Doctoral Thesis

Parabolic renormalization of weakly commuting pairs

Author(s):
Hallström-Wyss, Simon

Publication Date:
2004

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004668899

Diss. ETH No. 15248

Parabolic renormalization of weakly commuting pairs

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
SIMON HALLSTRÖM-WYSS
Dipl. Math. ETH
born 30. 10. 1971
citizen of Luzern, LU

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. O. E. Lanford III, examiner
Prof. Dr. E. Zehnder, co-examiner

2004

Zusammenfassung

Wir betrachten das Verhalten der Renormierungsoperatoren $\mathcal{R}_p$ für analytische, kritische, schwach kommutierende Paare für kleine Rotationsszahlen. Der Raum dieser Paare lässt sich in offene Streifen $\mathcal{D}_p$, bestehend aus den Paaren mit Rotationszahl in $(1/(p+1), 1/p)$, zerlegen. Diese Streifen werden für $p \to \infty$ 'dünner' und 'konvergieren' gegen die Hyperfläche $\mathcal{D}_\infty$ bestehend aus den Paaren (ξ, η) deren η einen parabolischen Fixpunkt hat. Die Renormierungsoperatoren wirken wie die Gauss-Abbildung $x \mapsto \mathrm{frac}(1/x)$ auf Rotationszahlen, d. h. sie haben eine zunehmend expandierende Wirkung in die Richtung sich ändernder Rotationszahlen.

Numerische Experimente lassen vermuten, dass jeder Operator $\mathcal{R}_p$ einen hyperbolischen Fixpunkt besitzt. Wir konstruieren einen Operator $\mathcal{R}_\infty : \mathcal{D}_\infty \longrightarrow \mathcal{D}_\infty$ der diese expandierende Wirkung folgendermassen kompensiert: Aus einer einparametrigen Familie von Paaren werden die Paare mit Rotationszahl zwischen $1/(p+1)$ und $1/p$ unter $\mathcal{R}_p$ auf eine Familie mit Rotationszahlen zwischen 0 und 1 abgebildet. Wir zeigen, dass diese Familien für $p \to \infty$ konvergieren.Wir definieren, dass $\mathcal{R}_\infty$ den Schnittpunkt der ursprünglichen Familie mit $\mathcal{D}_\infty$ auf den Schnittpunkt dieser Grenzfamilie mit $\mathcal{D}_\infty$ abbildet. Lanford hat unter Verwendung exakter, computerunterstützter Abschätzungen bewiesen, dass ein $\mathcal{R}_\infty$ verwandter Operator (definiert für Kreisabbildungen statt Paare) kontrahierend ist. Der Plan ist, zu zeigen, dass, für p gross genug, $\mathcal{R}_p$ als Abbildung *zwischen ein-parametrigen Familien* kontrahierend ist für eine geeignete Metrik auf dem Raum dieser Familien. Der Fixpunkt dieser Abbildung wäre dann die instabile Mannigfaltigkeit von $\mathcal{R}_p$. Wir beweisen einen ersten Schritt in diesem Programm: Obwohl die expandierende Wikung der Operatoren D $\mathcal{R}_p$ zunimmt, bleiben sie, eingeschränkt auf geeignete Unterräume mit Codimension 1, beschränkt.

Abstract

We consider the behaviour of the renormalization operators $\mathcal{R}_p$ for analytic, critical, weakly commuting pairs with small rotation numbers. We can think of this space of pairs as beeing divided into layers consisting of those pairs that have rotation number in $(1/(p+1), 1/p)$. These layers get 'thiner' as $p \longrightarrow \infty$ and 'converge' to the hypersurface $\mathcal{D}_\infty$ consisting of those pairs (ξ, η) whose η has a parabolic fixed-point. The $\mathcal{R}_p$ act as the Gauss-map $x \mapsto \text{frac}(1/x)$ on the rotation number, i. e. they have an increasingly expansive impact in the direction of changing rotation numbers.

Numerical experiments suggest that every $\mathcal{R}_p$ has a hyperbolic fixed-point. We will construct an operator $\mathcal{R}_\infty : \mathcal{D}_\infty \longrightarrow \mathcal{D}_\infty$ which compensates this expansive character as follows: Consider a one-parameter-family of pairs. $\mathcal{R}_p$ maps those pairs with rotation number between $1/(p+1)$ and $1/p$ onto a family with rotation number between 0 and 1. We will prove that these families converge as $p \longrightarrow \infty$. We define that $\mathcal{R}_\infty$ shall map the intersection of the original family with $\mathcal{D}_\infty$ to the intersetion of this limiting family with $\mathcal{D}_\infty$. Lanford proved using exact, computer-assisted estimates, that another operator defined on circle mappings instead of pairs, closely related to $\mathcal{R}_\infty$ has a contractive fixed-point. The plan is to show that for large enough p, $\mathcal{R}_p$ as a mapping *between one -parameter familie* is contractive with respect to a suitable metric on the space of such families. The fixed point of this mapping would be the unstable manifold for $\mathcal{R}_p$. We will prove a first step in this program: Although the expansive character of the operators $D\mathcal{R}_p$ increases as $p \longrightarrow \infty$ they stay bounded if restricted to a suitable, codimension 1 subspace.