Helmut Hasse in Halle

Helmut Hasse in Halle

von Günther Frei und Peter Roquette *

16. 4. 2002

Inhaltsverzeichnis

*Dieses Manuskript wurde für eine Internet-Seite der Mathematik an der Universität Halle angefertigt.

1 Vorwort

Helmut Hasse (1898–1979) wird der mathematischen Welt als einer der führenden Zahlentheoretiker seiner Zeit in Erinnerung bleiben. Auch über die Zahlentheorie hinaus haben seine Ideen die Mathematik in starkem Maße beeinflusst.

Hasse wirkte in Halle in den Jahren 1925–1930. Diese Jahre, zusammen mit den folgenden Jahren 1930–1934 in Marburg, können als die fruchtbarste Periode seines Schaffens angesehen werden. In der folgenden Kurzbiographie Hasses wird insbesondere seine Tätigkeit in Halle herausgestellt.

Wir haben eine Reihe von Zitaten aus Briefen und anderen Quellen aufgenommen. Dabei stützen wir uns u.a. auf Dokumente aus dem Archiv der Universität Halle, sowie auf Briefe aus dem Nachlass Hasses, die sich in der Handschriftenabteilung der Universität Göttingen befinden.

2 Lebensdaten

Helmut Hasse wurde am 25. August 1898 in Kassel geboren. Die Jugendjahre verbrachte er vorwiegend in Kassel und ab 1913 in Berlin. Nach dem Notabitur im Sommer 1915 diente er als Kriegsfreiwilliger in der Marine. Im Herbst 1917 immatrikulierte sich Hasse an der Universität Kiel und ein Jahr darauf an der Universität Göttingen. Im Frühjahr 1920 liess er sich an die Universität in Marburg umschreiben, um dort bei Hensel die Theorie der p-adischen Zahlen zu studieren.

Im Mai 1921 wurde Hasse in Marburg promoviert und im Februar 1922 folgte die Habilitation. Im Herbst 1922 erhielt er eine Stelle als Privatdozent in Kiel, und zur selben Zeit heiratete er Clara Ohle. Ostern 1925 wurde er als Ordinarius nach Halle berufen. Zugleich wurde er Direktor des Mathematischen Institutes in Halle, neben Heinrich Jung. 1930 übernahm er die Nachfolge von Hensel in Marburg und 1934 die von Hermann Weyl in Göttingen. Nach dem Kriege wirkte er in Berlin, zuerst ab 1946 an der Deutschen Akademie der Wissenschaften und später an der Humboldt-Universität. 1950 nahm Hasse einen Ruf an die Universität Hamburg an, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1966 blieb. Er starb am 26. Dezember 1979 in Ahrensburg nach längerer, schwerer Krankheit.

3 Studium

Schon während seiner Marine-Dienstzeit hatte Hasse Gelegenheit gehabt, sich umfangreiche Kenntnisse in der Zahlentheorie anzueignen, angeregt durch seinen ehemaligen Mathematiklehrer Hermann Wolff, mit dem er einen regen Briefwechsel pflegte und der ihm das Buch „*Vorlesungen über Zahlentheorie*“ von Dirichlet-Dedekind empfohlen hatte. Er hatte offenbar frühzeitig die mathematische Begabung Hasses erkannt. Im Abiturzeugnis (1915) hatte er dem jungen Hasse attestiert:

> *In Mathematik sehr gut. Er hat sich, entsprechend seiner Begabung, mit ungewöhnlichem Erfolge auch auf Gebieten betätigt, die ausserhalb des Lehrplanes der Schule liegen.*

Im Wintersemester 1917/18, als Hasse in Kiel stationiert war, hörte Hasse an der dortigen Universität eine Vorlesung von Toeplitz über die Verteilung der Primzahlen. Danach in Göttingen besuchte er Vorlesungen u.a. bei Landau, Hilbert und Courant; am stärksten beeinflußt wurde er dort jedoch durch Hecke, bei dem er die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen lernte, was für seine späteren Arbeiten von besonderer Bedeutung werden sollte.

Im Frühjahr 1920, als Hecke einen Ruf nach Hamburg angenommen hatte, verließ auch Hasse die Universität Göttingen. Er folgte jedoch nicht seinem Lehrer nach Hamburg, sondern ging nach Marburg zu Kurt Hensel. Den Anlaß zu diesem Schritt gab das Buch „Zahlentheorie“ von Hensel, welches eine Einführung in die Theorie der p-adischen Zahlen enthält. Dieses Buch übte auf Hasse nach seinen eigenen Worten eine „magische Anziehungskraft“ aus, und so entschloss er sich, nach Marburg zu gehen, um mehr über p-adische Zahlen zu lernen.

4 Dissertation bei Hensel in Marburg

Dieser sein Entschluß sollte sich als besonders folgenreich für die weitere Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie erweisen. In der Tat trug Hasse durch seine eigenen Arbeiten, beginnend mit der Marburger Dissertation, wesentlich dazu bei, die Theorie der Henselschen p-adischen Zahlen endgültig als leistungsfähiges Hilfsmittel für die Zahlentheorie zu etablieren. Wenn wir die Entdeckung des p-adischen durch Hensel zu den großen geistigen Leistungen des letzten Jahrhunderts rechnen, so gebührt Hasse das Verdienst, deren Bedeutung erkannt und durch seine Arbeiten in Evidenz gesetzt zu haben. Van der Waerden drückte das einmal so aus:

> *Hasse was Hensel's best and great propagandist.*

Was sind nun p-adische Zahlen? Eigentlich sollte die Theorie der p-adischen Zahlen heutzutage zum festen Bestandteil der mathematischen Grundausbildung an unseren Universitäten gehören, aber vielleicht ist das doch noch nicht überall der Fall. Deshalb wollen wir das hier kurz erläutern. Und zwar lassen wir Hasse selbst sprechen. Das folgende Zitat ist einem Vortrag entnommen, den Hasse im Jahre 1929, also während seiner Hallenser Zeit, auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung gehalten hat. Diese Tagung fand damals in Prag statt. Hasse war aufgefordert worden, zu Beginn der Tagung einen allgemeinen Vortrag über die „moderne algebraische Methode“ zu halten. Das bedeutete nach dem damaligen Sprachgebrauch die axiomatische Auffassung der Mathematik, d.h. Mathematik auf der Grundlage axiomatisch definierter Strukturen. Heute ist das für uns selbstverständlich, damals aber war es das offenbar noch nicht. In diesem Vortrag kam Hasse auch auf p-adische Zahlen zu sprechen. Zitat:

> *Wir können sagen, der komplexe Zahlkörper entsteht aus dem rationalen in folgenden zwei Schritten: a) Komplettieren bezüglich der Bewertung durch den gewöhnlichen absoluten Betrag, b) algebraisches Abschliessen. Beide Schritte sind im wesentlichen eindeutig, so daß der komplexe Zahlkörper auf diese Weise vom rationalen aus charakterisiert ist.*
>
> *Nun kann man aber von der speziellen Bewertung des rationalen Zahlkörpers durch den gewöhnlichen absoluten Betrag absehen und dasselbe Verfahren auch mit ev. anderen Bewertungen des rationalen Zahlkörpers vornehmen. Was so herauskommt, muß dann vom algebraischen Standpunkt aus als gleichberechtigt mit dem komplexen Zahlkörper erscheinen.*
>
> *Solche weitere Bewertungen des rationalen Zahlkörpers gibt es in der Tat, nämlich für jede Primzahl p eine, indem man grob gesagt eine Zahl als klein rechnet, wenn sie durch eine hohe Potenz von p teilbar ist. Wie Ostrowski gezeigt hat, gibt es auch keine*

> *weiteren Bewertungen. Wendet man jetzt auch auf diese Bewertungen des rationalen Zahlkörpers die obigen beiden Schritte an, so ergeben sich a) durch Komplettieren die p-adischen Zahlkörper, b) durch algebraisches Abschließen die π-adischen Zahlkörper Hensels. Diese sind also mit dem reellen bzw. komplexen Zahlkörper im algebraischen Sinne gleichgestellt.*

Heute wird der p-adische Zahlkörper mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet. Um eine einheitliche Bezeichnung zu schaffen, schreibt man für den reellen Zahlkörper auch $\mathbb{Q}_\infty$ statt $\mathbb{R}$, betrachtet also gewissermassen den gewöhnlichen Absolutbetrag als zur „Primzahl ∞" gehörig. Die $\mathbb{Q}_p$ (einschl. $p = \infty$) bilden, wie man heute sagt, das *Spektrum* von $\mathbb{Q}$; man nennt $\mathbb{Q}$ einen *globalen* Körper und die $\mathbb{Q}_p$ seine *Lokalisierungen*.

In seiner Dissertation formuliert nun Hasse zum ersten Mal sein „Lokal-Global Prinzip", heute auch „Hasse-Prinzip" genannt, wonach ein über $\mathbb{Q}$ formuliertes zahlentheoretisches Problem zurückgeführt werden kann auf das entsprechende Problem über die Lokalisierungen $\mathbb{Q}_p$. Und zwar handelt es sich in der Hasseschen Dissertation um das folgende Problem: Unter welchen Bedingungen ist eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ durch eine gegebene quadratische Form $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ mit rationalen Koeffizienten a_{ij} darstellbar? Es soll also die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ in $\mathbb{Q}$ gelöst werden. Dabei werden nur *nichttriviale* Lösungen in Betracht gezogen, bei denen nicht alle $x_i = 0$ (das ist nur für $a = 0$ eine echte Bedingung). Das Hassesche Lokal-Prinzip für dieses Problem besagt nun:

> *Eine nichttriviale Lösung $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ gibt es sicher dann, aber auch nur dann, wenn das entsprechende Darstellungsproblem über jedem lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ (einschließlich $p = \infty$) nichttrivial lösbar ist.*

Der Wert dieser Aussage liegt darin begründet, daß das Darstellungsproblem über einem lokalen Körper ganz explizit gelöst werden kann; es ergeben sich nämlich gewisse Kongruenz- und Vorzeichenbedingungen für die Koeffizienten der gegebenen quadratischen Form $f(x_1, \ldots, x_n)$. Solche Bedingungen waren schon vorher von Minkowski angegeben worden; deshalb spricht man heute auch von dem „Satz von Hasse-Minkowski". Wir verdanken jedoch Hasse, über Minkowski hinausgehend, die Einsicht, daß die Lösung dieses zahlentheoretischen Problems durch ein Lokal-Global Prinzip gesteuert wird, das sich auf das Spektrum des betrachteten Körpers $\mathbb{Q}$ bezieht. Hasse-Prinzipien dieser Art dienen seitdem als Richtschnur zur Behandlung auch anderer zahlentheoretischer Probleme. Und selbst bei Problemen, für die das Hasse-Prinzip nicht gilt, ergibt die Untersuchung der entgegenstehenden Hindernisse wesentliche Einsichten in die zahlentheoretischen Gesetzmäßigkeiten.

Hasse konnte seine Dissertation bereits ein Jahr nach seiner Übersiedlung nach Marburg, also mit 22 Jahren, vorlegen. Schon ein Jahr später habilitierte er sich in Marburg mit einer Arbeit über die Äquivalenz von quadratischen Formen. Wiederum spielte dabei das *Lokal-Global-Prinzip* eine zentrale Rolle. Hasse zeigte, dass zwei quadratische Formen f und g mit rationalen Zahlkoeffizienten genau dann über $\mathbb{Q}$ äquivalent sind, wenn sie für jede Primzahl p, die unendliche Primstelle eingeschlossen, über $\mathbb{Q}_p$ äquivalent sind. Dabei stellte Hasse ein vollständiges Invariantensystem für die Äquivalenz von rationalen quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$ auf. Die wichtigste dieser Invarianten, heute „Hasse-Invariante“ genannt, wird mit Hilfe des quadratischen Restsymbols definiert und nimmt, wie jenes, nur die Werte ± 1 an.

Im September 1922 erhielt er aufgrund seiner glänzenden Ergebnisse ein Forschungsstipendium von der „Notgemeinschaft für die deutsche Wissenschaft“ (der Vorläuferin der heutigen DFG). Bereits für das Winter-Semester 1922/23 erhielt er auf Vorschlag von Otto Toeplitz einen bezahlten Lehrauftrag an der Universität Kiel.

5 Privatdozent in Kiel

In Kiel erweiterte Hasse zunächst seine bisherigen Resultate, indem er auch solche quadratischen Formen betrachtete, deren Koeffizienten in einem gegebenen algebraischen Zahlkörper K enthalten sind. Auch in diesem allgemeineren Falle konnte er die Gültigkeit des Lokal-Global-Prinzips nachweisen. Das war keineswegs trivial und führte ihn tief in die algebraische Zahlentheorie, insbesondere in die damals neue Klassenkörpertheorie im Sinne von Takagi und, damit im Zusammenhang stehend, zu den höheren Reziprozitätsgesetzen, welche er ebenfalls in den Rahmen der Henselschen p-adischen Körper stellte.

In dieser Zeit begann eine lebhafte und engagierte mathematische Korrespondenz mit Artin, der damals in Hamburg war, und die bis zu der Emigration Artins 1936 anhielt.

In den drei Kieler Jahren entstanden 18 publizierte Arbeiten Hasses von hohem mathematischen Niveau, darunter eine in Gemeinschaft mit Artin. (Eine weitere gemeinsame Arbeit mit Artin kam 1928 zustande, also während Hasse in Halle wirkte.) Auf diese Zeit geht auch das zweiteilige

Lehrbuch *Höhere Algebra* zurück, erschienen als Taschenbuch im Göschen-Verlag, sowie ein Buch über ein mathematik-historisches Thema, nämlich zur Grundlagenkrise in der griechischen Mathematik im Zusammenhang mit dem Problem der irrationalen Zahlen. Letzteres wurde gemeinsam mit dem Logiker Heinrich Scholz verfasst, der bei Hasse Vorlesungen gehört hatte und in gewisser Weise sein Schüler geworden war. Mit Heinrich Scholz verband Hasse eine lebenslange Freundschaft.

