

DISS. ETH Nr. 16366

EXTRACTING PHYSICS FROM WEAK SIGNALS  
IN LATTICE GAUGE THEORY

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of  
DOCTOR OF NATURAL SCIENCES

presented by

SLAVO KRATOCHVILA

Dipl. Phys. ETH

born February 8<sup>th</sup>, 1976

citizen of Winterthur (ZH), Pratteln (BL)

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Matthias Troyer, examiner  
Dr. Philippe de Forcrand, co-examiner

2005

# Abstract

Recent relativistic particle collider experiments at very high energies are probing a new phase of matter. This so-called quark-gluon plasma contains quarks and gluons, just as ordinary matter does. However, while in ordinary matter the quarks are confined by the strong interaction, in the quark-gluon plasma, the quarks are deconfined. We use Lattice Quantum Chromodynamics (Lattice QCD), which provides a regularisation of QCD, the theory of the strong interaction, on a discrete, hypercubic lattice in Euclidean space-time without any assumption on the strong coupling. In this framework, non-perturbative phenomena, such as confinement and its disappearance through the phase transition above, can be computed by Monte Carlo simulations from first principles.

This thesis mainly deals with the following two physical problems: (i) the phenomenon of string breaking in the context of 3-dimensional  $SU(2)$  Lattice Gauge Theory, by measuring the groundstate energy of a gluonic system with two static adjoint colour-charges; (ii) the thermodynamics of Lattice QCD at finite temperature and matter density, by studying the canonical ensemble rather than the more commonly used grand-canonical ensemble. Both projects have in common that standard numerical methods fail to reveal relevant information, because the signal is drowned into noise before reaching the physically interesting distance/energy scale. In other words, we have to deal with “weak signals”. Techniques that provide a substantial variance reduction are thus needed. We improve state-of-the-art methods for variance reduction and develop a new canonical approach to QCD.

String breaking, ie. the creation of a matter-antimatter pair from the energy stored in the flux tube between two static colour-charges, has been observed in older studies, however, a controversial multichannel technique has been used. Here, we show this “string breaking”-effect in an uncontroversial way by considering the Wilson

loop observable only, which we show to have a non-vanishing overlap with both the unbroken and the broken string state. This task is numerically challenging, because the signal to be observed is of order  $\mathcal{O}(10^{-40})$ , while a single measurement is of order  $\mathcal{O}(1)$ . An efficient variance reduction is needed if we want to avoid the unfeasible number of  $10^{80}$  measurements. We take the Lüscher-Weisz variance reduction technique as a starting point. This method focuses on the correlation of Polyakov loops and provides an error reduction exponential in their length by averaging temporal link-link correlators. We generalise this technique to adjoint Wilson loops by introducing an additional error reduction on the spatial transporters. We succeed in measuring the energy of the groundstate, first- and second excited state as a function of the spatial separation  $R$  up to  $R \sim 1.2\text{fm}$ . We find that in our model, string breaking occurs at  $R \sim 1.0\text{fm}$ .

Lattice QCD at finite temperature  $T$  and finite chemical potential  $\mu$  lacks algorithms to study thermodynamic systems with  $\frac{\mu}{T} \gtrsim 1$ . The difficulty is caused by the “sign problem”, which is absent at  $\mu = 0$ , but gains strength with increasing  $\mu$ . We present a new approach to Lattice QCD thermodynamics, where we focus on the matter density  $\rho$  rather than the chemical potential. We provide a variance reduction by calculating the Fourier coefficients of the fermion determinant on each configuration. This makes the approach numerically expensive so that we can only study small lattices due to limited computer budget. However, in our particular case of QCD with four flavours of staggered quarks with mass  $\frac{m}{T} = 0.2$ , the regime  $\frac{T}{T_c} \gtrsim 0.8$  and  $\frac{\mu}{T} \lesssim 2$  becomes accessible on a  $6^3 \times 4$  lattice. We determine the Helmholtz free energy, from which all thermodynamic properties of QCD follow. In particular, we locate the phase transition between ordinary matter and the quark gluon plasma in the  $T$ - $\rho$  as well as  $T$ - $\mu$  plane. In contrast to the literature, we observe a “bending down” of the critical line at  $\frac{\mu}{T} \gtrsim 1.3$ . We argue that this bending must happen, if the critical line is to reach expectations from a strong coupling analysis at zero temperature.

# Zusammenfassung

Kürzlich wurde mit Hilfe relativistischer Teilchenbeschleuniger ein neuer Zustand der Materie bei sehr hohen Energien entdeckt. Dieses sogenannte Quark-Gluonen-Plasma setzt sich, wie unsere Umwelt, aus Quarks und Gluonen zusammen. Im Gegensatz zu normaler Materie ist jedoch im Plasma das Confinement der Quarks aufgehoben. Wir benutzen Lattice Quantum Chromodynamics (Lattice QCD) um QCD, die Theorie der starken Wechselwirkung, welche für das Confinement verantwortlich ist, zu regularisieren. Diese Regularisierung wird erreicht, indem die Kontinuumstheorie auf einem hyper-kubischen Euklidischen Raumzeit-Gitter diskretisiert wird, ohne eine Annahme über die Stärke der starken Wechselwirkung zu machen. Dadurch ermöglicht Lattice QCD mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen das Studium nicht-perturbativer Phänomene, wie dem Confinement und Phasenübergängen, direkt mittels der QCD Lagrange-Dichte.

