannung an der Stauwand.  $\psi=30^\circ$ ,  $m=5$ .

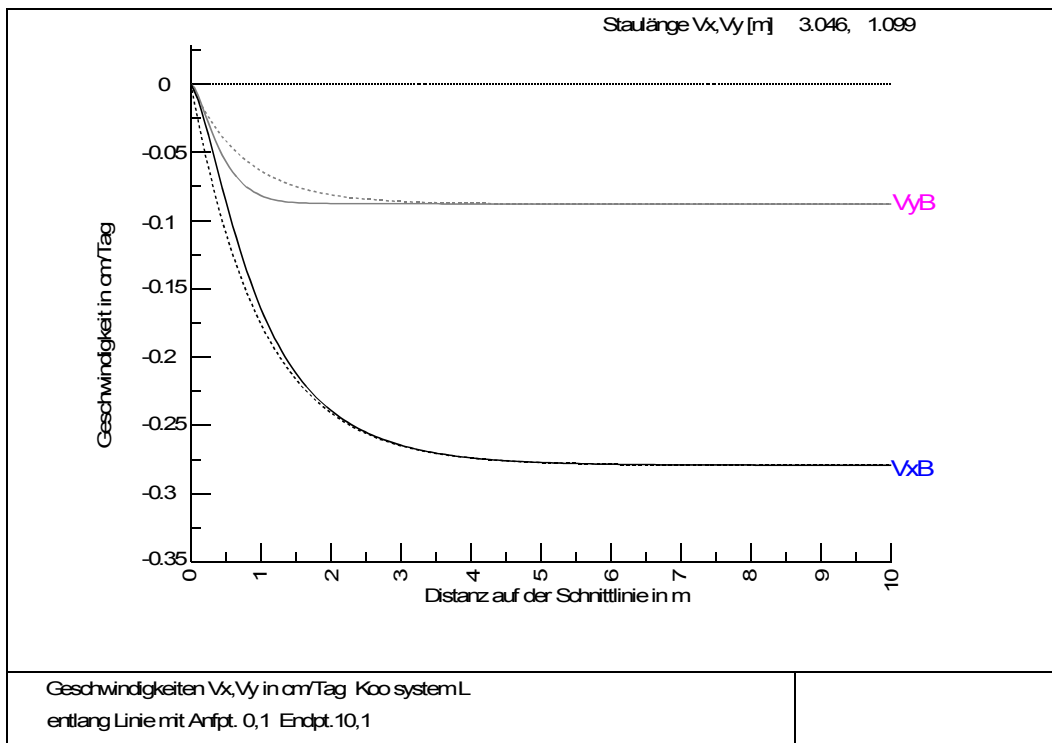


Fig 6. Deformationsgeschwindigkeiten an der Oberfläche. Die gestrichelten Linien sind die Bucher'schen Näherungen.  $\psi=50^\circ$ ,  $m=5$