6 Professur in Halle

6.1 Berufung

Zu Ostern 1925, also mit 26 Jahren, wurde Hasse als Ordinarius nach Halle berufen als Nachfolger des verstorbenen August Gutzmer. In einem Gutachten von Hilbert über die Hallenser Berufungsliste heißt es:

> *Hasse ist jetzt jedenfalls mit Recht in die Reihe der jüngeren Mathematiker gerückt, die bei der Besetzung einer math. Universitätsprofessur zunächst in Frage kommen.*

Die Hallenser Fakultät hatte allerdings Hasse nicht an erster Stelle genannt, sondern den viel älteren Ernst Neumann, Sproß der berühmten Königsberger Gelehrten- und Künstlerfamilie Neumann, der noch bei Hilbert in Königsberg, also vor 1896, studiert hatte, und der damals einen Lehrstuhl in Marburg inne hatte. Es ist nicht bekannt, weshalb Neumann in Marburg blieb und dafür Hasse nach Halle berufen wurde. In jedem Falle kann angenommen werden, daß sich Heinrich Jung, damals Mathematik-Professor in Halle, für die Berufung Hasses eingesetzt hat. Auch Jung hatte in Marburg bei Hensel studiert, war also mit der Theorie der p-adischen Zahlen vertraut und konnte demnach die bisherigen wissenschaftlichen Leistungen Hasses würdigen. In späteren Jahren hat sich Hasse gelegentlich auf die Arbeiten Jungs bezogen, nämlich als er im Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung für Kurven sich auch für Funktionenkörper von Flächen interessierte, die ja von Jung eingehend untersucht worden waren. Wir können annehmen, daß Hasse die Jungsche Theorie während seines Aufenthaltes in Halle kennengelernt hat.

Hasse hat seine Zeit in Halle als seine glücklichste und produktivste Zeit bezeichnet. Die gemeinsame Leitung des Mathematischen Institutes mit Heinrich Jung verlief sehr harmonisch. Schon 1926 wurde Hasse zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina zu Halle gewählt, auf Vorschlag von Jung, Wangerin und Schmidt. Später, im Jahre 1969, verlieh ihm diese Akademie die Cothenius Medaille für seine entscheidende Förderung der Zahlentheorie.

1929 wurde Hasse Mitherausgeber des Crelleschen Journals auf Empfehlung von Hensel, nachdem er diesen zuvor schon jahrelang inoffiziell bei der Herausgabe unterstützt hatte. Hasse hat diese Herausgebertätigkeit bis an sein Lebensende ausgeübt.

6.2 Lehrtätigkeit und Doktoranden in Halle

Die Lehrtätigkeit Hasses in Halle umfasste neben den üblichen Standardvorlesungen auch ein regelmässig angebotenes Seminar. Zwar haben wir keine vollständige Übersicht über die behandelten Seminarthemen. Jedoch scheint die folgende Information aus dem Sommersemester 1929 einigermaßen typisch zu sein; sie ist in einem Brief von Hasse an Hensel in Marburg enthalten.

> *...Ich habe in diesem Semester in der Algebra vielleicht 50, in den Differentialgleichungen der theoretischen Physik etwa 90 Hörer. Den wissenschaftlichen Mittelpunkt dieses Semesters bildet ein Vortragsseminar über die Theorie der hyperkomplexen Zahlen, nach Dicksons Buch „Algebren und ihre Zahlentheorie", das Herr Jung, Herr Baer und ich veranstalten. Wir versprechen uns sehr viel von einem gründlichen Eindringen in diese schöne und neue Theorie, die für die Weiterentwicklung der Arithmetik ganz sicher von ausschlaggebender Bedeutung sein wird. Außerdem haben wir ein Mathematisches Kolloquium eröffnet, das in Vorträgen hiesiger und auswärtiger Mathematiker besteht. Im vorigen Semester hatten wir mit einem privaten Zirkel begonnen, wollen aber jetzt lieber an die Öffentlichkeit treten. Die jüngeren Mathematiker der umliegenden Hochschulen Jena, Leipzig, Cöthen nehmen öfter daran teil.*

Das genannte Seminarthema entsprach dem neuen Interessengebiet von Hasse, das er in Halle aufnahm, nämlich Algebrentheorie. Wir werden darauf weiter unten im Zusammenhang mit Emmy Noether und Richard Brauer zurückkommen. Der obige Text zeigt auch, dass neben dem Seminar ein Mathematisches Kolloquium in Halle eingeführt wurde. Heute ist das für alle Universitäten in Deutschland fast selbstverständlich; damals war es offenbar noch nicht so, und es gebührt Hasse das Verdienst, ein solches regelmässiges Kolloquium in Halle begonnen zu haben.

Wir können wohl annehmen, dass die von Hasse betreuten Examenskandidaten und Doktoranden sowohl an dem Seminar als auch an dem Kolloquium teilnahmen. Aus den erhaltenen Briefen geht hervor, dass sich Hasse stets intensiv um seine Studenten und ihren Fortschritt im Studium kümmerte. In dem Nachwort zur Dissertation seines Doktoranden Waldemar Schöbe heißt es:

> *Zum Schluss möchte ich Herrn Professor Hasse, der mein ganzes Studium entscheidend beeinflusst und auch diese Arbeit angeregt und gefördert hat, meinen herzlichen Dank aussprechen.*

Schöbe entwickelte in seiner Dissertation die Weierstrasssche Theorie der analytischen Funktionen für π-adische Körper. Seine Dissertation wurde preisgekrönt.

Zu den Hallenser Doktoranden von Hasse gehörten neben Schöbe auch Herbert Rauter, Walter Schäfer und Wolfgang Franz. Rauter hat die Hassesche Theorie der quadratischen Formen über Zahlkörpern auf Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper übertragen; später hat er eine weitere Arbeit zur Grundlegung der Arithmetik in algebraischen Funktionenkörpern publiziert. Franz arbeitete über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz und begründete damit, auf Anregung von Hasse, die Theorie der heute sogenannten Hilbertschen Körper. Schäfer arbeitete über den Hauptidealsatz im Falle der komplexen Multiplikation.

Zu den Hallenser Doktoranden ist auch Wilhelm Grunwald zu rechnen, der zwar erst später in Marburg promovierte, nach dem Wechsel Hasses von Halle nach Marburg, der jedoch mit seiner Dissertation schon in Halle begonnen hatte. Grunwald befasste sich mit einem wichtigen Existenzsatz der Klassenkörpertheorie.

