Zum 300. Geburtstag von Leonhard Euler

die Bedeutung seines Werkes für die heutige Zeit

Zum 300. Geburtstag von *Leonhard Euler.* Die Bedeutung seines Werkes für die heutige Zeit

Günther Frei

Erscheint in:

Naturwissenschaftliche Rundschau
Dezember, 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Am 15. April 2007 jährte sich zum dreihundertsten Mal der Geburtstag des Basler Gelehrten Leonhard Euler (1707-1783). Euler gehört zweifelsohne zu den grössten Wissenschaftern aller Zeiten, als Mathematiker und Naturwissenschafter in die erste Reihe zusammen mit Archimedes, Newton und Gauss. Euler ist vor allem bekannt als der führende Mathematiker des 18. Jahrhunderts, doch umfasst sein Werk auch viele bahnbrechende Arbeiten in Physik, Astronomie, Technik und Ingenieurwissenschaften. Ausserdem unterhielt er eine umfangreiche Korrespondenz mit allen Grössen seiner Zeit. Kein anderer Mathematiker war auf den verschiedensten Gebieten seiner Wissenschaft und den Nachbargebieten so produktiv wie er. Eulers Gesamtwerk umfasst mehr als achtzig Quartbände, und sein Einfluss auf die moderne Wissenschaft und Technik ist unübersehbar. Täglich nutzen wir eine Vielfalt seiner Entdeckungen, ohne uns dessen bewusst zu sein.

2 Eulers Werk und dessen Bedeutung für die Gegenwart

2.1 Zahlentheorie

In Eulers Arbeiten nimmt die Zahlentheorie, mit der er sich zeitlebens intensiv beschäftigte, einen besonderen Platz ein. Seine Untersuchungen bilden die Grundlage für das digitale Übertragen und Verschlüsseln von Nachrichten, ohne welche der sichere Internetverkehr und das Übermitteln von Informationen heute gar nicht möglich wäre.

Ausgangspunkt war die Erforschung der Eigenschaften der Primzahlen, wonach Euler schrittweise zur Entdeckung des *(Quadratischen) Reziprozitätsgesetzes* gelangte, des grundlegendsten Gesetzes der höheren Zahlentheorie, das sich tiefgreifender Erweiterungen fähig erwies. Nach der umfassendsten Form dieses Gesetzes wird noch immer gesucht. In seiner einfachsten und ursprünglichen Form ermöglicht es die Lösung der (ganzzahligen) quadratischen Gleichung

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

in ganzen Zahlen. Denn dieses Gesetz gestattet, aus der Lösbarkeit einer solchen Gleichung in ganzen Zahlen mit Hilfe der Untersuchung der Reste bezüglich einer Primzahl p auf die Lösbarkeit einer anderen (quadratischen) Gleichung bezüglich einer anderen Primzahl q zu schliessen. Auf diese Weise gelang es Euler, mit einem *Kettenverfahren* die Lösbarkeit einer Gleichung auf die Lösung von nur ganz wenigen speziellen und besonders einfachen Gleichungen zurückzuführen. In diesem Zusammenhang entdeckte Euler auch Gesetzmässigkeiten, die heute der sogenannten *Klassenkörpertheorie* angehören, dem schwierigsten und abstraktesten Teil der modernen Zahlentheorie. So konnte er viele für die damalige Zeit sehr grosse Primzahlen auffinden, und andererseits grosse Zahlen auf sehr effiziente Weise in ihre Primfaktoren zerlegen. Seine Methoden liegen auch den modernen Techniken zur Primfaktorzerlegung und zur Erzeugung von grossen Primzahlen zugrunde. Sie gehören noch immer zu den effizientesten.