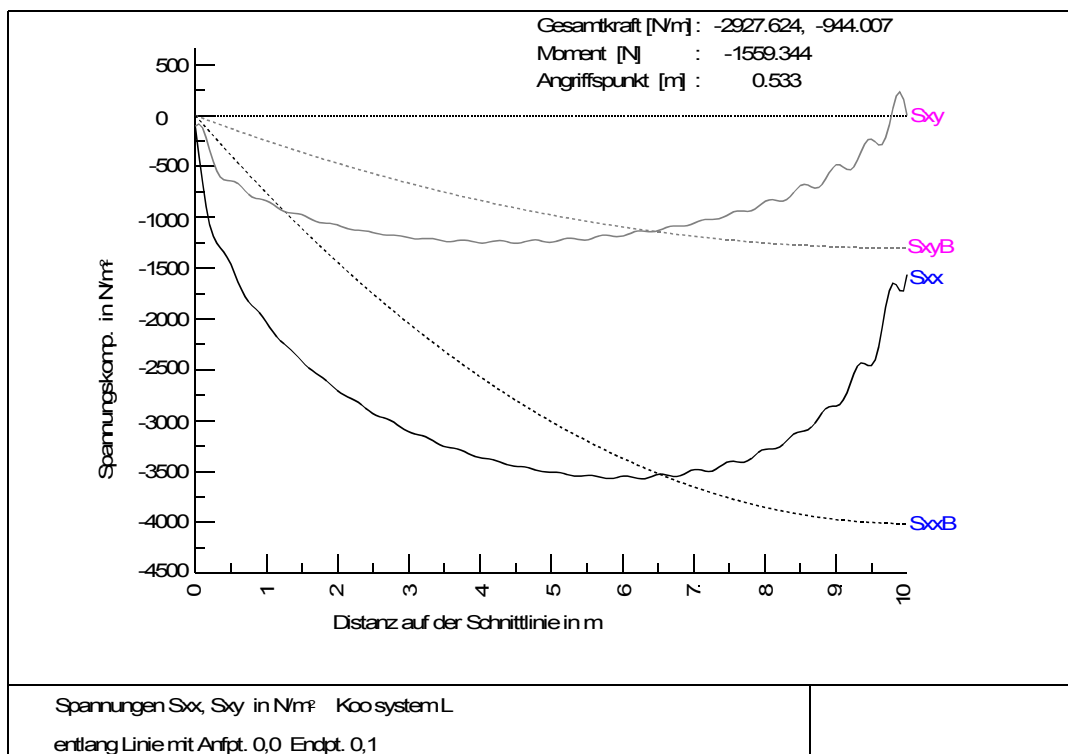


Fig 7. Normal- und Schubspannung an der Stauwand.  $\psi=50^\circ$ ,  $m=5$

Fall	Methode	Staulänge [m]	$F_{tot}^{Normal} \left[ \frac{N}{m} \right]$	Moment [N]	Angriffspunkt [m]
m=5 $\psi=30^\circ$	Analytisch	3.063	1975	944	0.478
	BEM	3.075	1969	928	0.471
	FEM	3.061	1980	924	0.467
	Bucher	3.015	1773	1083	0.611
m=5 $\psi=40^\circ$	Analytisch	3.053	2489	1278	0.513
	BEM	3.065	2524	1257	0.498
	FEM	3.048	2495	1253	0.502
	Bucher	3.015	2280	1393	0.611
m=5 $\psi=50^\circ$	Analytisch	3.047	2927	1573	0.538
	BEM	3.058	2933	1548	0.528
	FEM	3.051	2933	1545	0.527
	Bucher	3.015	2717	1660	0.611
m=3 $\psi=30^\circ$	Analytisch	3.442	2657	1320	0.497
	BEM	3.454	2666	1297	0.486
	FEM	3.442	2660	1295	0.487
	Bucher	3.303	1983	1187	0.600
m=3 $\psi=40^\circ$	Analytisch	3.452	3204	1676	0.523
	BEM	3.462	3218	1647	0.512
	FEM	3.454	3209	1646	0.513
	Bucher	3.303	2549	1526	0.600
m=3 $\psi=50^\circ$	Analytisch	3.459	3653	1980	0.542
	BEM	3.463	3671	1946	0.530
	FEM	3.460	3659	1948	0.5323
	Bucher	3.303	3038	1818	0.600

Tabelle 2: Staulänge, Normalkraft, Moment und Angriffspunkt für die verschiedenen Methoden und typischen Fälle. Die numerischen Resultate stammen für BEM aus Ref. [5] und unpublizierten Resultaten von Bader und für FEM aus unpublizierten Resultaten von Weilenmann.

## 6. Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Schritte der Lösung zusammengefasst werden.

### 6.1. Problemstellung

Diese ist im Kapitel 2 ausführlich diskutiert. Die zugehörigen Gleichungen und Randbedingungen sind Gleichungen (1)-(7), (9)-(10)

Es handelt sich dabei um ein gekoppeltes, lineares, inhomogenes System von zwei partiellen Differentialgleichungen.

### 6.2. Lösungsansatz

Wie immer bei linearen Differentialgleichungen ist die allgemeine Lösung die Superposition einer partikulären inhomogenen Lösung mit der allgemeinen homogenen Lösung. Die geeignete partikuläre Lösung ist die ideale Hanglösung Gl. (12),(13). Die allgemeine homogene Lösung muss die homogene Gleichung (14) und die Randbedingungen (15) erfüllen.

### 6.3. Allgemeine homogene Lösung

Die allgemeine homogene Lösung ist eine Superposition über alle Fundamentallösungen (55):

$$V_x = \sum_{n=1}^{\infty} V_x^{k(n)} \quad (55a)$$

$$V_y = \sum_{n=1}^{\infty} V_y^{k(n)} \quad (55b)$$

Dabei bilden die Funktionen  $(V_x^{k(n)}, V_y^{k(n)})$  ein vollständiges System von Fundamentallösungen der Gleichungen (14) (15a-c,f).

