



Doctoral Thesis

## Asset pricing for idiosyncratically incomplete markets

**Author(s):**

Malamud, Semen Mark

**Publication Date:**

2006

**Permanent Link:**

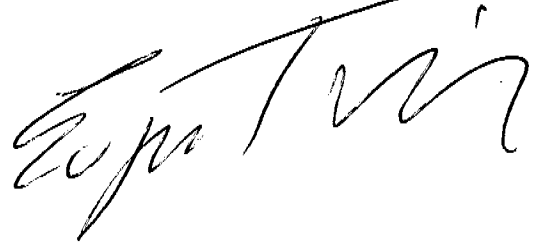
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005287087> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 16651



# Asset Pricing for Idiosyncratically Incomplete Markets

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
ZURICH

for the degree of  
Doctor of Mathematics

presented by  
SEMYON MALAMUD  
Dipl.spec.math, DNU  
Born May 12, 1980  
Citizen of Ukraine

accepted on the recommendation of  
PROF. DR. EUGENE TRUBOWITZ (examiner)  
PROF. DR. FREDDY DELBAEN (co-examiner)

2006

## Abstract

We present a rigorous analysis of idiosyncratically incomplete markets with heterogeneous agents. Our model is an extension of Constantinides and Duffie (1996) that, among other important differences, allows for trade. We directly solve the utility maximization problem and construct the unique optimal consumption stream of an agent exposed to idiosyncratic risk in closed form; no hidden approximations! We exploit our construction of the optimal consumption stream to explicitly calculate its derivatives with respect to idiosyncratic risk and state price densities.

We prove that for sufficiently weak idiosyncratic risk and sufficiently weak heterogeneity there exists a globally unique equilibrium that depends smoothly on all relevant parameters. Consequently, it is possible to rigorously expand asset returns in the idiosyncratic risk and heterogeneity and then extract important economic information from the coefficients. There is a threshold time period  $T_*$  after which heterogeneous idiosyncratic risk dominates and the heterogeneity of preferences averages out. Below this threshold, there is a subtle play between heterogeneous preferences and heterogeneous idiosyncratic risk. On both sides of this threshold, we can calculate the response of some thirteen well known stylized facts to both idiosyncratic risk and heterogeneity (see, Theorem 11.0.13 and Section 13).

Of particular interest, we identify an explicit mechanism through which the growth rate of idiosyncratic risk increases equity returns and their volatility, but, at the same time, leaves risk free rates virtually unchanged.

Among other results, we show that, above the threshold time period, the equity premium increases relative to the "background complete market" when the "idiosyncratic risk process" is *procyclical* and its growth rate is above an explicit threshold, surprisingly close to the growth rate of "observed idiosyncratic risk". This result contradicts the "financial folklore" that the equity premium increases only when the idiosyncratic risk is countercyclical.

We also show that, above the threshold time period, countercyclicity of the idiosyncratic risk process forces term premia to be negative, contrary to empirical data, and also forces countercyclicity of price dividend ratios, again, contrary to empirical data.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse der idiosynkratischen Risiken in unvollständigen Märkten mit heterogenen Agenten. Das betrachtete Modell stellt eine Verallgemeinerung von Constantinides and Duffie (1996) dar mit dem wichtigen Unterschied, dass der Handel erlaubt wird. Das bedeutet, es wurde eine Lösung des Nutzenmaximierungsproblems gegeben und der optimale Konsumprozess von einem Agent mit dem idiosynkratischen Risiko konstruiert. Dank dieser Konstruktion des Konsumprozesses lassen sich die Ableitungen explizit berechnen.

Es wurde auch gezeigt: wenn idiosynkratisches Risiko und Heterogenität genügend klein sind, dann existiert ein eindeutiges Gleichgewicht, das eine glatte Funktion aller relevanten Parameter ist.

Dank diesem können die Renditen in eine Potenzreihe entwickelt und ökonomische Information aus den Koeffizienten extrahiert werden. Es gibt eine Grenzzeitperiode  $T_*$ , nach der das heterogene idiosynkratische Risiko dominiert und die heterogenen Präferenzen "verschwinden".

Vor dieser Periode gibt es eine komplizierte Wechselwirkung zwischen den heterogenen Präferenzen und dem idiosynkratischen Risiko. Auf beiden Seiten der Grenze wurden Responses von etwa dreizehn stylisierten Fakten zu idiosynkratischem Risiko und Heterogenität (siehe, Satz 11.0.13 und Teil 13) berechnet.

Insbesondere identifizieren wir den expliziten Mechanismus, der der Wachstumsrate des idiosynkratischen Risikos erlaubt, die Renditen und ihre Varianz zu vergrößern und gleichzeitig die risikofreie Rate virtuell unverändert lässt.

Unter anderem ist es zu zeigen, dass das Risikopremium nach der Grenzperiode steigt im Vergleich zum vollständigen Markt, falls der Idiosynkratischerisikoprozess *prozyklisch* und seine Wachstumsrate grösser als eine explizit gegebene Grenze ist. Diese Grenze ist überraschend nah zur empirischen Wachstumsrate. Solch ein Resultat widerspricht der "finanziellen Folklore", dass Risikopremium nur dann wächst, wenn das idiosynkratische Risiko konterzyklisch ist.

Es lässt sich auch beweisen, dass das konterzyklische idiosynkratische Risiko nach der Grenzperiode den Termpremium negativ und den Preis Dividend Ratio konterzyklisch macht.