Diss. ETH No. 15750

hp-Finite Element Methods on Anisotropically, Locally Refined Meshes in Three Dimensions with Stochastic Data

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZÜRICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
PHILIPP FRAUENFELDER
Dipl. Math. ETH
born September 19, 1974
citizen of Henggart ZH and Niederglatt ZH, Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Christoph Schwab, examiner
Prof. Dr. Ralf Hiptmair, co-examiner

2004

Abstract

The present thesis is concerned with *hp*-Finite Element Methods in three dimensions. To resolve singularities or characteristic length scales in many physical and engineering applications, it is necessary to have *geometric meshes with local refinements* to obtain *exponential convergence*. With exponential convergence, it is feasible to reduce the discretisation error and the numerical errors several orders of magnitude below the modeling error.

In three dimensions, geometric meshes require *simultaneous, anisotropic refinements* in the mesh size h and the polynomial degree p. We study the algorithmic and implementational details and give a number of numerical examples for the reaction diffusion equation as well as Maxwell's equations. Maxwell's equations are discretised using H^1-conforming elements and weighted regularisation.

Uncertainty in the input data is another source of errors besides numerical and modelling errors. We develop a method to solve elliptic partial differential equations with stochastic coefficients efficiently using a Karhunen-Loève expansion of the stochastic coefficients. The numerical scheme is *embarassingly parallel.*

The software used to solve the numerical examples in this thesis is avaible for download as Open Source Software.

Kurzfassung

Die vorliegende Doktorarbeit behandelt *hp*-Finite Element Methoden in drei Dimensionen. Um Singularitäten oder charakteristische Längen in physikalischen oder technischen Anwendungen aufzulösen und exponentielle Konvergenz zu erhalten, braucht es *geometrische Gitter mit lokalen Verfeinerungen*. Durch die exponentielle Konvergenz wird es möglich, die Diskretisierungs-Fehler und numerischen Fehler um Grössenordnungen unter den Modellierungs-Fehler zu senken.

Um dreidimensionale, geometrische Gitter herstellen zu können, werden *gleichzeitige, anisotrope Verfeinerungen* der Gitterweite h und des Polynomgrads p benötigt. Wir untersuchen die algorithmischen und programmiertechnischen Einzelheiten und geben eine Reihe von Beispielen der Reaktions-Diffusions-Gleichung und der Maxwell-Gleichungen. Die Maxwell-Gleichungen werden mit H^1-konformen Elementen und gewichteter Regularisierung diskretisiert.

Unsicherheit bei den Eingabe-Daten ist eine weitere Quelle von Fehlern neben numerischen und Diskretisierungs-Fehlern. Wir untersuchen eine Methode, um elliptische, partielle Differential-Gleichungen mit stochastischen Koeffizienten effizient zu lösen. Dazu wir eine Karhunen-Loève-Zerlegung der stochastischen Koeffizienten verwendet. Die numerische Methode ist *beschämend parallel.*

Die Software, die für die numerischen Beispiele dieser Arbeit benutzt worden ist, ist als Open Source Software zum Download erhältlich.