6.3 Habilitanden

In Halle habilitierten sich unter Hasses Einfluss Heinrich Behmann, Erich Bessel-Hagen (Umhabilitation aus Göttingen), Reinhold Baer (Umhabilitation aus Freiburg), Fritz Neiss und Erhard Tornier. Eine engere Zusammenarbeit entwickelte sich jedoch lediglich mit Reinhold Baer. Mit ihm veröffentlichte Hasse eine grundlegende Arbeit über „Zusammenhang und Dimension topologischer Körperräume“, erschienen 1932. Ferner entstand in Zusammenarbeit mit Baer eine kommentierte und erweiterte Ausgabe, in Buchform, der klassischen Arbeit von Steinitz über die algebraische Theorie der Körper. Baer hatte früher einmal ein Jahr lang in Kiel studiert; er hatte dort die Hassesche Vorlesung über Klassenkörpertheorie gehört und deren

Ausarbeitung angefertigt. Seitdem verband ihn mit Hasse eine Freundschaft, die auch anhielt, als Baer 1933 gezwungen wurde, seine Stelle in Halle aufzugeben und Deutschland zu verlassen.

Mit Tornier zusammen publizierte Hasse eine Arbeit in den Acta der Leopoldina; wir werden darauf unten im Zusammenhang mit der Artinschen Vermutung noch zurückkommen. Hasse hat den um 4 Jahre älteren Tornier, der auch bei Hensel in Marburg studiert hatte, bis zur Habilitation und noch danach sehr gefördert, wie die erhaltenen Briefe zeigen. Später jedoch, in Göttingen, kam es zum Bruch mit Tornier, weil dieser sich nach 1933 auf die radikale Seite der Nationalsozialisten stellte und gegen Hasse agierte.

6.4 Studium generale

In der Hallenser Zeit entstanden mehr als 25 wissenschaftliche Publikationen mit Forschungsarbeiten von Hasse. Wir können in diesem Artikel nicht auf alle Einzelheiten der Ergebnisse eingehen, sondern werden in den nächsten drei Abschnitten die wichtigsten herausgreifen. Vorher wollen wir jedoch hier ein Werk erwähnen, das zwar erst viele Jahre später erschienen ist, dessen Ursprung jedoch auf die Hallenser Zeit zurückgeht. Es handelt sich um das 1955 erschienene Büchlein „*Proben mathematischer Forschung in allgemein-verständlicher Behandlung.*"

Über dieses Thema hielt Hasse im Sommersemester 1928 eine Vorlesung im sogenannten studium generale, d.h. jedermann konnte teilnehmen, nicht nur Mathematiker und nicht nur Angehörige der Universität. Schon damals also hat Hasse die Verpflichtung gespürt und auch wahrgenommen, die Öffentlichkeit über interessante Resultate und Methoden der Mathematik, so wie er sie gesehen hat, zu informieren. Nicht etwa nur auf seinem Spezialgebiet, der algebraischen Zahlentheorie, sondern er hat dazu Beispiele aus allen Disziplinen der Mathematik gewählt. Eine Vorlesung dieser Art hatte er schon im Wintersemester 1924/25 in Kiel abgehalten, aber auch später immer wieder in wechselnder Form, bis schliesslich das genannte Buch daraus entstanden ist. Das folgende Zitat ist aus der Besprechung dieses Buches im Zentralblatt für Mathematik entnommen und kennzeichnet so recht die gesamte Einstellung von Hasse zu seiner Wissenschaft.

> *In einer ungemein lebendig verfaßten Einleitung werden die Leitgedanken dieses Büchleins entwickelt. Es soll gezeigt werden, daß der schaffende Mathematiker einem Künstler vergleichbar ist, indem er wie dieser seine Schöpfung zunächst mit kühner Phantasie intuitiv erschaut und dann bei der Ausgestaltung neben*

> *der selbstverständlichen logischen Richtigkeit die Schönheit und Harmonie als leitende Maßstäbe hat. Das Büchlein soll, in den Grenzen, die ihm gesteckt sind, die Freude an dieser Schönheit erwecken.*

Wir haben diese Seite der Hasseschen Aktivitäten hier hervorgehoben, weil ja gerade in unserer Zeit der Ruf nach mehr populären, also für die Allgemeinheit zugänglichen Darstellungen mathematischer Prinzipien und Resultate laut geworden ist. Wir sehen, dass Hasse sich dieser Aufgabe schon in Halle, aber auch in späterer Zeit gestellt hat.

In diesem Zusammenhang sind auch zwei weitere Publikationen Hasses zu nennen, die zwar ebenfalls erst viel später erschienen sind, jedoch ihren Ursprung auch in der frühen Hallenser Zeit haben. Es handelt sich auch dabei um Vorträge vom Charakter des studium generale:

- Mathematik als Geisteswissenschaft und Denkmittel der exakten Naturwissenschaften (Studium generale 6 (1953))
- Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht (Wiesbaden 1952)

Hier hat Hasse, sozusagen als „Bekenntnis“, seine eigene Einstellung zur Mathematik im Rahmen unserer Kultur darzustellen versucht – soweit ihm das gegenüber Nicht-Fachleuten als möglich erschien.

6.5 Der Klassenkörperbericht

Im September 1925 fand die Jahrestagung der DMV (der Deutschen Mathematiker Vereinigung) in Danzig statt. Hasse war eingeladen worden, dort einen Übersichtsvortrag zu halten über das neue Gesicht der Klassenkörpertheorie, das diese aufgrund der damals aufsehenerregenden Resultate des japanischen Mathematikers Takagi angenommen hatte. Takagi hatte u.a. nachgewiesen, daß jede abelsche Zahlkörpererweiterung als Klassenkörper generiert werden kann – ein Resultat, das schon im 19. Jahrhundert von Hilbert, Heinrich Weber und Furtwängler vorausgesagt worden war. Nach Zeugnissen von Zeitgenossen fand der Hassesche Vortrag eine außergewöhnliche Resonanz. Hasse hat sein Vortragsmanuskript ausgearbeitet und 1926 im Jahresbericht der DMV publiziert. Diese Arbeit hat er dann als Teil I in sein aus drei Teilen bestehendes Werk aufgenommen, welches als der „Klassenkörperbericht“ bekannt wurde (Teil Ia 1927 und Teil II 1930).

