A quasisymmetrically invariant notion of dimension and absolute Lipschitz retracts

Doctoral Thesis

Author(s):
Schlichenmaier, Thilo

Publication date:
2005

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005062646

Diss. ETH No. 16216

A Quasisymmetrically Invariant Notion of Dimension and Absolute Lipschitz Retracts

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
THILO SCHLICHENMAIER
Dipl. Math. ETH
born 6. 10. 1973
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. U. Lang, examiner
Prof. V. Schroeder, co-examiner

2005

Zusammenfassung

Wir untersuchen eine Variante von Gromovs Begriff der asymptotischen Dimension eines metrischen Raumes, die von Assouad *Nagata-Dimension* genannt wurde. Die Nagata-Dimension ist stets mindestens so gross wie die topologische Dimension und stimmt im Falle einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit sogar mit dieser überein. Ausserdem gilt $\dim_{\mathrm{N}} \mathbb{R}^n = n$. Für beliebige metrische Räume X und Y gelten $\dim_{\mathrm{N}}(X \times Y) \leq \dim_{\mathrm{N}} X + \dim_{\mathrm{N}} Y$ und $\dim_{\mathrm{N}} X \cup Y = \max\{\dim_{\mathrm{N}} X, \dim_{\mathrm{N}} Y\}$. Es zeigt sich, dass $\dim_{\mathrm{N}}$ eine Quasisymmetrie-Invariante ist, und dass es eine quasisymmetrische Einbettung eines metrischen Raumes X in ein Produkt von $n+1$ metrischen Bäumen gibt, falls $\dim_{\mathrm{N}} X \leq n$.

Wir sagen, ein Paar (X, Y) von metrischen Räumen habe die *Lipschitz-Erweiterungseigenschaft*, falls es eine Konstante C mit der Eigenschaft gibt, dass für jede Teilmenge $Z \subset X$ und für jede λ-Lipschitz-Abbildung $f \colon Z \to Y$ eine $C\lambda$-Lipschitz-Fortsetzung $\bar{f} \colon X \to Y$ von f existiert. Wir erhalten vollständige, optimale Resultate für solche Paare (X, Y), falls einer der beiden Räume endliche Nagata-Dimension besitzt. Ist Y zum Beispiel ein vollständiger metrischer Raum mit $\dim_{\mathrm{N}} Y \leq n$, der zusätzlich Lipschitz-j-zusammenhängend ist, für alle $j = 0, \ldots, n$, dann besitzt (X, Y) die Lipschitz-Erweiterungseigenschaft für jeden beliebigen Raum X. Mit anderen Worten ist Y in dieser Situation ein absoluter Lipschitz-Retrakt. Es gelte andererseits $\dim_{\mathrm{N}} X \leq n$. Weiter sei Y vollständig und Lipschitz-j-zusammenhängend, für $j = 0, \ldots, n-1$. Dann hat (X, Y) wieder die Lipschitz-Erweiterungseigenschaft. Motiviert durch solche Resultate über die Fortsetzbarkeit von Lipschitz-Abbildungen bestimmen wir die Nagata-Dimension, oder aber zeigen zumindest deren Endlichkeit, für gewisse Klassen hyperbolischer oder nicht-positiv gekrümmter Räume.

Abstract

We discuss a variation of Gromov's notion of the asymptotic dimension of a metric space, which was named *Nagata dimension* by Assouad. It is defined as the least integer $n \geq 0$ satisfying the following condition: there is a constant $c > 0$ such that for all $s > 0$, the metric space X admits a covering by sets, whose diameters are bounded by cs, and have the additional property that every test set of diameter at most s meets no more than $n+1$ of them. The Nagata dimension is always at least as large as the topological covering dimension and even coincides with it for compact Riemannian manifolds. Moreover, $\dim_{\mathrm{N}} \mathbb{R}^n = n$. For arbitrary metric spaces X and Y we prove $\dim_{\mathrm{N}}(X \times Y) \leq \dim_{\mathrm{N}} X + \dim_{\mathrm{N}} Y$ and $\dim_{\mathrm{N}} X \cup Y = \max\{\dim_{\mathrm{N}} X, \dim_{\mathrm{N}} Y\}$. It turns out that $\dim_{\mathrm{N}}$ is a quasisymmetry invariant and that there is a quasisymmetric embedding of any metric space X satisfying $\dim_{\mathrm{N}} X \leq n$ into a product of $n+1$ metric trees.

We say that a pair (X, Y) of metric spaces has the *Lipschitz extension property* if there is a constant C such that for every subset $Z \subset X$ and for every λ-Lipschitz map $f \colon Z \to Y$ there is a $C\lambda$-Lipschitz extension $\bar{f} \colon X \to Y$ of f. We obtain complete and optimal results about such pairs (X, Y) if one of the two spaces has finite Nagata dimension. For instance, if Y is a complete metric space with $\dim_{\mathrm{N}} Y \leq n$ that is Lipschitz j-connected, for all $0 \leq j \leq n$, then (X, Y) has the Lipschitz extension property for every metric space X, i.e. Y is an absolute Lipschitz retract. On the other hand, if $\dim_{\mathrm{N}} X \leq n$ and if Y is complete and Lipschitz j-connected for $j = 0, \ldots, n-1$ then (X, Y) has the Lipschitz extension property also. Motivated by such extension results, we determine the Nagata dimension, or prove that it is finite, for certain classes of hyperbolic or nonpositively curved spaces.