

Diss. ETH No. 15547

# Solving High Dimensional Dirichlet Problems Numerically Using the Feynman-Kac Representation ‡

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of  
Doktor der Mathematik

presented by  
FABIAN M. BUCHMANN  
Dipl. Rech. Wiss. ETH  
born May 25, 1974  
citizen of Zürich ZH, Switzerland

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Rolf Jeltsch, examiner  
Dr. Wesley P. Petersen, co-examiner  
Prof. Dr. Peter Kloeden, co-examiner

2004

‡: This work was supported in part under the TH-Gesuch funds 0-20981-2.

# Abstract

We propose two different algorithms to solve high dimensional Dirichlet problems numerically. Both approaches are based on the stochastic representation of the solution in the form of the famous Feynman-Kac formula. Here, the solution to an elliptic second order partial differential equation (PDE) is given by the expectation over some functionals of connected stochastic differential equations (SDEs). For the Dirichlet problem, the boundary condition makes the solution of the PDE unique.

Monte-Carlo simulations involve the numerical approximation of the solution of the SDEs and the approximation of the mathematical expectation by a finite mean. For the simulation in a bounded domain, however, the first exit time of the process solving the SDE from the domain also plays a crucial role. On the one hand, integration is stopped as soon as the process reaches the boundary and on the other hand, the boundary condition is to be evaluated at the first exit point of the process from the domain.

The proposed algorithms not only succeed in the approximation of the first exit time but also give an accurate approximation for the first exit point. Both algorithms make use of the fact that approximations of the solution of the SDEs have to be accurate only in a weak sense. Nevertheless, the two methods have essential differences.

The first method uses bounded approximations for the increments of the simulated Brownian motion. This allows us to prevent the resulting discrete random walk from leaving the closure of the domain and the walk to approach the boundary in a controlled way. We prove both, the expected number of steps and the accuracy of the resulting one step approximation in the weak sense. A series of numerical tests is included.

The second method uses Euler's method to approximately integrate the SDEs. Using normally distributed random variables to model the Brownian increments, the resulting discrete random walk is no longer restricted to the closure of the domain, but, might leave it within every step. An *a posteriori* test accounts for additional errors arising by the presence of boundaries. Corresponding exit times and exit points are sampled from analytical densities. Results from numerical experiments show that weak order one convergence of the Euler scheme is restored. Additionally, our results show the superiority of the proposed

algorithm compared to other methods.

Both methods are ideally suited for parallel simulations. Numerical tests in dimensions as high as 128 were run on the Beowulf cluster at ETH.

# Kurzfassung

Wir stellen in dieser Arbeit zwei verschiedene Methoden zur numerischen Lösung hochdimensionaler Dirichlet-Probleme vor. Beide Lösungsvorschläge basieren auf der stochastischen Darstellung der Lösung in Form der berühmten Feynman-Kac-Formel. Mit dieser Formel ist die Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung (englisch: PDE) zweiter Ordnung als Erwartungswert bestimmter Funktionale stochastischer Differentialgleichungen (englisch: SDEs) darstellbar. Diese SDEs sind ihrerseits wieder mit der PDE über die Koeffizienten verbunden. Beim Dirichlet-Problem wird die Lösung der PDE durch Vorgabe einer Randbedingung eindeutig.

Monte-Carlo-Simulationen beinhalten im Prinzip nur die numerische Näherungslösung der SDEs und die Approximation des Erwartungswertes durch einen endlichen Mittelwert. Eine zentrale Rolle bei der Simulation in einem beschränkten Gebiet spielt jedoch zusätzlich der Zeitpunkt, in dem der Prozess, welcher die SDE löst, zum ersten Mal den Rand des Gebietes erreicht: Einerseits muss die Integration beendet werden, sobald der Prozess zum ersten Mal das Gebiet verlässt, und andererseits muss die Randbedingung an diesem Punkt ausgewertet werden.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Algorithmen approximieren mit hoher Genauigkeit neben dem Zeitpunkt, in welchem der Prozess zum ersten Mal das Gebiet verlässt, auch den zugehörigen Austrittspunkt. Beide Algorithmen nutzen aus, dass die Näherungslösungen der SDEs nur in einem schwachen Sinn gegen die exakten Lösungen konvergieren müssen. Trotz dieser Gemeinsamkeit unterscheiden sich die beiden Methoden in grundlegenden Punkten.

Die erste Methode verwendet beschränkte Approximationen für die Inkremente der simulierten Brown'schen Bewegung. Dadurch können wir verhindern, dass der resultierende diskrete Zufallslauf den Abschluss des Gebietes verlässt und können so dessen Annäherung an den Rand des Gebietes kontrollieren. Wir beweisen sowohl die Anzahl der im Mittel benötigten Schritte des Zufallslaufes, als auch die Genauigkeit der resultierenden Näherung für einen Zeitschritt. Wir zeigen Resultate mehrerer numerischer Experimente.

Die zweite Methode benutzt das Eulerverfahren zur näherungsweise Integration der

SDEs. Da dabei normal verteilte Zufallszahlen zur Modellierung der Brown'schen Bewegung benutzt werden, kann der resultierende diskrete Zufallslauf den Abschluss des Gebietes in jedem Zeitschritt verlassen. Ein *a posteriori* Test berücksichtigt die Anwesenheit von Rändern und reduziert die dadurch bedingten zusätzlichen Fehler. Zugehörige Austrittszeiten und -punkte des Zufallslaufes werden durch Zufallszahlen mit den entsprechenden analytischen Verteilungen modelliert. Resultate numerischer Experimente zeigen, dass die schwache Konvergenzordnung des Eulerverfahrens wieder erreicht wird. Zusätzlich zeigen unsere Resultate die Überlegenheit des vorgeschlagenen Algorithmus im Vergleich zu anderen Methoden.

Beide Methoden sind ideal geeignet für parallele Simulationen. Numerische Tests in bis zu 128 Dimensionen wurden auf dem Beowulf-Cluster der ETH gerechnet.