1. Auf Eulers Untersuchungen beruhen zunächst einmal die *mathematische Theorie der Datenübertragung* sowie die *Kodierungstheorie*. Daten werden heute zum grossen Teil über Telefon- und Kabelnetze oder mittels Hochfrequenzradio oder per Satellitenfunk in digitalisierter Form, d.h. in Form von Zahlenreihen oder Zahlenblöcken übermittelt. In dieser Form werden sie auch auf Magnetbändern und CDs gespeichert. Als Elemente solcher Zahlenreihen oder Zahlenblöcke eignen sich speziell die Zahlenreste bezüglich einer fest gewählten natürlichen Zahl n, insbesondere einer Primzahl p. Nehmen wir als Beispiel die Primzahl $p = 7$, so sind es die Zahlenreste $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Um mit Zahlenresten rechnen zu können wie mit Zahlen, werden alle Zahlen, die den gleichen Rest bezüglich n haben, in eine Klasse zusammengefasst und miteinander identifiziert. Man schreibt $a \equiv b$, wenn a und b zwei solche Zahlen mit gleichem Rest sind, oder $a \equiv b$ modulo n, wenn der Bezug zu n ausgedrückt werden soll. Mit anderen Worten: $a \equiv b$ modulo n bedeutet, dass $a - b$ durch n teilbar ist. So gehören alle Zahlen der Zahlenfolge $\ldots - 21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, \ldots$ zum Rest 0 (bezüglich 7), denn alle diese Zahlen lassen sich schreiben in der Form $7 \cdot z + 0$ mit einer ganzen Zahl z und dem Rest 0. Gleicherweise gehören alle Zahlen der Zahlenfolge $\ldots - 20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, 29, \ldots$ zum Rest 1 (bezüglich 7). Sie alle sind von der Form $7 \cdot z + 1$ mit einer ganzen Zahl z. Ihr Rest bezüglich 7 ist also 1. Somit ist beispielsweise $7 \equiv 0$ modulo 7. Oder es ist $27 \equiv 1$ modulo 13, denn $27 - 1$ ist durch 13 teilbar, oder anders ausgedrückt: 27 lässt den Rest 1 nach Division durch 13, denn $27 = 13 \cdot 2 + 1$.

Mit dieser Vereinbarung ergibt die Summe und das Produkt zweier Zahlenreste wieder eindeutig einen Zahlenrest. So ist $4 + 5 \equiv 2$ (modulo 7), denn die Zahl $4 + 5 = 9$ gehört zum Rest 2 bezüglich 7. Und es ist $4 \cdot 5 \equiv 6$ (modulo 7), denn die Zahl $4 \cdot 5 = 20$ gehört zum Rest 6 bezüglich 7. Weiter gibt es zu jedem Zahlenrest a einen eindeutig bestimmten Zahlenrest x mit der Eigenschaft $a + x \equiv 0$, den man als negativen Zahlenrest $x = -a$ zu a auffassen kann. Und im Falle einer Primzahl p gibt es auch zu jedem von Null verschiedenen Zahlenrest a einen eindeutig bestimmten Zahlenrest

y mit der Eigenschaft $a \cdot y \equiv 1$, den man als reziproken Zahlenrest $y = \frac{1}{a}$ zu a auffassen kann . So gilt also für den Bereich der Primzahl $p = 7$ die Eigenschaft: $-4 \equiv 3$ (denn $4 + 3 = 7 \equiv 0$, da 7 nach Teilung durch 7 den Rest 0 lässt), und $\frac{1}{4} \equiv 2$ (denn $4 \cdot 2 = 8 \equiv 1$, weil 8 nach Teilung durch 7 den Rest 1 lässt), wo $\equiv$ also die Gleichheit für Zahlenreste bezüglich der Primzahl 7 bedeutet. Die Tatsache, dass die Zahlenreste bezüglich einer Primzahl die gleichen fundamentalen Eigenschaften haben, die auch den rationalen Zahlen zukommen, d.h. die Eigenschaften eines Körpers, und bezüglich Addition und Multiplikation die Struktur einer Gruppe, hat Euler als Erster klar erkannt und angewandt.

