Erstmalige Verleihung des Abel-Preises

Auszeichnung von Jean-Pierre Serre für sein Gesamtwerk

Erstmalige Verleihung des Abel-Preises Auszeichnung von Jean-Pierre Serre für sein Gesamtwerk

Günther Frei

19. Mai 2003

Erstmalige Verleihung des Abel-Preises
Auszeichnung von Jean-Pierre Serre für sein Gesamtwerk

Am 3. Juni ist in der Aula der Universität Oslo zum ersten Mal der neu gestiftete Abel-Preis verliehen worden, der auch als Nobelpreis der Mathematik bezeichnet wird. Ausgezeichnet wurde der französische Mathematiker Jean-Pierre Serre, dessen Lebenswerk die verschiedensten Zweige der Mathematik beeinflusst hat.

1. In einer feierlichen Zeremonie ist am 3. Juni in Oslo der von der norwegischen Regierung gestiftete Abel-Preis an den französischen Mathematiker Jean-Pierre Serre verliehen worden. Der mit 1,2 Millionen Franken dotierte Preis ist dem Andenken des herausragenden norwegischen Mathematikers Niels Henrik Abel gewidmet und soll nach dem Willen der Stifter die Bedeutung eines Nobelpreises für Mathematik erlangen. Serre erhält den Preis «für seine Verdienste um die Schaffung moderner Formen in vielen Bereichen der Mathematik, insbesondere der Topologie, der algebraischen Geometrie und der Zahlentheorie», heisst es in der Begründung der Norwegischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk zeichne sich durch seine aussergewöhnliche Breite und Tiefe und seine Bedeutung für viele Zweige der Mathematik aus.

2. Serre zählt zu den ganz grossen Mathematikern unserer Zeit. Er wurde am 15. September 1926 in Bages geboren, einem kleinen Dorf fünf Kilometer südlich von Narbonne. Nach dem Besuch des Lyzeums in Nîmes studierte er von 1945 bis 1948 an der École Normale Supérieure in Paris und doktorierte 1951 an der Sorbonne. Darauf hatte er zunächst eine Anstellung beim Centre National de la Recherche Scientifique, und 1954 wurde er ausserordentlicher Professor an der Universität von Nancy. Schon zwei Jahre später erhielt er eine Berufung an das Collège de France in Paris, auf den Lehrstuhl für Algebra und Geometrie. Seit 1994 ist er emeritierter Professor des Collège de France, wobei ihm seine permanente Stellung an diesem Institut häufige Aufenthalte an der Harvard-Universität und am Institute for Advanced Study in Princeton gestattet.

3. Serres frühe Arbeiten galten der Algebraischen Topologie und der Homologischen Algebra, insbesondere dem Studium der invarianten Eigenschaften von Abbildungen zwischen höherdimensionalen Räumen und Sphären. Dazu wandte er 1951 erfolgreich die von Jean Leray eingeführten Spektralsequenzen auf die Homologiegruppen von Faserräumen an. So entdeckte er grundlegende Beziehungen zwischen Homologiegruppen und Homotopiegruppen von Räumen und konnte daraus bedeutende Sätze über die Homotopiegruppen von Sphären ableiten. Erste wichtige Vorarbeiten auf diesem Gebiet hatte schon vor 60 Jahren der Zürcher Mathematiker Heinz Hopf geleistet.

Es gelang Serre weiter, Hauptsätze der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Variablen in die Sprache der Garbentheorie zu übersetzen und bedeutend zu erweitern. Später hat sich Serre der Zahlentheorie zugewandt, seinem bevorzugten Forschungsgebiet. Aus seinen Arbeiten zur Zahlentheorie ergeben sich unter anderem bedeutsame praktische Anwendungen auf die Kodierungstheorie und die Kryptographie. In erster Linie aber geht es Serre stets um allgemeingültige Gesetzmässigkeiten, welche möglichst viele Gebiete der Mathematik wie Topologie, Algebra, Analysis und Zahlentheorie umfassen sollen.

4. Die neuen Begriffe und Sätze in Serres Werk sind auch für einen Mathematiker nicht leicht zu verstehen. Mittels historischer Betrachtungen soll versucht werden, wenigstens einige dieser Begriffe und Sätze auch einem Nicht-Spezialisten etwas näher zu bringen.

Es war schon immer ein Grundzug der Mathematik, geometrisch-anschauliche Objekte mittels algebraischer Objekte, etwa als Gleichungen oder mit Hilfe von Zahlen präziser zu charakterisieren. Als Beispiel diene die auf die Griechen zurückgehende Vermutung, dass es nicht möglich sei, einen beliebigen Winkel nur mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu zerlegen, ein Satz, der bis anhin nur mittels der Theorie der algebraischen Gleichungen (vom Grade 3) bewiesen werden konnte. Dieser Grundzug, geometrische Probleme auf algebraische zurückzuführen, findet sich schon im ersten der Mathematik gewidmeten Werk, den Elementen von Euklid, das etwa um 300 v. Chr. in Griechenland entstanden ist und 13 Bücher umfasst. Gleichsam als Höhepunkt dieses Werkes wird dort im 13. Buch als Letztes bewiesen, dass es nicht mehr als 5 sogenannte platonische Körper, d.h. reguläre Polyeder geben kann, nämlich das *Tetraeder*, dessen Oberfläche aus 4 gleichseitigen Dreiecken und dessen Kanten aus 6 gleichen Strecken bestehen, die zu je dreien an 4 Ecken zusammenstossen, der *Würfel*, begrenzt durch 6 Quadrate mit insgesamt 12 Kanten und 8 Eckpunkten, das *Oktaeder*, begrenzt durch 8 gleichseitige Dreiecke mit insgesamt 12 Kanten und 6 Eckpunkten, das *Dodekaeder*, begrenzt durch 12 gleichseitige Fünfecke mit insgesamt 30 Kanten und 20 Eckpunkten und das *Ikosaeder*, begrenzt durch 20 gleichseitige Dreiecke mit insgesamt 30 Kanten und 12 Eckpunkten. Dazu zeigte Euklid, dass die Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen eines regulären Polyeders nur wenige bestimmte Werte annehmen können. Für jeden dieser 5 Körper gilt, dass die Anzahl der Seitenflächen minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Eckpunkte immer gleich 2 ist, als Formel $f - k + e = 2$. Der Basler Mathematiker Leonhard Euler berichtete 1750 in einem Brief an Goldbach, dass diese Formel nicht nur für die 5 platonischen Körper gelte, sondern allgemein für jedes beliebige (konvexe) Polyeder, das durch ebene Seitenflächen berandet wird, die wiederum durch Strecken begrenzt werden, welche an Ecken zusammenstossen. Es ist sehr erstaunlich, dass dieser sogenannte *Eulersche Polyedersatz* weitestgehender Verallgemeinerungen fähig ist und in der Entwicklung der Mathematik eine herausragende Rolle gespielt hat, so auch im Werk von Serre. Er gilt, entsprechend erweitert und formuliert, für allgemeinste Räume und beliebige Dimensionen.