Dieser Bericht gewann einen bedeutenden Einfluß auf die weitere Entwicklung der Zahlentheorie. Denn Hasse begnügte sich nicht damit, die Resultate von Takagi zu referieren, sondern er konzipierte einen neuen Aufbau der Klassenkörpertheorie, direkt an den Hilbertschen Zahlbericht aus dem Jahre 1897 anschließend. So wie Hilbert den Versuch gemacht hatte, die gesamte damals bekannte algebraische Zahlentheorie unter einem einheitlichen Konzept darzustellen, so unternahm es nun Hasse, darauf aufbauend, das gesamte Gebäude der Klassenkörpertheorie in einheitlicher Weise zu errichten. Jeder, der den Hilbertschen Zahlbericht kannte – und das traf damals wohl auf alle jungen Mathematiker zu, die sich für Zahlentheorie interessierten – hatte nun einen unmittelbaren Zugang zur Klassenkörpertheorie. Dies war ganz im Sinne Hilberts, der am 5.11.1926 an Hasse folgendes schrieb:

> *Sehr geehrter Herr Kollege: Ich bin garnicht im Zweifel, dass wir eine unbedingt vollständige Wiedergabe der Takagischen Theorie in Ihrer Ausführung und Korrektur bringen müssen; ich möchte Sie sogar bitten, nicht etwa auf Kosten der leichten Lesbarkeit und Verständlichkeit Textkürzungen vorzunehmen; es kann in diesem Falle auf einige Druckbogen mehr nicht ankommen. Ich möchte eine solche Darstellung wünschen, dass der Leser nicht noch andere Abhandlungen von Ihnen, Takagi oder anderen hinzuzuziehen braucht, sondern – wenn er etwa mit den Kenntnissen meines Berichts ausgestattet ist – Ihre Abhandlung verhältnismässig leicht verstehen und auch die Grundgedanken sich ohne zu grosse Mühe aneignen kann.*

Dabei ging es Hilbert darum, die Hassesche Arbeit in den „Mathematischen Annalen“ zu publizieren. Daraus ist dann allerdings doch nichts geworden; der Hassesche Klassenkörperbericht erschien im „Jahresbericht der DMV“, und zwar in drei Teilen, die dann zu einem Buch zusammengebunden wurden.

Jedoch das Hilbertsche Desideratum wurde erfüllt: die Klassenkörpertheorie wurde jetzt weithin zugänglich, und es begann eine stürmische Weiterentwicklung, die mit den Namen Artin, Emmy Noether, Herbrand, Chevalley und nicht zuletzt Hasse selbst verbunden ist.

Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichts enthält u.a. die erste systematische Einordnung des *Artinschen Reziprozitätsgesetzes* in das Gebäude der Klassenkörpertheorie. Dieses allgemeine Reziprozitätsgesetz war 1927 von Artin bewiesen worden und lieferte auf gruppentheoretischer Grundlage eine Zusammenfassung aller bislang bekannten Reziprozitätsgesetze seit Gauß.

6.6 Die Artinsche Vermutung

Artin hat Hasse mehrmals in Halle besucht. Das Datum eines dieser Besuche ist als bedeutendes Datum in die Geschichte der Zahlentheorie eingegangen. Das war der 27. September 1927. An diesem Tag formulierte Artin in persönlichem Gespräch mit Hasse seine berühmt gewordene Vermutung über Primitivwurzeln. Was besagt diese Vermutung?

Sei p eine Primzahl. Eine ganze, nicht durch p teilbare Zahl a heisst (nach Gauß) *Primitivwurzel für p*, wenn die Ordnung von a im p-adischen Restklassenkörper genau $p-1$ ist, wenn also $p-1$ die kleinste natürliche Zahl ist mit $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Zu jeder Primzahl p gibt es mindestens eine Primitivwurzel. Welche Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ treten als Primitivwurzeln von unendlich vielen Primzahlen auf? Notwendige Bedingung dafür ist erstens, dass $a \neq \pm 1$, und zweitens, dass a nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Die Artinsche Vermutung besagt nun, dass diese beiden notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Und zwar vermutete Artin aufgrund heuristischer Überlegungen, dass dann die Zahl a in der Regel für ca. $37,3\%$ aller Primzahlen eine Primitivwurzel ist – wobei es jedoch gewisse Ausnahmezahlen a gibt, bei denen dieser Anteil zu modifizieren ist.

Über das Datum der Entstehung der Artinschen Vermutung wissen wir deshalb genau Bescheid, weil es Hasse in seinem Tagebuch festgehalten hat. Aus derselben Quelle wissen wir, dass Hasse sofort einen Lösungsansatz ausgearbeitet hat, mit Hilfe einer von ihm und Tornier kurz zuvor fertiggestellten Arbeit über die Gewinnung von Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Zahlentheorie. Als Hasse dies Artin brieflich mitteilte, schrieb Artin zurück:

> *Mich haben die Ausführungen sehr interessiert, vor allem deshalb, weil sie doch zeigen dass man möglicherweise durchkommt.*

Es zeigte sich jedoch, dass die Schwierigkeiten grösser waren, als Hasse und Artin angenommen hatten. Die Artinsche Vermutung ist bis heute noch nicht vollständig bewiesen, trotz großer Anstrengungen einer ganzen Reihe von Mathematikern.

Hasse selbst hat diese Vermutung Zeit seines Lebens im Auge behalten. Er hat in seinem Zahlentheorie-Lehrbuch 1950 auf sie hingewiesen, und er hat sie wiederholt seinen Schülern ans Herz gelegt. Zwei seiner Schüler, H. Bilharz 1937 und H.W. Knobloch 1952, haben bei der Beschäftigung mit dieser Vermutung interessante Ergebnisse erhalten. Bilharz z.Bsp. behandelte die entsprechende Vermutung für Funktionenkörper.

6.7 Emmy Noether und Richard Brauer

Beginnend mit dem Jahre 1927 entwickelte sich eine enge und intensive Kooperation von Hasse mit der Algebraikerin Emmy Noether in Göttingen. Der Briefwechsel mit Emmy Noether hielt bis zu ihrem Tod 1935 in Bryn Mawr (USA) an.

Zunächst ging es dabei um die Darstellungstheorie von Gruppen und Algebren, die Emmy Noether auf eine neue Grundlage stellen wollte, wofür Hasse die arithmetischen Hilfsmittel zur Verfügung stellte. Diese Zusammenarbeit kulminierte schliesslich im Jahre 1931 (als Hasse schon in Marburg war) in der Klassifikation aller möglichen endlich-dimensionalen einfachen Algebren über algebraischen Zahlkörpern. Hieran war auch Richard Brauer in Königsberg beteiligt. Mit diesem Resultat war ein Problem mit langer Geschichte gelöst, gleichzeitig öffnete der Beweis neue Ausblicke und Arbeitsmethoden sowohl in der Darstellungstheorie wie auch in der Klassenkörpertheorie. Als Artin von dem Resultat erfuhr, schrieb er an Hasse (1931):

> *Sie können sich garnicht vorstellen, wie ich mich über den endlich geglückten Beweis für die cyklischen Systeme gefreut habe. Das ist der größte Fortschritt in der Zahlentheorie der letzten Jahre. Meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Beweis.*

Die Erwähnung der „cyklischen Systeme“ bezieht sich darauf, dass nach dem Brauer-Hasse-Noetherschen Ergebnis jede endlich-dimensionale einfache Algebra über einem Zahlkörper K zyklisch ist, d.h. durch eine gewisse Konstruktion aus zyklischen Erweiterungskörpern von K gewonnen werden kann.

Bemerkenswert ist, dass im Verlauf des Beweises ein weiteres Lokal-Global-Prinzip etabliert wurde, nämlich für endlich-dimensionale einfache Algebren über einem Zahlkörper K. Eine solche Algebra ist danach wesentlich eindeutig bestimmt durch ihre lokalen Komponenten über den Körpern des Spektrums von K. Für die letzteren, d.h. für einfache Algebren über lokalen Körpern, hatte Hasse bereits früher, während seiner Zeit in Halle, in einer richtungweisenden Arbeit eine Klassifikation gegeben; er führte dazu die heute so genannte „Hasse-Invariante“ einer solchen Algebra ein, deren Wert eine rationale Zahl modulo 1 ist.

Das Studium der zyklischen Algebren führte Hasse ferner zu einer gründlichen Analyse der von Emmy Noether eingeführten verschränkten Produkte eines Zahlkörpers K mit der Galoisgruppe einer galoisschen Erweiterung von K. Damit wurde der Grundstein gelegt für die spätere kohomologische

Begründung der Klassenkörpertheorie durch Hochschild, Serre, Tate und Artin.

In Retrospektive äußerte sich Richard Brauer über diese Jahre wie folgt, in einem Brief an Hasse aus dem Jahre 1961:

> *... Es ist 35 Jahre her, daß ich durch Sie mit der Klassenkörpertheorie bekannt geworden bin. Daß ich in Zusammenarbeit mit Ihnen und Emmy Noether ein wenig dazu beitragen konnte, ist auch mir eine der schönsten Erinnerungen, und ich werde die Aufregung der Tage, in denen die Arbeit entstand, nie vergessen.*

7 Die Riemannsche Vermutung für Funktionenkörper

7.1 Marburg

Zu Ostern 1930 erhielt Hasse einen Ruf an die Universität Marburg, als Nachfolger von Kurt Hensel. Ihn hat Hasse als seinen „akademischen Lehrer und väterlichen Freund“ bezeichnet, und es war im Grunde keine Frage für Hasse, dass er den Ruf annehmen würde. Im Oktober 1928, als der Ruf nach Marburg noch nicht ergangen war aber doch schon in Aussicht stand, schrieb Hasse an Abraham Fraenkel, mit dem er einen freundschaftlichen Briefwechsel pflegte, folgendes:

> *Aus Ihrem Munde weiß ich ja schon seit Ostern, ... dass ich Aussicht habe, Hensels Nachfolger in Marburg zu werden... Es gäbe natürlich vom ideellen Standpunkt aus für mich keine schönere Erfüllung, als diese, der Nachfolger desjenigen Mannes zu werden, auf dessen Lebenswerk ich selbst aufgebaut habe, und als dessen Hauptschüler ich mich ohne Bedenken bezeichnen darf.*

In Marburg setzte Hasse seine bereits in Halle laufenden Arbeiten zur Normenresttheorie, zur Klassenkörpertheorie, zur komplexen Multiplikation und zur Algebrentheorie mit großem Erfolg fort. Wir haben diese zum Teil schon in den vergangenen Abschnitten erwähnt.

Jedoch kam eine wichtige weitere Arbeitsrichtung hinzu, nämlich die Erforschung der arithmetischen Struktur der algebraischen Funktionenkörper. (Heute spricht man von der „algebraischen Geometrie der Kurven“ statt „Theorie der algebraischen Funktionenkörper“.) Die Anregung dazu erhielt Hasse durch den Kontakt mit dem englischen Mathematiker Harold Davenport, mit dem er befreundet war. Hasse entwickelte die Theorie der algebraischen Funktionenkörper K mit endlichem Konstantenkörper k im Hinblick auf einen Beweis der „Riemannschen Vermutung“ für die Zeta-Funktion eines solchen Funktionenkörpers. Jedem solchen Körper K kann eine Zeta-Funktion $\zeta_K(s)$ zugeordnet werden, und die Riemannsche Vermutung besagt in dieser Situation, dass die Nullstellen von $\zeta_K(s)$ den Realteil $\Re(s) = \frac{1}{2}$ besitzen. Wie bei der gewöhnlichen Zetafunktion für die Primzahltheorie, so hat auch diese neue Vermutung weitreichende Folgen für die Arithmetik in Funktionenkörpern.

Artin hatte 1921 in seiner Dissertation im Falle quadratischer Funktionenkörper diese Vermutung ausgeprochen und in einigen speziellen Fällen auch numerisch verifiziert. Hasse gelang es nun im Januar 1933, die Vermutung für elliptische Funktionenkörper zu beweisen, d. h. für Körper $K = k(x, y)$, wo x und y durch eine elliptische Gleichung $y^2 = f(x)$ verbunden sind, wobei $f(x)$ ein Polynom 3. oder 4. Grades ohne mehrfache Nullstellen ist. Solche Funktionenkörper sind dadurch gekennzeichnet, dass ihr Geschlecht $g = 1$ ist.

Dieses Resultat von Hasse war ein echter Durchbruch und erregte viel Aufsehen. Der englische Mathematiker L.J. Mordell, der sich mit ähnlichen Problemen befasst hatte, schrieb an Hasse, als er von dem Resultat hörte:

> *I was exceedingly interested in your mathematical news and was very glad to hear that you had completely knocked the bottom out of* $y^2 \equiv f_4(x) \mod p$. *It is a wonderful achievement and I shall look forward with the greatest interest to seeing your paper in print... I hope you will make it as easy as possible for the reader to understand, with exact references to all the theorems on Klassenkörpertheorie etc. As this is the first case of any exact result for zeros of Zetafunctions on* $\Re(s) = \frac{1}{2}$, *the paper is sure to attract an enormous amount of attention. What a tremendous vindication that the proof should depend on such a comparatively high brow theory.*

Der erste Beweis von Hasse im Januar 1933 benutzte in der Tat die Klassenkörpertheorie im Rahmen der sogenannten komplexen Multiplikation. Wir sagten bereits in Abschnitt 3, dass Hasse die Theorie der komplexen Multiplikation in Göttingen bei Hecke gelernt hatte. Während seiner Zeit in Halle hatte Hasse zwei Arbeiten über komplexe Multiplikation fertiggestellt, in denen diese Theorie auf eine natürliche Grundlage gestellt wurde. Diese Kenntnisse kamen ihm jetzt beim Beweis der Riemannschen Vermutung im elliptischen Falle zustatten.