Es war der Amerikaner Claude Elwood Shannon (1916 - 2001), der um 1948 zu untersuchen begann, wie eine verlustfreie Datenübertragung über elektronische (oder optische) Kanäle sichergestellt werden könnte. Dabei gilt es, das Hintergrundrauschen herauszufiltern und die bei der Übertragung oder Speicherung aufgetretenen Fehler und Lücken zu erkennen und zu korrigieren. Dazu müssen redundante (d.h. überflüssige) Daten mitgeschickt werden, und die Struktur der Zahlen als Zahlenkörper (oder eventuell einer anderen algebraischen Struktur) dient dann dazu, die ursprünglichen Datensignale nach Störungen oder Verlusten wieder herzustellen. Begründer dieser algebraischen Kodierungstheorie ist der Schweizer Marcel J. E. Golay (1902-1989), der 1949 die mathematische Theorie der Fehler erkennenden und korrigierenden *Codes* entwickelt hat und sie als Erster auf militärische und industrielle Probleme anwandte. Solche Codes kommen überall dort zur Anwendung, wo digitale Daten bei Übertragung oder Speicherung gegen auftretende Fehler gesichert werden müssen. Beispiele hierfür sind die Kommunikation mit Satelliten im Weltraum und das Speichern von Daten auf einer CD.

2. Für die *Verschlüsselungstechnik* von grösster Bedeutung ist die von Euler erkannte und bewiesene Tatsache, dass nicht nur die von Null verschiedenen Reste bezüglich einer Primzahl eine multiplikative Gruppe bilden, sondern auch die zu einer beliebigen natürlichen Zahl n gehörigen und zu ihr teilerfremden Reste, insbesondere also die Eigenschaft, dass es zu jedem solchen Rest einen reziproken Rest gibt. Diese Eigenschaft bildet nun die Grundlage für die sogenannten "Public Keys", d. h. *asymmetrische Kryptosysteme mit öffentlichem Schlüssel*, die heute für das Verschlüsseln und Entschlüsseln von Nachrichten zur sicheren Abwicklung von Geschäften im Internet verwendet werden, z. B. beim E-Mail-Verkehr und beim kryptografischen Protokoll "https", welches zur sicheren Kommunikation eines Browsers mit dem Server dient. Dabei werden die zu übermittelnden Zahlenblöcke als Restklassen bezüglich einer festen (grossen) Zahl n mittels eines Exponen-

ten e, des öffentlichen Schlüssels, auf bestimmte Weise vertauscht und so in neue Zahlenblöcke verwandelt. Der Empfänger kann die Nachricht nur entschlüsseln, wenn er den zu e inversen Exponenten d, den privaten geheimen Schlüssel, kennt. Der Empfänger E wählt nun n als Produkt zweier grosser Primzahlen p und q, die nur ihm bekannt sind, $n = p \cdot q$, und gibt das Zahlenpaar (n, e) öffentlich bekannt. So kann jeder mit diesem öffentlich bekannten Schlüssel (n, e) von E eine verschlüsselte Nachricht an E schicken. Lesen kann die Nachricht aber nur derjenige, der die Primzahlzerlegung von n, also die beiden Primzahlen p und q kennt und so den geheimen Schlüssel d des Empfängers E bestimmen kann, den dieser so gewählt hat, dass $d \cdot e$ den Rest 1 bezüglich $(p-1) \cdot (q-1)$ hat. Das ist nun nach dem Satz von Euler immer möglich, wenn e mit $(p-1) \cdot (q-1)$ keinen gemeinsamen Teiler hat. Zum Bestimmen von d ist also die Kenntnis von p und q, d.h. die Primfaktorzerlegung von n nötig. Diese kann aber auch von einem leistungsfähigen Computer nicht in nützlicher Zeit bewerkstelligt werden, wenn die beiden Primzahlen p und q genügend gross gewählt sind.

