The optimal martingale measure for investors with exponential utility function

Author(s):
Steiger, Gallus Johannes

Publication Date:
2005

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005047932

Diss. ETH No. 16006

The Optimal Martingale Measure for Investors with Exponential Utility Function

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
GALLUS JOHANNES STEIGER
dipl. math.
born September 15, 1972
citizen of Meggen & Schlierbach (LU)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. F. Delbaen, examiner
Prof. Dr. J. Kallsen, co-examiner
Prof. Dr. T. Rheinländer, co-examiner
Prof. Dr. M. Schweizer, co-examiner

2005

Abstract

The problem of valuing and hedging financial products in incomplete markets, in which there exist non-replicable financial positions containing some intrinsic risk, is one of the main problems in financial mathematics. The approach, which has been chosen in this thesis, starts from a rational investor, who aims to maximize his expected exponential utility. Via utility indifference arguments, financial instruments can be valued and the corresponding hedging strategy can uniquely be defined. It is well known that, in a semimartingale model, the solution can be determined via a stochastic optimization problem where we have to maximize a concave functional on some space of stochastic integrals. Alternatively we may consider the dual problem where we have to minimize the conjugated convex functional on the space of equivalent martingale measures. Whereas representation properties of the optimal martingale measures are known, explicit solutions are at hand only for some special cases.

In this thesis, we present a method how to solve the stochastic optimization problem in case of jump-diffusion processes. Starting from the known representation properties, we determine a so-called "optimal martingale measure equation". This equation helps to guess the optimal martingale measure which then has to be verified. Several special cases are treated. We discuss the valuation and hedging problem in case of a financial derivative on an underlying whose return is modeled as an additive process. We show that the case of an illiquid underlying, where hedging can only be performed by correlated assets, may be treated in almost the same way. A related problem is the identification of the so-called "minimal entropy martingale measure" which we determine for a wide class of stochastic volatility models.

We show that for the models mentioned above, the optimal martingale measure will be identified by a so-called "interactive partial differential equation". Using Feynman-Kac results and the Picard-iteration method, we establish existence and uniqueness of a classical solution.

Kurzfassung

Das Problem der Bewertung und Absicherung von Finanzprodukten im Falle von unvollständigen Märkten, in welchen zufallsbehaftete Finanzpositionen mit unvermeidbaren intrinsischen Risiken auftreten können, ist ein zentrales Problem in der Finanzmathematik. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz geht von einem rationalen Investor aus, dessen Ziel die Maximierung seines erwarteten exponentiellen Nutzens ist. Ausgehend von seinen Präferenzen können Finanzinstrumente nutzen-indifferent bewertet sowie die entsprechende Absicherungsstrategie bestimmt werden. Es ist wohlbekannt, dass diese Lösung in einem Semimartingalmodell durch ein stochastisches Optimierungsproblem dargestellt werden kann, wobei wir ein konkaves Funktional über einem Raum von stochastischen Integralen zu maximieren haben. Alternativ als duales Problem ausgedrückt müssen wir das konjugierte konvexe Funktional über dem Raum der äquivalenten Martingalmasse minimieren. Während Darstellungseigenschaften des optimalen Martingalmasses bekannt sind, bestehen explizite Lösungen jedoch nur in einigen Spezialfällen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren aufgezeigt, wie sich das stochastische Optimierungsproblem im Falle von Sprung-Diffusionsprozessen lösen lässt. Ausgehend von den bekannten Darstellungseigenschaften wird eine "Optimal Martingale Measure Equation" ermittelt. Anhand dieser Gleichung kann das optimale Martingalmass sozusagen erraten werden, welches anschliessend verifiziert werden muss. Mehrere Spezialfälle werden behandelt. Wir diskutieren das Bewertungsproblem im Falle eines beliebigen Finanzderivates auf einem Basisprodukt, dessen Rendite wir als additiven Prozess modellieren. Wir zeigen zudem auf, dass der Spezialfall, in welchem das Underlying illiquid ist und deshalb das Finanzderivat durch ein verwandtes Finanzinstrument abgesichert werden muss, sehr ähnlich zu behandeln ist. Ein ähnliches Problem ist die Identifizierung des sogenannten "minimalen Entropie-Masses", welches wir für eine grosse Klasse von stochastischen Volatilitätsmodellen ermitteln.

Wir zeigen auf, dass für die obengenannten Modelle das optimale Martingalmass anhand einer sogenannten "interaktiven partiellen Differentialgleichung" identifiziert wird. Mittels Feynman-Kac-Resultaten und der Iterationstechnik von Picard zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung.