Biharmonic maps

Author(s):
Angelsberg, Gilles

Publication Date:
2007

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005463226

Diss. ETH No. 17187

Biharmonic Maps

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Science

presented by
GILLES ANGELSBERG
Dipl. Math. Université de Fribourg
born June 3, 1980
citizen of the
Grand Duchy of Luxembourg

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Michael Struwe, examiner
Prof. Dr. Tristan Rivière, co-examiner
Prof. Dr. Norbert Hungerbühler, co-examiner

2007

Abstract

This work investigates existence and regularity properties of extrinsic weakly biharmonic maps from an Euclidean domain Ω into a smooth compact Riemannian manifold $\mathcal{N}$.

The first part deals with the existence of large solutions for biharmonic maps in four dimensions. Introducing the notion of topological degree for Sobolev maps from $\mathbb{R}^4$ to S^4, we show that there exists locally minimizing extrinsic biharmonic maps u^* of topological degree -1 and 1. The proof is based upon P.L. Lions' *concentration compactness* principle. This allows us to exclude the phenomena of concentration and vanishing at infinity, for minimizing sequences for the Hessian energy with prescribed topological degree -1 or 1, up to rescalings and translations. We infer that the degree is preserved in the limit.
Then, for $\Omega = B_1$ unit ball in $\mathbb{R}^4$ and $\mathcal{N} = S^4$, we show the existence of two non homotopic biharmonic maps for certain Dirichlet boundary data. The key step is a "*sphere attaching lemma*" stating the existence of a map u, non homotopic to the absolute minimizer $\underline{u}$ of the Dirichlet problem, having less energy than the sum of the energies of $\underline{u}$ and u^*. Thus, we can exclude bubbling of minimizing sequences in the considered homotopy class in order to conclude compactness.

In the second part, we consider the regularity problem for extrinsic weakly biharmonic maps. We first give a rigorous proof of the monotonicity formula of S.-Y.A. Chang, L. Wang and P. Yang for extrinsic stationary biharmonic maps of class $W^{2,2}$, allowing to show partial regularity in higher dimensions.
Then, we show regularity results for polyharmonic maps in higher dimensions. Our method uses a sharp interpolation inequality by Adams-Frazier and avoids the use of moving frames. In view of the monotonicity formulae for stationary harmonic and biharmonic maps we conclude, in theses cases, partial regularity.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit Existenz- und Regularitätseigenschaften von extrinsisch schwach biharmonischen Abbildungen zwischen einem Euklidischen Gebiet Ω und einer glatten kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$.

Im ersten Teil untersuchen wir die Existenz von grossen Lösungen der biharmonischen Gleichung in vier Dimensionen. Nach Einführung des topologischen Grades für Sobolev-Abbildungen von $\mathbb{R}^4$ nach S^4, zeigen wir die Existenz von lokal minimierenden extrinsisch biharmonischen Abbildungen u^* vom Grad -1 und 1. Der Beweis beruht auf P.L. Lions' *"concentration compactness principle"*. Dies erlaubt uns ein mögliches Verschwinden der Energie gegen unendlich, sowie die Konzentration an Punkten für minimierende Folgen der Hesseschen Energie (bis auf Reskalierungen und Translationen) auszuschliessen. Somit bleibt der Grad im Limes erhalten.
Des weiteren zeigen wir für $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^4$ und $\mathcal{N} = S^4$ die Existenz von zwei nicht homotopen biharmonischen Abbildungen für gewisse Randdaten. Der entscheidende Schritt ist das *"sphere attaching lemma"*. Es liefert die Existenz einer Abbildung u, die nicht homotop zur absolut minimierenden Abbildung $\underline{u}$ des Dirichlet-Problems ist, und deren Energie kleiner ist als die Summe der Energien von $\underline{u}$ und u^*. Diese Aprioriabschätzung erlaubt uns, das Ablösen einer Sphäre für minimierende Folgen in der betrachteten Homotopieklasse auszuschliessen.

Im zweiten Teil betrachten wir Regularitätsfragen für extrinsisch schwach biharmonische Abbildungen. Zunächst beweisen wir die Monotonieformel von S.-Y.A. Chang, L. Wang und P. Yang für extrinsisch stationär biharmonische Abbildungen in $W^{2,2}$. Diese erlaubt die Herleitung der partiellen Regularität in höheren Dimensionen.
Weiter zeigen wir Regularitätsresultate für polyharmonische Abbildungen. Unsere Methode verwendet eine Interpolationsungleichung von Adams-Frazier, und vermeidet die Anwendung von *"moving frames"*. Angesichts der Monotonieformeln für stationär harmonische und biharmonische Abbildungen, erhalten wir in diesen Fällen partielle Regularität.

Résumé

Nous étudions dans cette thèse quelques propriétés d'existence et de régularité des applications faiblement biharmoniques (au sens extrinsèque), définies sur un domaine Euclidien et à valeurs dans une variété Riemannienne compacte de classe C^∞.

Dans la première partie, nous analysons l'existence de grandes solutions pour l'équation biharmonique. Introduisant le degré topologique pour les applications de Sobolev de $\mathbb{R}^4$ à valeurs dans S^4, nous démontrons l'existence de minimiseurs locaux u^* de l'énergie Hessienne ayant un degré topologique prescrit -1 ou 1. La preuve est fondée sur le principe de *concentration-compacité* de P.L. Lions. Par suite, les phénomènes de concentration et d'annihilation à l'infini s'excluent pour des suites minimisantes de l'énergie Hessienne (à translations et dilatations près). Le degré est donc préservé à la limite.
De plus, pour $\Omega = B_1$ boule d'unité dans $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{N} = S^4$, nous considérons des problèmes de Dirichlet pour l'équation biharmonique admettant (au moins) deux solutions non-homotopes. L'outil principal est un lemme, appelé *"sphere attaching lemma"*. Celui-ci fournit une application u, étant non-homotope au minimiseur global $\underline{u}$ du problème de Dirichlet, et ayant une énergie inférieure à la somme des énergies de $\underline{u}$ et u^*. Nous en déduisons la convergence forte des suites minimisantes dans les classes d'homotopie considérées.

La deuxième partie est consacrée au problème de régularité des applications faiblement biharmoniques. Nous démontrons d'abord la formule de monotonie de S.-Y.A. Chang, L. Wang et P. Yang pour les applications biharmoniques stationaires de classe $W^{2,2}$, permettant d'établir la régularité partielle en dimensions supérieures à quatre.
En dernier lieu, nous établissons des résultats de régularité pour les applications polyharmoniques. Notre méthode utilise une inégalité d'interpolation d'Adams-Frazier. De plus, nous évitons des repères mobiles. En vue des formules de monotonie pour les applications harmoniques et biharmoniques stationaires, nous obtenons la régularité partielle dans ces cas particuliers.