Diese Verschlüsselungstechnik sei an dem folgenden einfachen Beispiel erläutert. Der Empfänger E wählt als öffentlichen Schlüssel $(n, e) = (187, 7)$, d. h. $n = 187$ und $e = 7$. Der Absender A möchte nun dem Empfänger die Zahl 10 übermitteln, die z. B. für einen Geldbetrag oder auch für einen Buchstaben stehen kann, etwa für "J". Der Absender transformiert mittels des Exponenten $e = 7$ (und bezüglich $n = 187$) die Zahl 10 in die Zahl 175, weil $10^7 \equiv 175$ modulo 187 ist; d. h. $10^7 = 10'000'000$ lässt nach Division durch 187 den Rest 175. Diese Zahl 175 kann für ein anderes Zeichen stehen, z. B. für "$\sharp$". Der Empfänger, und nur er, kann nun diese Zahl (oder dieses Zeichen) richtig lesen, denn er und nur er kennt die Primzahlzerlegung der öffentlich bekannten Zahl 187, nämlich $11 \cdot 17$; er hatte nämlich diese Zahl $n = 187$ als Produkt zweier ihm bekannter Primzahlen $p = 11$ und $q = 17$ bestimmt (in der Praxis sind natürlich p und q sehr grosse Primzahlen). Er berechnet daraus seinen privaten Schlüssel d so, dass $d \cdot e$ den Rest 1 hat bezüglich $(p-1) \cdot (q-1) = 10 \cdot 16 = 160$. Nur er kann das, weil nur ihm die Zahl $(p-1) \cdot (q-1) = 10 \cdot 16 = 160$ bekannt ist, da er $p = 11$ und $q = 17$ kennt. Zum öffentlichen Schlüssel $e = 7$ bestimmt er nun seinen privaten mit $d = 23$, denn $7 \cdot 23 = 161$ lässt den Rest 1 nach Division durch 160. Um nun die ursprüngliche Information zu erhalten berechnet er also 175^{23} und bestimmt den zugehörigen Rest nach Division durch 187. Dieser Rest ist 10, denn $175^{23} \equiv 10$ modulo 187, womit er die ursprüngliche Nachricht von A zurück erhält.

3. Bedeutende Entdeckungen machte Euler auch über *Elliptische Kurven*,

die etwa durch Gleichungen der Form

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

algebraisch dargestellt werden. Diese wurden in den letzten Jahren immer wichtiger, weil man dank deren Hilfe für die Verschlüsselungstechnik mit wesentlich kleineren Schlüsseln auskommt, und die deshalb unter anderem beim Mobiltelefon zur Anwendung kommen. Möglich wird das dadurch, dass die Punkte auf einer elliptischen Kurve, deren Koordinaten einem endlichen Körper angehören, d. h. Reste bezüglich einer Primzahl sind, eine Gruppenstruktur besitzen.

4. Eulers *Theorie der Partitionen*, der additiven Zerlegung von Zahlen, und besonders seine Theorie der *Lateinischen Quadrate* reichen in das populäre Gebiet der unterhaltenden Mathematik und bilden die Grundlage der heute so beliebten *Sudoku*, Quadrate, die mit Zahlen gefüllt werden müssen, wobei (neben weiteren möglichen Bedingungen) keine Zeile und keine Spalte die gleiche Zahl mehr als einmal enthalten darf. Gewisse Lateinische Quadrate haben aber auch eine wichtige praktische Bedeutung, weil man mit ihnen Codes konstruieren kann und umgekehrt. Die von Euler ebenfalls schon untersuchten Griechisch-Lateinischen Quadrate, Verallgemeinerungen der Lateinischen Quadrate, sind heute für das Aufstellen und Optimieren von Versuchsplänen von grosser Bedeutung, z. B. in der Statistik. Eine weitere einfache Anwendung der Theorie der Partitionen bilden die ebenfalls beliebten *Kakuro*, Kästchen, in welche Zahlen eingefüllt werden müssen, so dass deren Summenzahlen vorgeschriebene Werte ergeben. Euler fand eine Fülle von Eigenschaften für Partitionen dadurch, dass er den zugehörigen zahlentheoretischen Funktionen unendliche Potenzreihen zuordnete, sogenannte "erzeugende Funktionen", deren Koeffizienten die entsprechenden arithmetischen Funktionswerte sind, und dann diese Potenzreihen analytisch und algebraisch untersuchte. Bedeutet etwa $f(n) = a_n$ die Anzahl der möglichen additiven Zerlegungen der natürlichen Zahl n in voneinander verschiedene natürliche Zahlen, so ist

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

die zugehörige erzeugende Funktion.