Allerdings bemerkte Hasse ziemlich bald, dass der Beweis auch ohne Klassenkörpertheorie und ohne die klassische Theorie der komplexen Multipliation geführt werden kann. Und zwar konnte er den Beweis direkt auf eine neuartige Theorie der komplexen Multiplikation in Primzahlcharakteristik gründen. Diese allerdings musste damals erst entwickelt werden. Eine Skizze dieses Projekts trug Hasse im Frühjahr 1934 in Hamburg vor, wohin ihn Artin mit den folgenden Worten eingeladen hatte:

> *Lieber Herr Hasse! Hätten Sie Lust in diesem Semester zu uns zu Gastvorträgen zu kommen? Sie können sprechen, worüber Sie Lust haben. Vielleicht die schönen Ergebnisse über die Riemannsche Vermutung? Sie sind doch das schönste, was seit Jahrzehnten gemacht worden ist.*

In der Folgezeit machte sich Hasse nun daran, dieses Projekt im Detail durchzuführen, und zwar von Anfang an gleich für Funktionenkörper beliebigen Geschlechts, um damit auch die Riemannsche Vermutung in dieser Allgemeinheit angreifen zu können. Diesem Projekt widmete er sich vornehmlich in den folgenden Jahren in seiner Göttinger Zeit.

7.2 Göttingen

Im Mai 1934 wurde Hasse als Nachfolger von Hermann Weyl als Direktor des Mathematischen Institutes nach Göttingen berufen. Dort machte er es sich zur ersten Aufgabe, die durch die Machtergreifung der NSDAP verursachten schmerzlichen Verluste im Lehrkörper wieder zu ersetzen und die Bedeutung Göttingens als mathematisches Zentrum soweit wie möglich wiederherzustellen.

In politischer Hinsicht war Hasse ein Patriot, der sich seinem Vaterland eng verbunden fühlte. Wie viele Deutsche zu der damaligen Zeit war er über die seinem Heimatland nach dem ersten Weltkrieg auferlegten demütigenden Bedingungen besorgt und stand daher dem Nationalsozialismus nicht rundweg ablehnend gegenüber. Bei seiner Arbeit jedoch zählte nur die wissenschaftliche Qualität, und er liess sich in diesem Bereich auf keine Kompromisse aus politischer Opportunität ein. Daher war er darauf gefasst, dass er in Göttingen Widerstand durch radikale nationalsozialistische Studenten und Kollegen zu erwarten hatte. Am 17. Februar 1934 schrieb er, noch aus Marburg, an seinen Freund Davenport in England, nachdem er ihm seine Idee auseinandergesetzt hatte, wie man die Riemannsche Vermutung auch für Funktionenkörper höheren Geschlechts $g > 1$ beweisen könne:

> *I very much hope that I shall have a quiet summer here before I am called upon the battle field. Otherwise I doubt whether I will be able to think about $f(x, y) = 0$ for higher genus before long.*

Mit dem „battlefield“ meinte Hasse die damalige Situation im Göttinger Mathematischen Institut. Aber er hatte wohl nicht mit dem Ausmaß des Widerstandes gerechnet, der ihm in Göttingen zu schaffen machte. Der „quiet summer“, den er sich in dem Brief an Davenport gewünscht hatte, war ihm nicht mehr gegönnt.

Die schwierigen politischen Verhältnisse in Göttingen in den Jahren nach 1933, die Hasse dort vorfand, sind durch Publikationen im einzelnen dokumentiert worden, und wir brauchen hier nicht näher darauf einzugehen. Für Hasse jedenfalls bedeuteten sie eine erhebliche Beeinträchtigung seiner Arbeit. Trotzdem ist in seinen Briefen immer wieder Optimismus herauszuhören in dem Sinne, dass diese Schwierigkeiten hoffentlich bald überwunden werden („...hope that reason will come back in due course“).

Nach einer längeren Reihe von Arbeiten konnte Hasse im Jahre 1936 endlich den vollständigen Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Funktionenkörper in drei großen Abhandlungen publizieren. Im selben Jahr fand der internationale Mathematiker-Kongress in Oslo statt, und Hasse war eingeladen worden, dort einen der Hauptvorträge zu halten. In diesem Vortrag skizzierte er zunächst in bestechender Klarheit seinen Beweis der Riemannschen Vermutung im elliptischen Falle, und sagte darüberhinaus:

> *Die von mir entwickelte Methode ist aber so allgemein, dass sie auch den Fall beliebigen Geschlechts $g > 1$ anzugreifen gestattet. Zwar sind die Untersuchungen darüber noch nicht ganz abgeschlossen, aber ganz kürzlich hat Deuring die wesentliche Schwierigkeit, die der Verallgemeinerung von $g = 1$ auf $g > 1$ entgegenstand, aus dem Wege geräumt, sodass wohl in kurzer Zeit die Fragestellung vollständig gelöst sein wird.*

Die Deuringsche Idee bestand darin, die Theorie der Korrespondenzen algebraischer Kurven auf eine algebraische Grundlage zu stellen und für den Beweis der Riemannschen Vermutung im Falle $g > 1$ nutzbar zu machen.

Jedoch zeigte sich, dass die Durchführung des Deuringschen Ansatzes aufwendiger war als Hasse wohl angenommen hatte. Trotz erheblicher Anstrengungen von Hasse, gemeinsam mit Schülern und Kollegen, war der entscheidende Durchbruch bis zum Jahre 1939 noch nicht erfolgt, obwohl wir im Nachhinein feststellen können, dass es schliesslich nur noch eines relativ kleinen Schrittes bedurft hätte, um zum vollständigen Beweis der Riemannschen Vermutung für Geschlecht $g > 1$ zu gelangen.

Während des Krieges leitete Hasse eine Forschungsgruppe im Reichsmarineamt, wo u. a. ballistische Probleme mittels elliptischer Integrale und komplexer Multiplikation studiert wurden. Eine systematische Weiterarbeit am Problem der Riemannschen Vermutung war ihm in dieser Zeit nicht möglich. Im Jahre 1948 publizierte André Weil einen Beweis (nach einer bereits 1941 erfolgten Vorankündigung). Dieser Beweis schloss an die Idee von Deuring an, die Hasse in seinem Vortrag in Oslo 1936 erwähnt hatte; Hasse hatte diese Idee damals (noch vor dem Kongress in Oslo) in seinem Briefwechsel mit Weil näher ausgeführt. André Weil war es inzwischen gelungen, die von Deuring begonnene Algebraisierung der Korrespondenzentheorie hinreichend weit voranzutreiben.

Heutzutage kann der Beweis der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper sehr verkürzt werden, und er hat in dieser verkürzten Form auch in Lehrbücher Eingang gefunden. Die wesentliche Idee dabei ist immer noch die Heranziehung von Korrespondenzen, wie bei Deuring-Hasse und bei Weil, jedoch genügt dazu eine einzige Korrespondenz, nämlich der sogenannte „Frobenius-Operator“ des Funktionenkörpers. Dessen relevante Eigenschaften können in einfacher Weise explizit beschrieben werden. Diese Beweisvariante geht auf Stepanov und Bombieri zurück.