Schon zu Beginn des 19. Jahrhunderts ist man durch Beschäftigung mit Euklids Parallelenproblem auf neue Geometrien und Räume gestossen, die von der uns vertrauten euklidischen Geometrie verschieden sind. Eine besondere Bedeutung hat die Projektive Ebene erlangt, deren Eigenschaften in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entdeckt und gründlich untersucht wurden. Sie entsteht dadurch, dass man in der euklidischen Ebene jeder Schar von parallelen Geraden einen einzigen Schnittpunkt im Unendlichen, ihren Fluchtpunkt, zuordnet und diesen zur euklidischen Ebene hinzufügt. Es entsteht so eine Fläche die topologisch der Sphäre, d.h. der Kugeloberfläche entspricht, auf welcher je zwei gegenüberliegende Punkte miteinander identifiziert werden. In anderer Hinsicht wichtig ist die Ebene der komplexen Zahlen, die aus allen Punkten (komplexen Zahlen) $x + iy$ besteht, wo x und y reelle Zahlen sind, und i die positive Wurzel aus -1 bedeutet. Die Grundlagen dafür wurden von Euler um 1750 und vom Schweizer Robert Argand und dem Norweger Caspar Wessel um 1800 geschaffen. Die x-Richtung wird durch die Zahl 1 erzeugt und die dazu orthogonale y-Richtung durch die imaginäre Zahl i. Fügt man der komplexen Ebene einen einzigen unendlichen Punkt hinzu, so erhält man eine zweidimensionale Sphäre, die Oberfläche einer Kugel, die sogenannte Riemannsche Zahlensphäre. Bernhard Riemann führte um 1851 auch ganz andere neuartige Flächen ein, die heute seinen Namen tragen, und die dadurch zustande kommen, dass man sie der komplexen Zahlenebene oder der Zahlensphäre überlagert. Komplexe Funktionen, die in der komplexen Ebene mehrwertig sind, werden dann auf der zugeordneten Riemannschen Fläche eindeutig. Z. B. ist die komplexe Funktion $w = F(z) = z^2$ eindeutig, aber ihre Umkehrfunktion $z = f(w)$ ist mehrdeutig, da einem Wert w zwei Werte $+z$ und $-z$ entsprechen. f wird nun dadurch eindeutig, dass man der Zahlenebene oder Zahlensphäre eine weitere Ebene (die $-$Ebene) oder Sphäre überlagert und die beiden Blätter am Punkte 0 und am Punkte unendlich, den beiden Verzweigungspunkten, wo f eindeutig ist, miteinander verheftet. So ist jeder algebraischen komplexen Funktion $w = F(z)$ und ihrer Umkehrfunktion f, wo w und z durch eine algebraische (polynomiale) Gleichung verbunden sind, eine *Riemannsche Fläche* zugeordnet. Es lagen damit gegen Ende des 19. Jahrhunderts eine Fülle von verschiedenartigen Flächen und Räumen vor, die es zu klassifizieren galt, was auch für das Verständnis der darauf existierenden algebraischen Funktionen, Differentiale und Integrale notwendig war. Dazu bedurfte es der Ausbildung einer neuen, die Geometrie im weitesten Sinne umfassenden Disziplin, nämlich der Topologie, in welcher Eigenschaften geometrischer Objekte untersucht werden, die bei stetiger Deformation unverändert bleiben. Entsprechend dem genannten Grundzug der Mathematik, einem geometrischen Problem vor allem mit algebraischen und zahlentheoretischen Methoden beizukommen, kam es zur Ausbildung einer Algebraischen Topologie, in welcher die topologisch invarianten Eigenschaften durch algebraische oder zahlentheoretische Objekte beschrieben werden. Eine solche Invariante ist das *Geschlecht*. Jede geschlossene (kompakte) Riemannsche Fläche R ist topologisch einer Sphäre äquivalent mit einer bestimmten Anzahl g angehefteter Henkel. Diese Zahl g heisst das Geschlecht von R. Die Sphäre hat demnach das Geschlecht 0, der Torus (oder Ring) das Geschlecht 1 und die Bretzel das Geschlecht 2. g gibt also die Anzahl der Löcher einer geschlossenen Fläche an. Die verallgemeinerte Eulersche Polyederformel für ein Polyeder, das topologisch einer Fläche vom Geschlecht g äquivalent ist, lautet $f - k + e = 2 - 2g$. Sie wurde vom Genfer Mathematiker Simon L'Huilier schon 1813 gefunden. Für die gewöhnlichen einer Kugel einbeschriebenen oder allgemeiner mit der Sphäre topologisch äquivalenten Polyeder ist das Geschlecht $g = 0$, und man erhält als Spezialfall die Eulersche Formel. Riemann fand im Zusammenhang mit den auf einer Riemannschen Fläche R existierenden Integralen eine weitere Beziehung von der Art der Eulerschen Formel. Ist g das Geschlecht von R, b die Zahl der Blätter und v die Zahl der Verzweigungspunkte, so gilt $v - 2b = 2g - 2$. Eine noch wichtigere Beziehung liefert der *Satz von Riemann-Roch*, der ähnlich der Formel von Euler eine Beziehung oder Bedingung beinhaltet; in diesem Falle dafür, dass auf einer Riemannschen Fläche R eine (meromorphe) Funktion F existieren kann. Zu den miteinander in Beziehung gebrachten Grössen gehört neben dem Geschlecht der Fläche R der Grad von F und die Anzahl linear unabhängiger Funktionen und Differentiale, die an den Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von F gewisse Bedingungen betreffend die Grösse der Ordnungen erfüllen.

Riemann führte um 1860 auch schon höher-dimensionale Räume ein, die er n-Ketten nannte, und begann mit deren topologischen Untersuchungen. Systematisch geschah das aber erst durch Henri Poincaré in einer Reihe von Arbeiten zwischen 1892 und 1904 durch Einführen der Begriffe der n-dimensionalen Zelle, der Zellenketten und der Homologie sowie der Zerlegung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit in ihre Zellen. Ein Punkt ist eine null-dimensionale Zelle, eine Strecke eine ein-dimensionale, ein Dreieck eine zwei-dimensionale, ein Tetraeder eine drei-dimensionale etc. Der Rand einer (gerichteten) Strecke besteht aus seinen beiden Endpunkten, versehen mit gewissen Vorzeichen und aufgefasst als null-dimensionale Zellenkette. Entsprechend ist der Rand eines (orientierten) Dreiecks eine zwei-dimensionale

Zellenkette bestehend aus den drei Seiten des Dreiecks. Der Rand eines Tetraeders ist eine Zellenkette, die aus den vier zwei-dimensionalen Dreiecken besteht, die es begrenzen etc. So werden einem n-dimensionalen Raum X mittels der Randbildung Zellenketten von kleinerer Dimension zugeordnet. Eine Kette ist geschlossen und wird Zyklus genannt, wenn ihr Rand Null ist. Topologische Invarianten von X sind nun die Bettischen Zahlen von X. Die q-te Bettische Zahl $b(q)$ von X ist die maximale Anzahl von geschlossenen q-dimensionalen Zyklen, die linear unabhängig sind bis auf Ränder von $q+1$-dimensionalen Zellen. Emmy Noether hatte 1928 vorgeschlagen, die Bettische Zahl $b(q)$ präziser als Rang der sogenannten q-ten *Homologiegruppe* von X aufzufassen, die als Faktogruppe der q-Zyklen nach der Gruppe der q-Ränder definiert wird. Von grösster Bedeutung ist nun die *Euler-Poincaré-Charakteristik* $h(X)$ von X, die als alternierende Summe der Bettischen Zahlen definiert wird: $h(X) = b(0) - b(1) + b(2) - b(3) + b(4) - \ldots \pm b(n)$. Weil die Euler-Poincaré-Charakteristik einer geschlossenen Fläche F vom Geschlecht g gleich $2-2g$ ist, beinhaltet sie eine weitgehende Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes. Im Jahre 1953 hatte Serre die glänzende Idee, dass der Satz von Riemann-Roch eine umfassende Verallgemeinerung (für kohärente Garben auf einer nicht-singulären projektiven Varietät) erlaube, wenn man ihn als Euler-Poincaré-Formel auffasse. Vollständig ausgeführt wurde diese Idee von Friedrich Hirzebruch in seiner Habilitationsschrift wenige Monate später. 1958 ist dieser für viele Bereiche der Mathematik zentrale Satz von Alexander Grothendieck auf algebraische Varietäten verallgemeinert worden. Über die zu dieser Zeit stürmische Entwicklung gibt der vor zwei Jahren erschienene Briefwechsel zwischen Serre und Grothendieck interessanten Aufschluss. Mit dem Satz von Riemann-Roch und seiner Gültigkeit auch über algebraischen Zahlbereichen (nicht nur über den komplexen Zahlen) ergibt sich eine enge Verbindung nicht nur von Topologie und Funktionentheorie, sondern auch von Algebraischer Geometrie mit der Zahlentheorie. Auf dieser Grundlage fusst Serres Buch ≪Algebraische Gruppen und Klassenkörpertheorie≫ (1959), das zusammen mit seinem Buch ≪Corps locaux≫ (1968) wegweisend für viele weitere Forschungen geworden ist. Insbesondere die Anwendung auf die Zahlentheorie elliptischer Kurven hat in neuerer Zeit eine hervorragende Rolle gespielt, nicht zuletzt auch im Zusammenhang mit dem Beweis der Fermatschen Vermutung, wozu Serre einen entscheidenden Schritt beigetragen hat.