Bei diesen Untersuchungen stiess Euler auch auf Beziehungen, die in das Gebiet der *Modulformen* und der Theta-Reihen gehören, die später von C. G. J. Jacobi im 19. Jahrhundert weiter untersucht wurden und heute in der Zahlentheorie und auch in der Theoretischen Physik eine grosse Rolle spielen. Die eigentliche Theorie der erzeugenden Funktionen ist im Wesentlichen aber noch immer so, wie sie Euler zurückgelassen hat.

2.2 Algebra

Zur Theorie der Auflösung von algebraischen Gleichungen hat Euler wichtige Schritte hin zur Galois-Theorie und zum Fundamentalsatz der Algebra getan und Methoden zur Näherungslösung von numerischen Gleichungen entwickelt. Eulers Buch "Vollständige Anleitung zur Algebra", 1770 in Petersburg in deutscher Sprache erschienen, hat die Entwicklung der *Algebra* nachhaltig geprägt. Euler diktierte es angeblich seinem Diener, einem ungeschulten ehemaligen Schneidergesellen, und veranlasste ihn, sich den Stoff anzueignen und die zugehörigen Übungen zu lösen. So ist ein Meisterwerk entstanden, das den Leser von den Anfängen der Algebra fast mühelos bis zu deren Höhen führt. Im letzten Teil findet sich erstmals ein Beweis dafür, dass für dritte Potenzen die Fermat'sche Vermutung richtig ist, d. h. dass es nicht möglich ist, drei natürliche Zahlen solcherart zu finden, dass die Summe der Kuben von zweien von ihnen einen Kubus der dritten ergibt, d. h. dass stets $a^3 + b^3 \neq c^3$ für natürliche Zahlen a, b und c gilt. Die kleine Lücke in Eulers Beweis lässt sich mittels der von Euler im Beweis hergeleiteten Tatsachen leicht ausfüllen.

2.3 Analysis

Vielfältig sind auch Eulers Entdeckungen auf dem Gebiet der *Analysis*, einem weiteren Gebiet, das Euler recht eigentlich geschaffen hat, indem er den umfassenden Begriff der Funktion einführte. Hier knüpfte er an die Tradition der Bernoulli an, die nach der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz und Newton die Aufgabe in Angriff genommen hatten, das neue Werkzeug auf physikalische und geometrische Probleme anzuwenden. Euler ging aber weit über sie hinaus, indem er diese Methode in mehreren Richtungen weiter entwickelte und sie auch auf andere Gebiete anwandte.

So gewann er mit Hilfe neuartiger analytischer zahlentheoretischer Funktionen völlig neue Einsichten über die Eigenschaften der Zahlen. Von herausragender Bedeutung in diesem Zusammenhang ist die von Euler 1744 eingeführte Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots,$$

eine Summe mit unendlich vielen Gliedern über die reziproken Werte aller natürlichen Zahlen, in welcher der Exponent s eine reelle Zahl bedeutet. Für sie hatte Euler alle wichtigen Eigenschaften bereits aufgefunden und zum grossen Teil auch bewiesen. Ihre Funktionalgleichung (im erweiterten Bereich der komplexen Zahlen) hat allerdings erst Riemann beweisen können und daraus dann geschlossen, dass die nicht reellen Nullstellen der Zeta-Funktion alle auf einer im Punkte $\frac{1}{2}$ zur reellen Achse senkrecht stehenden Geraden (in der komplexen Ebene) liegen müssen. Diese sogenannte *Riemann'sche Vermutung* hat weitreichende Folgen und ist eines der bedeutendsten offenen Probleme der heutigen Mathematik, und auch eines der sieben "Millenniumsprobleme", für deren Lösung ein Preis von je einer Million Dollar ausgeschrieben ist (s. dazu `www.claymath.org/prizeproblems`).