#### 6.3.1. Berechnung der Fundamentallösungen

Diese können über Airy-Funktionen bestimmt werden. Die Beziehung zwischen den Deformationsgeschwindigkeiten, den Spannungskomponenten und den Airy-Funktionen sind die Gleichungen (33),(34).

Die entsprechenden Airy-Fundamentallösungen müssen die biharmonische Gleichung (35) und die homogenen Randbedingungen (42) erfüllen.

Jede Airy-Fundamentallösung ist eine Summe von vier miteinander verwandten Exponentialfunktionen (38):

$$e^{-kz}, e^{-\bar{k}z}, e^{-k\bar{z}}, e^{-\bar{k}\bar{z}}$$

wobei die erlaubten komplexen k-Werte durch die Erfüllung der Randbedingungen (42) bestimmt sind. Die Bestimmungsgleichungen für die k-Werte und die vier Superpositionskoeffizienten sind die Gleichungen (45)-(47) und (53)-(53).

Die entsprechenden Fundamentallösungen für die Deformationsgeschwindigkeiten und die Spannungskomponenten sind die Gleichungen (48) und (54).

Die erste Fundamentallösung hat relativ einfache Form. Sie setzt sich aus folgenden Termen zusammen (Gl.(48)):

$$e^{-kx} \sin(ky), e^{-kx} \cos(ky)$$

Die höheren Fundamentallösungen sind entsprechend komplizierter. Was jedoch allen gemeinsam ist, ist der exponentielle Abfall in positiver x-Richtung gemäss

$$e^{-k^{(1)}x} \text{ resp. } e^{-k^{(n)}x} \quad n > 1$$

der umso stärker ist, umso grösser n.

#### 6.3.2. Numerische Bestimmung der k-Werte und Koeffizienten

Weil die Bestimmungsgleichungen (45)-(47) resp. (53),(53) so kompliziert sind, können sie nur noch numerisch gelöst werden. Dies wird in Kapitel 5 für einige Fälle durchgeführt.

### 6.4. Erfüllen der inhomogenen Randbedingung (15d),(15e)

Alle homogenen Randbedingungen (15a-c,f) werden bereits durch jede Fundamentallösung einzeln erfüllt. Nur die letzte Randbedingung (15d-e) wird nur durch die Superposition (55) von Fundamentallösungen erfüllt. Dies kann aus den in Abschnitt 4.4 ausführlich diskutierten Gründen wiederum nur numerisch erfolgen.

## 7. Literatur

- [1.] Bucher, E. Beitrag zu den theoretischen Grundlagen des Lawinenverbaus, 1948. Beiträge zur Geologie der Schweiz— Geotechnische Serie— Hydrologie, Lieferung 6.
- [2.] Haefeli, R. Der Schnee und seine Metamorphose, 1939
- [3.] Salm, B. Snow Forces. *Journal of Glaciology* 19, 67-100 (1977)
- [4.] Hiller, M., Bader, H.-P. Schneedruck auf Stützwerke. Interner Bericht Nr.660, Eidg. Institut für Schnee- und Lawinenforschung 1990
- [5.] Bader, H.-P., Gubler, H.U. und Salm, B. Distributions of stresses and strain rates in snowparks. Proceedings 6. International Conference on Numerical Methods in Geomechanics (ICONMIG) 2257-2263, Innsbruck 1988.
- [6.] Bader, H.-P. und Slam,B. On the mechanics of Snow Stab Release. *Cold Regions Science and Technology* 17, 287-300 (1990).
- [7.] Handbook of mathematical functions. Dover Publications 1972, New York. Editors: M. Abramowitz and I. A. Stegun
- [8.] Harvay, G. und Born, J.S. Some Mixed Boundary— Value Problems of the Semi-Infinite Strip. *Journal of Applied Mechanics* 24,261-268 (1957)
- [9.] Benthem, J.P. A Laplace Transform Method of the Solution of Semi-Infinite and Finite Strip problems in Stres Analysis. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 16, 413-429 (1963)
- [10.] Johnson, M.W. und Little R.W. The Semi- Infinite Elastic Strip. *Quarterly applied mathematics* 20, 335-344 (1965)
- [11.] Yoshida, Zyungo. Studies on the Behavior of a Snow Cover on Mountain Slope. Localization of the Stresses in the Snow Cover. *Low Temperature Science ter. A43*, 33-47 (1984)
- [12.] Jaccard, C. Bewegung eines unendlichen linear-viskosen Schneebretts oberhalb eines Stützwerks auf einem gleichmässigen Hang. SLF 28.1.89 (private Mitteilung)
- [13.] Jaswon, M.A. und Symur G.T. Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics (1977).