On some first passage time problems motivated by financial applications

Author(s):
Patie, Pierre

Publication Date:
2004

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004946228

Doctoral Thesis ETH No. 15834

On some First Passage Time Problems Motivated by Financial Applications

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
PIERRE PATIE
D.E.A. Appl. Math., UPPA
Pau, France

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. F. Delbaen, examiner
Dr. L. Alili, co-examiner
Prof. Dr. A. Novikov, co-examiner
Prof. Dr. M. Schweizer, co-examiner
Prof. Dr. M. Yor, co-examiner

2004

Abstract

From both theoretical and applied perspectives, first passage time problems for random processes are challenging and of great interest. In this thesis, our contribution consists on providing explicit or quasi-explicit solutions for these problems in two different settings.

In the first one, we deal with problems related to the distribution of the first passage time (FPT) of a Brownian motion over a continuous curve. We provide several representations for the density of the FPT of a fixed level by an Ornstein-Uhlenbeck process. This problem is known to be closely connected to the one of the FPT of a Brownian motion over the square root boundary. Then, we compute the joint Laplace transform of the L^1 and L^2 norms of the 3-dimensional Bessel bridges. This result is used to illustrate a relationship which we establish between the laws of the FPT of a Brownian motion over a twice continuously differentiable curve and the quadratic and linear ones. Finally, we introduce a transformation which maps a continuous function into a family of continuous functions and we establish its analytical and algebraic properties. We deduce a simple and explicit relationship between the densities of the FPT over each element of this family by a selfsimilar diffusion.

In the second setting, we are concerned with the study of exit problems associated to Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes. These are constructed from the classical Ornstein-Uhlenbeck process by simply replacing the driving Brownian motion by a Lévy process. They are diffusions with possible jumps. We consider two cases: The spectrally negative case, that is when the process has only downward jumps and the case when the Lévy process is a compound Poisson process with exponentially distributed jumps. We derive an expression, in terms of new special functions, for the joint Laplace transform of the FPT of a fixed level and the primitives of theses processes taken at this stopping time. This result allows to compute the Laplace transform of the price of a European call option on the maximum on the yield in the generalized Vasicek model. Finally, we study the resolvent density of these processes when the Lévy process is α-stable $(1 < \alpha \leq 2)$. In particular, we construct their q-scale function which generalizes the Mittag-Leffler function.

Zusammenfassung

Grenzüberschreitungsprobleme in stochastischen Prozessen sind herausfordernd und sehr interessant, sowohl vom theoretischen als auch vom angewandten Standpunkt betrachtet. Der Beitrag dieser Dissertation besteht aus (quasi-)expliziten Lösungen für solche Probleme in zwei verschiedenen Fällen.

Im ersten Fall behandeln wir Probleme im Zusammenhang mit der Verteilung der ersten berschreitungszeit (First Passage Time, FPT) einer Brownschen Bewegung über eine stetige Kurve. Wir zeigen mehrere Darstellungen für die Dichte der FPT eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses über einen konstanten Schwellwert. Dieses Problem ist bekanntermassen eng verbunden mit jenem der FPT einer Brownschen Bewegung über die Quadratwurzelfunktion. Wir berechnen dann die gemeinsame Laplace-Transformierte der L^1- und L^2-Normen der dreidimensionalen Bessel-Brücken. Dieses Resultat wird verwendet zur Illustration einer von uns hergestellten Beziehung zwischen der Verteilung der FPT einer Brownschen Bewegung über eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und der Verteilung im quadratischen und im linearen Fall. Schliesslich führen wir eine Transformation ein, die eine stetige Funktion auf eine Familie von stetigen Funktionen abbildet, und wir zeigen die analytischen und algebraischen Eigenschaften dieser Transformation. Mit Hilfe einer selbstähnlichen Diffusion leiten wir eine einfache und explizite Beziehung her zwischen den Dichten der FPT über jedes Element der Familie.

Im zweiten Fall befassen wir uns mit dem Studium von Austrittsproblemen im Zusammenhang mit verallgemeinerten Ornstein -Uhlenbeck-Prozessen. Diese werden aus klassischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen konstruiert, indem man die treibende Brownsche Bewegung durch einen Lévy-Prozess ersetzt. Es sind dies Diffusionen mit mglichen Sprüngen. Wir betrachten zwei mgliche Fälle: Erstens den spektral negativen Fall, in dem der Prozess nur Abwärtssprünge aufweist, und zweitens den Fall, in dem der Lévy-Prozess ein verbundener Poisson-Prozess mit exponentialverteilten Sprüngen ist. Wir leiten eine Darstellung her basierend auf neuen, speziellen Funktionen für die gemeinsame Laplace-Transformierte der FPT über einen konstanten Schwellwert und den Primitiven dieser Prozesse betrachtet an der so definierten Stoppzeit. Dieses Resultat ermglicht die Berechnung der Laplace-Transformierten einer Europäischen Call-Option auf dem maximalen Zins im verallgemeinerten Vasicek-Modell. Schliesslich studieren wir die Dichte des Resolventen solcher Prozesse für den Fall, in dem der Lévy-Prozess α-stabil ist mit $1 < \alpha \leq 2$. Insbesondere konstruieren wir deren Skalenfunktion, welche die Mittag-Leffler-Funktion verallgemeinert.