Im Zusammenhang mit der Gruppenstruktur auf elliptischen Kurven steht das Additionstheorem für elliptische Integrale, zum Beispiel für

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Es ist Ausgangspunkt der modernen und weitreichenden Theorie der abelschen Varietäten und verallgemeinert das bekannte Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen, etwa der Sinus-Funktion:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin x \sqrt{1-\sin^2 y} + \sin y \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Die von Euler geschaffene Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ist — wie die Zeta-Funktion — eine von vielen Funktionen, die Euler durch Erweiterung von den natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen geschaffen hat. Sie erweitert die Fakultät-Funktion,

$$\Gamma(n+1) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n,$$

wo n eine natürliche Zahl bedeutet. Sie ist für eine Vielzahl von Funktionen und Anwendungen in verschiedenen Gebieten von grundlegender Bedeutung. Eine von Eulers Formeln dieser Funktion löste um 1968 die Entdeckung der String-Theorie aus, welche Quantentheorie und Allgemeine Relativitätstheorie zu vereinen trachtet.

2.4 Variationsrechnung

Zu einem eigenen Wissenszweig ausgestaltet hat Euler die *Variationsrechnung*. Diese ist für viele Gebiete der Physik unentbehrlich, insbesondere für die Dynamik, aber auch ganz allgemein für dynamische Prozesse. Es geht dabei um die Aufgabe, Funktionen so zu bestimmen, dass sie grösst- oder kleinstmöglich werden. Im Zusammenhang damit hatte Euler bereits die Idee, physikalische Gesetze so zu formulieren und herzuleiten, dass gewisse ihrer Grössen extremal werden, wie etwa beim *Prinzip der kleinsten Wirkung*, das oft Maupertuis zugeschrieben wird, aber in seiner exakten Form von Euler stammt. Diese Euler'sche Methode hat für die spätere Entwicklung der Physik eine hervorragende Rolle gespielt und bis in die heutige Zeit als Leitprinzip gedient für das Aufstellen von fundamentalen physikalischen Gesetzen, aber etwa auch von optimalen Gleichgewichtsbedingungen in der Wirtschaft und der Finanzmathematik. Sie wird zweifelsohne auch in Zukunft eine bedeutende Rolle spielen.

Genauer handelt es sich bei diesen Problemen darum, eine unbekannte Funktion f so zu bestimmen, dass ein über sie erstrecktes Integral ein Minimum oder Maximum annimmt. Für Funktionen f der Form $f(x, y, y')$, die nur von x, y und der Ableitung y' von y bezüglich x abhängen, hat Euler 1736 eine fundamentale Differentialgleichung abgeleitet, die heute seinen Namen trägt, und die eine notwendige Bedingung darstellt, der die Funktion f genügen muss.

So führt nach diesem Vorbild Hamiltons Prinzip der kleinsten Aktion, wonach das Zeitintegral der Lagrange'schen Funktion, d.h. der Wirkungsfunktion, einen Extremwert annimmt, auf die Grundgleichungen der Himmelsmechanik in der Form der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung. Darauf aufbauend und geleitet durch das von De Broglie im Jahre 1924 ausgesprochene Korrespondenzprinzip, wonach sich die Quantenmechanik zur klassischen Mechanik verhalte wie die Wellenoptik zur geometrischen Strahlenoptik – den Massenpunkten, die sich gemäss den Gesetzen der Mechanik bewegen, sind Materiewellen zuordnet, in gleicher Weise wie den Lichtstrahlen Lichtwellen zugeordnet sind –, gelangte Erwin Schrödinger zwei Jahre später zur fundamentalen Gleichung für die Quantenmechanik. An die Stelle der klassischen physikalischen Grössen, der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Impulse, treten die entsprechenden mathematischen Operatoren.

Auf dieselbe Weise Eulers Methode folgend, leitete David Hilbert (1862-1943), der bedeutendste Mathematiker des letzten Jahrhunderts, im Jahre 1915 für die Allgemeine Relativitätstheorie die Grundgleichungen der Gravitation mit Hilfe der Variationsrechnung (und der Invariantentheorie) her – Albert Einstein hat sie dann in einer kurz darauf veröffentlichten Note übernommen, allerdings ohne Hilbert zu erwähnen. Hilbert benützte einen Ansatz von Mie und das Hamilton'sche Prinzip, angewandt auf eine gegenüber beliebigen Transformationen der Weltparameter invarianten Weltfunktion, die das Gravitationsfeld und gleichzeitig das elektromagnetische Feld enthält und eine Verallgemeinerung der Lagrange'schen Funktion darstellt. So erhielt Hilbert nicht nur die Grundgleichungen der Gravitation, sondern gleichzeitig auch die elektrodynamischen Grundgleichungen von Maxwell.

