

Star products and symplectic groupoids

Doctoral Thesis

Author(s):

Dhérin, Benoît Umberto Richard

Publication date:

2004

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004839245>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

DISS. ETH NO. 15720

Star Products and Symplectic Groupoids

A dissertation submitted to the

SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of

Doctor of Mathematics

presented by

Benoît Dhérin Richard Umbert
Dipl. math. University of Geneva

born February 15, 1978

citizen of
France

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Giovanni Felder, examiner
Prof. Dr. Alberto S. Cattaneo, co-examiner

2004

Résumé

Le sujet de cette thèse est d'établir que la partie semi-classique de la formule de quantification par déformation de Kontsevich associée à une structure de Poisson sur un ouvert U de \mathbb{R}^d génère un groupoïde symplectique local ou formel selon que la structure de Poisson est analytique ou non sur U .

Ceci démontre une forte connection entre la théorie des produits étoiles et celle des groupoïdes symplectiques déjà conjecturée par Weinstein dans [28].

Le plan de cette thèse est le suivant.

Le premier chapitre présente le produit étoile de Kontsevich et expose l'origine de la théorie des produits étoiles qui trouve ses racines dans la mécanique quantique et, plus particulièrement, l'infructueuse tentative de comprendre le principe de correspondance comme un morphisme de Lie entre l'algèbre de Lie des observables classiques et celle des observables quantiques.

Le second chapitre présente les groupoïdes symplectiques comme l'équivalent dans la catégorie (étendue) des variétés symplectiques, des algèbres associatives dans la catégorie des espaces vectoriels si l'on suppose que certaines constructions provenant de la théorie de la quantification géométrique sont en fait un foncteur entre ces deux catégories. Par ailleurs nous introduisons le concept de fonction génératrice d'un groupoïde symplectique local ou formel sur un ouvert de \mathbb{R}^d et présentons le résultat principal de cette thèse qui affirme que la partie semi-classique de la formule de quantification par déformation de Kontsevich est en fait la fonction génératrice du groupoïde symplectique local ou formel sur l'ouvert U et associé à la structure de Poisson α . Nous montrons en particulier que pour des structures de Poisson analytiques la partie semi-classique de la formule de Kontsevich converge et nous démontrons que dans ce cas le groupoïde symplectique local est exactement celui construit par Karasev et Maslov dans [20]. Par conséquent, nous remarquons que dans le cas analytique l'on peut utiliser leur construction pour recoller les groupoïdes symplectiques locaux générés sur les cartes locales de la variété de Poisson par la partie semi-classique de la formule de Kontsevich. Ce faisant, cela nous permet de construire le groupoïde symplectique local associé à une variété de Poisson analytique.

Le dernier chapitre est consacré à la construction d'une théorie de déformation pour les groupoïdes symplectiques sur \mathbb{R}^d par le biais des déformations de leur fonction génératrice. Le cadre théorique que nous mettons en place ici utilise essentiellement la théorie des opérades et s'inspire fortement de ce qu'on peut faire dans une catégorie additive en terme de déformation. Nous montrons enfin que la solution du problème de la déformation de la fonction génératrice triviale du groupoïde symplectique triviale au-dessus de \mathbb{R}^d est exactement la partie semi-classique de la formule de Kontsevich.

Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à l'introduction de chacun des chapitres de cette thèse.

Abstract

The main object of this dissertation is to show that the semi-classical part of Kontsevich deformation formula associated to a Poisson structure α on an open set $U \subset \mathbb{R}^d$ generates the local/formal symplectic groupoid on U associated to α . This gives a strong link between star products and symplectic groupoids already foreseen by Weinstein in [28].

The dissertation is organized as follows.

In Chapter 1, we develop Kontsevich star product and expose how the theory of star products takes its root in quantum mechanics and more precisely in the unsuccessful attempt to understand the correspondence principle as a Lie morphism from the Lie algebra of classical observables into the Lie algebra of quantum observables.

In Chapter 2, we present symplectic groupoids as the counterpart, in the (extended) category of symplectic manifolds, of associative algebras in the category of vector spaces if one assumes that some constructions coming from geometric quantization construct a functor between these two categories. We develop the theory of generating function of local/formal symplectic groupoids over open subsets of \mathbb{R}^d and expose the main result of the dissertation, namely, that the semi-classical part of Kontsevich star product is the generating function of the local/formal symplectic groupoid over U associated to the Poisson structure α . We prove that for analytical Poisson structure the semi-classical part converges, and show that, in this case, the local symplectic groupoid constructed with the help of the generating function yields exactly the same local symplectic groupoid as the one constructed by Karasev and Maslov in [20]. As a consequence, we note that, in the analytical case, we may use their construction to patch the local groupoids generated by the semi-classical part of Kontsevich star product on each chart U of a general Poisson manifold M , to construct the local symplectic groupoid associated to M .

In Chapter 3, we show how we can develop a deformation theory for symplectic groupoids on \mathbb{R}^d , by deforming their generating function. This framework uses essentially the theory of non-linear operads by mimicking the construction of deformation theory in additive categories and transporting them with some care in the extended symplectic category. We show at last that the solution of the deformation problem of the trivial generating function of the trivial symplectic groupoid $T^*\mathbb{R}^d$ is unique and given by the semi-classical part of Kontsevich star product.

For more precision, we refer the reader to the special introduction at the beginning of each chapter.