Diese Dissertation befasst sich hauptsächlich mit den folgenden zwei physikalischen Problemen: Wir studieren (i) das Phänomen “string breaking” im Rahmen drei-dimensionaler  $SU(2)$  Gitter-Eichtheorie, indem wir die Grundzustands-Energie eines gluonischen Systems mit zwei statischen adjungierten Farb-Ladungen messen; (ii) die Thermodynamik von Lattice QCD bei endlicher Temperatur und Teilchendichte, indem wir, anstatt wie gewöhnlich das grosskanonische, das kanonische Ensemble untersuchen. Es ist beiden Projekten gemeinsam, dass herkömmliche numerische Methoden unzureichend sind, um relevante Informationen zu sammeln. Das Signal verschwindet im Rauschen bevor physikalisch interessante Distanz- oder Energie-Skalen erreicht wurden. Mit anderen Worten, wir haben ”schwache Signale” aufzulösen. Wir verbessern Algorithmen zur Varianz-Reduktion, welche auf dem neuesten Stand der Technik sind, und entwickeln für QCD einen neuen kanonischen Ansatz.

“String breaking”, d.h. die Bildung eines Materie-Antimaterie Paares aus der Energie, welche im String zwischen zwei statischen Farb-Ladungen gespeichert ist, wurde vor einigen Jahren durch Gitter-Eichtheorie-Simulationen beobachtet. Allerdings wurde bis anhin ein umstrittener Ansatz, die Multi-Kanal-Technik, verwendet. Wir werden diesen “String-breaking”-Effekt auf eine unumstrittene Art und Weise demonstrieren, indem wir nur “Wilson loops” betrachten. Wir zeigen, dass der “Wilson loop” einen nicht-verschwindenden Überlapp mit dem Zustand des gebrochenen, wie jenem des ungebrochenen Strings hat. Diese Aufgabe ist aus numerischer Sicht eine Herausforderung, da das zu betrachtende Signal der Grössenordnung  $\mathcal{O}(10^{-40})$ , eine einzelne Messung hingegen der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$  ist. Will man die unrealistische Anzahl von  $10^{80}$  Messungen vermeiden, muss eine effiziente Methode zur Reduktion der Varianz angewendet werden. Wir starten mit dem Algorithmus von Lüscher-Weisz, welcher auf die Messung von “Polyakov loop”-Korrelationen spezialisiert ist. Der Fehler wird hierbei exponentiell in der Länge des “Polyakov loop” verkleinert, indem man über temporale Link-Link Korrelatoren mittelt. Wir verallgemeinern diese Methode, so dass sie auch für adjungierte Wilson loops verwendet werden kann. Wir erreichen dies, indem wir eine zusätzliche Fehler-Reduzierung für die räumlichen Komponenten entwickeln. Dieser Weg ist von Erfolg gekrönt: Wir können die Energie des Grundzustandes, wie auch jene des ersten und zweiten angeregten Zustandes, als Funktion der räumlichen Distanz  $R$  der beiden Ladungen bis  $R \sim 1.2\text{fm}$ , messen. Der String bricht in unserem Modell bei der Länge  $R \sim 1.0\text{fm}$  auseinander.

Es fehlen Algorithmen, um die Thermodynamik der Lattice QCD bei endlicher Temperatur  $T$  und bei endlichem chemischen Potential  $\mu$  für Systeme mit  $\frac{\mu}{T} \gtrsim 1$  zu simulieren. Die Schwierigkeit wird vom “sign problem” verursacht, welches bei  $\mu = 0$  nicht auftaucht, allerdings mit grösserem  $\mu$  stärker wird. Wir präsentieren einen neuen Ansatz, indem wir die Teilchendichte  $\rho$ , anstatt das chemische Potential betrachten. Die Methode reduziert die Varianz, indem sie die Fourier-Koeffizienten

der fermionischen Determinante für jede einzelne Konfiguration berechnet. Dadurch wir sie numerisch sehr kostspielig, und aufgrund unserer beschränkten Computer-Ressourcen konzentrieren wir uns auf die Untersuchung kleinerer Systeme. Konkret betrachten wir QCD mit vier Arten von Kogut-Susskind Fermionen der Masse  $\frac{m}{T} = 0.2$  auf einem Gitter der Grösse  $6^3 \times 4$ . Wir können dieses System im Bereich  $\frac{T}{T_c} \gtrsim 0.8$  und  $\frac{\mu}{T} \lesssim 2$  studieren. Wir bestimmen die Helmholtz Freie Energie, von welcher die gesamte Thermodynamik der QCD abgeleitet werden kann. Beispielsweise lokalisieren wir den Phasenübergang von der gewöhnlichen Materie zum Quark-Gluonen-Plasma, sowohl als Funktion von  $T$  und  $\rho$ , wie auch als Funktion von  $T$  und  $\mu$ . Im Gegensatz zur Literatur sehen wir, dass diese Phasenlinie, bei  $\frac{\mu}{T} \gtrsim 1.3$  startend, rasch in  $T$  abfällt. Wir denken, dass dieser Effekt eintreten muss, um konsistent mit Erwartungen von “strong coupling”-Rechnungen bei  $T = 0$  zu sein.