Datenanalyse
WS 2001/00

Author(s):
Pruys, H.

Publication Date:
2001

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004444215

9 Fit einer Exponentialfunktion

In dieser Übung wollen wir exponentialverteilte ($f(t) = N \cdot e^{-\lambda t}$) Daten auf zwei(-drei) verschiedene Arten an die Theorie anpassen, um die Parameter N und λ zu bestimmen.

- Zuerst einmal werden wir die Funktion direkt anfitten. Da die Funktion nichtlinear von den Parametern abhängt, verwenden wir die Methode von Marquardt (Vergleiche Kapitel 4.2.2 und das Beispiel im Kapitel 4.2.3). Wir benötigen noch die Ableitungen der Funktion nach den beiden Parametern:
$$\frac{\partial f}{\partial N} = e^{-\lambda t} \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -Nte^{-\lambda t}$$
Einige Anmerkungen zum Programm:
Der Algorihmus von Marquardt steckt vollständig in der Matlabfunktion `LSminimum`, die nur mit den richtigen Daten versorgt werden muß. Zu diesen gehört neben den Meßwerten (aus der Datei `exp_data1`) samt Fehlern, den Startwerten für die Parameter und einigen optionalen Angaben vor allem der Name einer noch zu schreibenden Matlabfunktion, die für jedes Tripel t, N, λ eine Matrix mit den Funktionswerten und den Ableitungen zurückliefert. Diese Funktion sollte man zuerst schreiben. Man orientiere sich dabei an dem Beispiel aus Kapitel 4.2.3. Der Name der Funktion ist frei wählbar, aber er muß natürlich mit dem Namen übereinstimmen, den man an `LSminimum` übergibt. Die ersten beiden Zeilen in der Beispielfunktion dienen dazu sicherzustellen, daß es sich bei dem Übergabevektor um einen Zeilen- und nicht um einen Spaltenvektor handelt. Zurückgegeben wird einen Matrix, die in der ersten Spalte die Funktionswerte und in der zweiten und dritten Spalte die Ableitung von $f(t; N, \lambda)$ nach den Parametern enthält.

- Eine Eigenschaft der Exponentialverteilung ist es, daß sie mittels Logarithmieren in eine Verteilung überführt werden kann, die linear von den Parametern abhängt:
$$g(t) = \ln(f(t)) = \ln(N) - \lambda t$$
Die Originaldaten seien $t_i, y_i \pm \sqrt{y_i}$. Nach dem Logarithmieren werden sie zu $t_i, \ln(y_i) \pm 1/\sqrt{y_i}$. Dabei wurden die Fehler mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes berechnet. Entsprechend wird die histogrammierte Theoriefunktion zu

$$g(t_i)\Delta t = \ln(f(t_i)\Delta t) = \ln(N\Delta t) - \lambda t_i$$

($\Delta t = 0.6232\mu$s is die Binbreite)

Indem wir also ein Polynom 1. Grades an die logarithmierten Werte anfitten erhalten wir die Parameter $\ln(N\Delta t)$ bzw. N und λ.

Anmerkungen zum Programm:
Zum Anpassen einer Geraden an die Meßwerte benutzt man die Matlabfunktion `polfit` . Diese erwartet als Übergabeparameter sowohl eine Matrix, mit den Zeiten, den logarithmierten Meßwerten und deren Fehlern als auch den Grad des Polynoms plus eins. Die errechneten Parameter werden von `polfit` zurückgeliefert und sollten natürlich ausgegeben werden.

Die Textausgabe von `polfit` enthält Angaben zum χ^2 und der Anzahl der Freiheitsgrade. Der unwahrscheinlich hohe χ^2-Wert deutet auf eine bisher nicht berücksichtigten Fehler in den Meßwerten hin — also nochmal zurück zur Theorie:

- Die bisher nichtberücksichtigte Fehlerquelle ist der nicht perfekte TDC, mit dem die Meßdaten aufgenommen wurden: Die Binbreiten Δt sind nicht konstant für alle t_i (systematischer Fehler). Dies nennt man differentielle Nichtlinearität des TDCs. Mit einem Fehler σ_t der Binbreite, ergibt sich für den quadratischen Fehler der Differenz $g(y_i) - \ln(y_i)$: $\sigma_i^2 = 1/y_i + (\sigma_t/\Delta t)^2$. Wie ändert sich das χ^2 wenn wir $\sigma_t/\Delta t = 0.03$ annehmen?

  Anmerkungen zum Programm:
  Man sollte den im zweiten Teil geschriebenen Programmabschnitt einfach kopieren und leicht abwandeln, um dem veränderten Fehler Rechnung zu tragen.

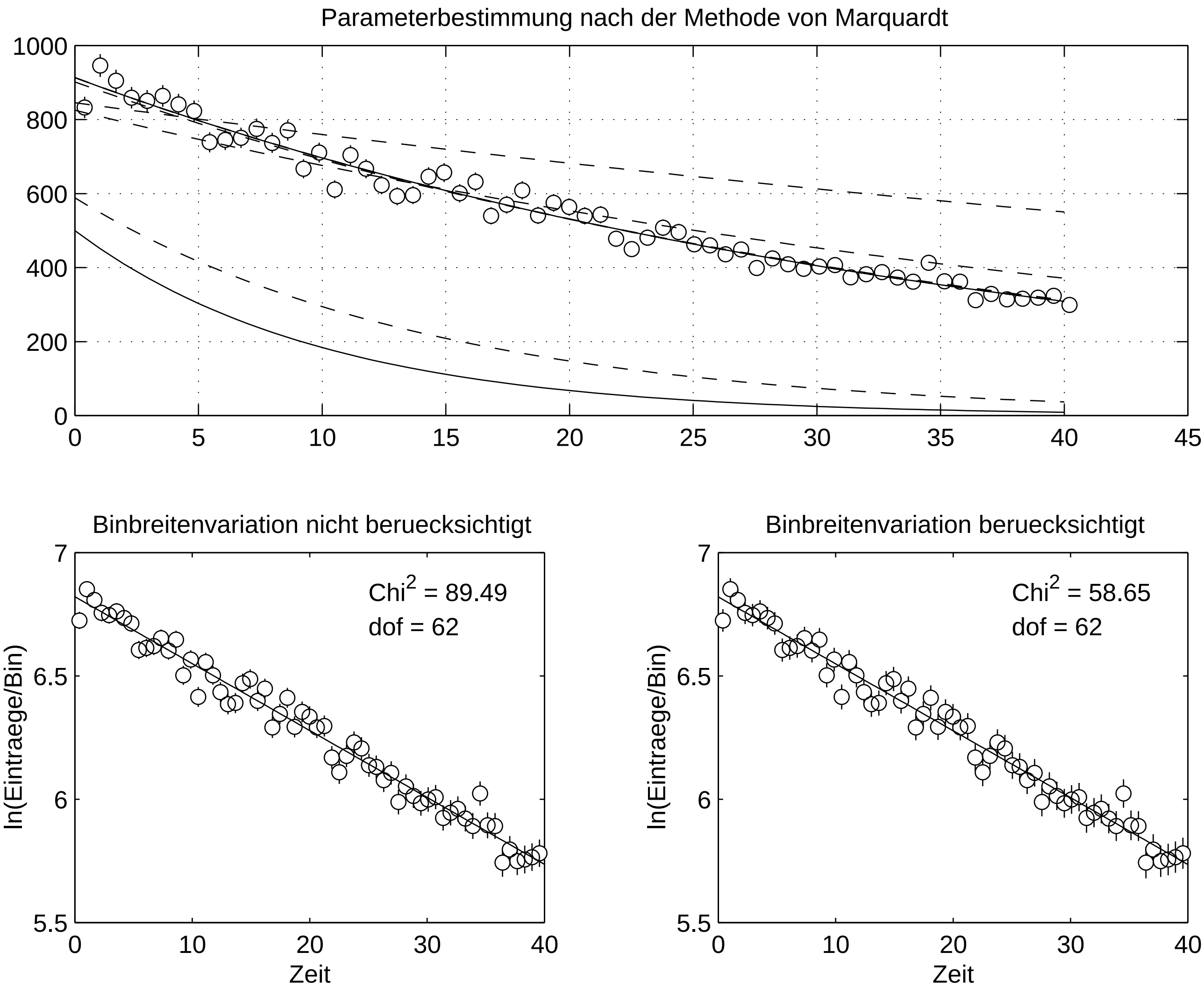

Abbildung 6: Die obere Hälfte der Figur zeigt den Fitvorgang bei der Methode von Marquardt. Neben den Daten und der angepassten Funktion sind auch einige Zwischenresultate eingezeichnet. In der unteren Hälfte ist jeweils ein Geradenfit an die logarithmierten Meßdaten dargestellt; rechts mit Berücksichtigung der differentiellen Nichtlinearität des TDCs und links ohne.