8 Danach

8.1 Berlin

Im Jahre 1946 ging Hasse nach Berlin, wo er zunächst eine Forschungsstelle an der Berliner Akademie erhielt; im Mai 1949 wurde er an die Humboldt-Universität berufen. In Berlin sammelte sich um ihn ein Kreis von Schülern, woraus bedeutende Arbeiten hervorgingen. 1949 erschien Hasses umfassendes Werk „Zahlentheorie“, in dem die Theorie der Zahlkörper und der Funktionenkörper systematisch auf Kroneckers Theorie der Divisoren und auf die Bewertungstheorie aufgebaut wurde. Der Plan dazu ging auf die Jahre in Kiel und in Halle zurück, und das Buch war schon im Jahre 1939 druckfertig. Damals konnte es jedoch wegen der Kriegsereignisse nicht sofort erscheinen. (Heute ist es in mehreren Auflagen und in Übersetzung ins Englische erschienen.)

Ein Jahr später, also 1950, folgte das schöne Lehrbuch „Vorlesungen über Zahlentheorie“. Hasses Monographie „Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper“ (1952) eröffnete ein neues weites Feld mathematischer Forschung, nämlich die explizite Bestimmung der arithmetischen Invarianten eines abelschen Zahlkörpers, ein Programm, dem sich vornehmlich H. W. Leopoldt widmete. Einen wichtigen Beitrag dazu lieferte Hasse in seiner Abhandlung „Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen, kubischen und biquadratischen Zahlkörpern“ (1950). Ein weiteres Gebiet, das von Hasse in dieser Zeit systematisch angegangen wurde, betraf das sogenannte Einbettungsproblem. Als Voraussetzung dazu arbeitete er über die invariante Kennzeichnung relativ-abelscher und relativ-galoisscher Zahlkörper mit vorgegebener Galois-Gruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers mit Hilfe von Faktorensystemen.

8.2 Hamburg

Im Jahre 1950, als Max Deuring nach Göttingen ging, wurde Hasse als sein Nachfolger nach Hamburg berufen, wobei ihm viele seiner Berliner Schüler nachfolgten. In Hamburg kam Hasse in zahlreichen weiteren Veröffentlichungen auf fast alle seine früheren Arbeitsgebiete zurück, zumeist in der Form von ergänzenden Untersuchungen, so etwa zum Existenzsatz von Grunwald in der Klassenkörpertheorie, zur klassenkörpertheoretischen Interpretation der Geschlechtertheorie quadratischer Zahlkörper, zu den expliziten Reziprozitätsgesetzen, zum Beweis der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper der Charakteristik p vom Geschlecht 1, zu einem rein arithmetischen Beweis von Siegels Endlichkeitssatz für binäre diophantische Gleichungen vom Geschlecht 1, zur Artinschen Vermutung über Primitivwurzeln modulo p, zu den Funktionenkörpern vom Fermatschen Typ und zur Theorie der Klassenzahlen und der Einheiten. Eine grundlegende Arbeit betrifft den 2^n-ten Potenzcharakter $\left(\frac{2}{\alpha}\right)_{2^n}$ von 2 bezüglich der Zahl α im Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln. Sie stützt sich auf Hasses Theorie der (verallgemeinerten) Gaussschen Summen.

9 Ehrungen

Im Laufe seines beruflichen Lebens hat Hasse die folgenden Ehrungen erhalten:

1926 Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina zu Halle.

1935 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

1942 Mitglied der Finnischen Akademie der Wissenschaften in Helsinki.

1949 Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

1952 Mitglied der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz.

1953 Verleihung des Deutschen Nationalpreises 1. Klasse für Wissenschaft und Technik.

1956 Mitglied der Spanischen Akademie der Wissenschaften zu Madrid.

1968 Verleihung des *doctor honoris causa* durch die Universität in Kiel.

1968 Verleihung der *Cothenius Medaille* durch die Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina zu Halle.

Literatur

Frei, Günther: *Helmut Hasse (1898-1979).* Leben und Werk von Helmut Hasse. 1. Teil Der Lebensgang. Collection Mathématique. Université Laval und Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich. August 1977. 1-59.

— (Hrsg.) *Die Briefe von E. Artin an H. Hasse (1923-1953).* Collection Mathématique, Université Laval, Quebec und Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich. Januar 1981. 1-166.

— *Helmut Hasse (1898-1979).* Expositiones Math. 3 (1985) 55-69.

— *Helmut Hasse und seine Arbeiten im Crelleschen Journal.* J. Reine Angew. Math. 500 (1998) 15-21.

— *How Hasse was led to the Theory of Quadratic Forms, the Local-Global-Principle, the Theory of the Norm Residue Symbol, the Reciprocity Laws, and to Class Field Theory.* In: Class Field Theory – Its Centenary and Prospect, edited by K. Miyake, Advanced Studies in Pure Mathematics 30, Tokyo (2001) 31-62.

Hasse, Helmut: *Mathematische Abhandlungen*, herausgegeben von Heinrich Wolfgang Leopoldt und Peter Roquette, 3 Bände. Walter de Gruyter, Berlin (1975).

— *Die moderne algebraische Methode.* Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung 39 (1930) 22-34. = *The Modern Algebraic Method.* The Mathematical Intelligencer 8 (1986) 18-25.

Jehne, Wolfram und Lamprecht, Erich: *Helmut Hasse, Hermann Ludwig Schmid and their students in Berlin.* In: Begehr, H. G. W. (ed.) et al., Mathematics in Berlin. Birkhäuser, Basel (1998) 143-149

Leopoldt, Heinrich Wolfgang: *Obituary [for Helmut Hasse].* J. of Number Theory 14 (1982) 118-120.

— *Zum wissenschaftlichen Werk von Helmut Hasse.* J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973) 1-17.

Rohrbach, Hans: *Helmut Hasse und Crelles Journal.* Mitt. Math. Ges. in Hamburg, Band XI, Heft 1 (1982) 155-166.

Roquette, Peter: *Zur Geschichte der Zahlentheorie in den dreißiger Jahren. Die Entstehung der Riemannschen Vermutung für Kurven und ihres Beweises im elliptischen Fall.* Math. Semesterberichte 45 (1998) 1-38.

— *Class Field Theory in Characteristic p, its Origin and Development.* In: Class Field Theory – Its Centenary and Prospect, edited by K. Miyake, Advanced Studies in Pure Mathematics 30, Tokyo (2001) 549-631.

— *On the history of Artin's L-functions and conductors. Seven letters from Artin to Hasse in the year 1930.* Mitt. Math. Ges. Hamburg 19 (2000) 5-50.

— *History of valuation theory I.* In: F. V. Kuhlmann et al., Proceedings of the Valuation Theory Conference, Saskatoon 1999; Fields Institute Communication 32 (2002) 65p.

Schappacher, Norbert: *Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929-1950.* In: Heinrich Becker et al. (Hrsg.) *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus.* K.G.Saur, München (1987) 345-373.

Segal, Sanford L.: *Helmut Hasse in 1934.* Hist. Math. 7 (1980) 46-56.