Da eine elliptische Kurve $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ durch doppelt-periodische elliptische Funktionen parametrisiert wird, die als Umkehrfunktionen elliptischer Integrale auftreten, ähnlich wie der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ durch die Umkehrfunktion des Integrals von $1/\sqrt{1-z^2}$, nämlich die periodische Sinus-Funktion und deren Ableitung, parametrisiert wird, ergibt sich daraus eine enge Verbindung von Zahlentheorie und Funktionentheorie. Dass eine komplexe projektive elliptische Kurve topologisch einem Torus äquivalent ist, schafft die Verbindung zur Topologie.

Eine andere wichtige algebraische Invariante eines topologischen Raumes X ist die von Poincaré 1895 eingeführte *Fundamentalgruppe* $W(X)$, nämlich die Gruppe der geschlossenen Wege in X von einem fixen Basispunkt x aus. Dabei sind zwei Wege topologisch äquivalent, wenn sie homotop, d.h. in X stetig ineinander deformierbar sind. Die Fundamentalgruppe einer (zusammenhängenden kompakten) Riemannschen Fläche vom Geschlecht g hat $2g$ Erzeugende. Sie hängt also wieder mit der Zahl der Löcher von X zusammen. Mit $2g$ Schnitten kann nämlich X in eine einfache Fläche aufgeschnitten werden, so wie der Torus mit zwei Schnitten entlang zweier seiner Kreise in ein Rechteck aufgeschnitten werden kann. $W(X)$ heisst auch die erste *Homotopiegruppe* von X, nachdem um 1935 W. Hurewicz die höheren Homotopiegruppen für X eingeführt hatte, die sozusagen den höherdimensionalen geschlossenen Wegen (Sphären) in X entsprechen. Serre erhielt nun eine Reihe von bedeutenden Resultaten über die Homotopiegruppen von Räumen, in dem er sie auf die Homologiegruppen von geeignet konstruierten Hilfsräumen zurückführte.

5. Für seine klare Darstellung verschiedenster schwieriger mathematischer Theorien und für seine grundlegenden und einflussreichen Lehrbücher hat Serre 1995 den Steele-Preis der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft erhalten. Auch wurde er mit einer Reihe hoch dotierter Preise ausgezeichnet, etwa 1985 mit dem Balzan-Preis und im Jahre 2000 mit dem Wolf-Preis. 1954 erhielt er als jüngster Preisträger aller Zeiten die Fields-Medaille, die bis anhin die Rolle eines Nobelpreises für Mathematik gespielt hat.

6. Über die Gründe, warum Alfred Nobel bei der Stiftung der Preise für Physik, Chemie, Medizin und Physiologie, Literatur und für den Frieden die Mathematik übergangen hatte, ist viel spekuliert worden. Dass dies am damals sehr einflussreichen schwedischen Mathematiker Gösta Mittag-Leffler gelegen habe, der ein Verhältnis mit Nobels Geliebter gehabt haben soll, gehört ins Reich der Märchen. Vielmehr hatte Nobel damals wohl mehr an die «praktischen Wissenschaften» gedacht. Schon 1902 hatte der damalige schwedische König Oskar II den Vorschlag gemacht, einen vergleichbaren Preis für Mathematik zu stiften. Der Anlass hierzu war der sich zum hundertsten Mal jährende Geburtstag des bedeutenden Mathematikers Niels Henrik Abel. Als sich aber Norwegen im Jahre 1905 von Schweden trennte und das Storting einen dänischen Prinzen zum König wählte, wurde die Idee aufgegeben. Hundert Jahre später wurde sie erneut aufgegriffen. Im August 2001 hatte der norwegische Ministerpräsident Jens Stoltenberg auf Anregung von fünf norwegischen Mathematikern die Errichtung einer Niels-Henrik-Abel-

Stiftung angekündigt. Das Stiftungskapital sollte 200 Millionen norwegische Kronen (40 Millionen Franken) betragen. Nachdem das norwegische Parlament dem Vorschlag im Januar 2002 zugestimmt hatte, stand der Ausschreibung des Preises nichts mehr im Wege.

Hombrechtikon, den 19. Mai 2003

Prof. Dr. Günther Frei
CICMA
Université Laval
Ste-Foy, Quebec, G1K 7P4
Kanada

und:

Prof. Dr. Günther Frei
Lützelstrasse 36
CH-8634 Hombrechtikon
Schweiz

E-mail: g.frei@active.ch