Auf einem ganz anderen Gebiet, aber in Fortsetzung der Euler'schen Methode und der Hamilton-Jacobi'schen Theorie, gelangte der Amerikaner Richard Ernest Bellman (1920-1984) in den fünfziger Jahren zur Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung. Diese dient dem Auffinden von optimalen Lösungen in der Kontrolltheorie, der dynamischen Programmierung und auch in der Investmenttheorie.

2.5 Topologie

Eine Neuschöpfung Eulers ist auch die *Topologie*, eine Art Geometrie ohne Mass. Die Bedeutung dieses Gebietes ist erst im Zusammenhang mit der Funktionentheorie klar hervorgetreten, welche zu Anfang des 19. Jahrhunderts entwickelt wurde und in der zweiten Hälfte mit Riemann und seiner Theorie von den Funktionenflächen sowie mit Weierstrass und dessen Theorie der analytischen Fortsetzung von Funktionen einen ersten Höhepunkt erreichte.

Heute bildet die Topologie einen der wichtigsten Zweige der Mathematik, der seinerseits bedeutende Teile der modernen Algebra, wie etwa die Homologische Algebra, hervorgebracht hat. In der modernen Physik spielt die Topologie eine wichtige Rolle ebenso wie in der Biologie. Denn topologische Eigenschaften des Universums bestimmen dessen physikalische Eigenschaften, ebenso wie topologische Eigenschaften von organischen Molekülen deren Funktionsweise mitbestimmen. Zur Topologie gehört das Euler'sche Brückenproblem: Ist es möglich, so über alle sieben Pregelbrücken im alten Königsberg zu gehen, dass keine mehr als einmal benützt wird? Mit Methoden, die zur Graphentheorie gehören, bewies Euler, dass dies unmöglich ist. Damit wurde Euler auch zum Begründer der Graphentheorie, die bei der Lösung von Problemen eingesetzt wird etwa von der Art, wie ein Kommunikations- oder Verkehrsnetz möglichst ökonomisch oder ein Verteilersystem möglichst effizient aufgebaut werden soll.

Besonders wichtig ist die *Euler'sche Polyederformel*, wonach die Summe der Zahl der Ecken und Flächen eines Polyeders stets um zwei grösser ist als die Anzahl der Kanten, d. h. es gilt für jedes Polyeder $e - k + f = 2$, wo e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Seitenflächen bezeichnet. Die Bedeutung der Formel liegt darin, dass sie eine universelle Bedingung festlegt zwischen der Anzahl der null-, ein- und zwei-dimensionalen Elemente auf einem drei-dimensionalen Körper, abhängig nur von dessen topologischer Gestalt. Sind zwei der Zahlen gegeben, so ist die dritte eindeutig bestimmt. Diese Entdeckung spielt für die Topologie eine ähnlich zentrale Rolle wie das Reziprozitätsgesetz für die Zahlentheorie. Auch sie war Ausgangspunkt tiefliegender und weitreichender Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen und auf allgemeinere Gebilde. Eine davon ist das Atiyah-Singer-Index-Theorem, welches in der String-Theorie, die Kosmologie und Elementarteilchenphysik verbindet, eine wesentliche Rolle spielt. Der Euler'sche Polyedersatz ist auf der neuen Sonderbriefmarke zu Eulers 300. Geburtstag dargestellt, die am 6. März 2007 von der Schweizerischen Post herausgegeben wurde.

2.6 Euler'sche Gleichung und Angewandte Mathematik

1. Eine der schönsten und fruchtbarsten Verbindungen zwischen Funktionentheorie, Geometrie, Algebra und Zahlentheorie hat Euler mit der Formel geschaffen, welche die aus der unendlichen Analysis stammende Zahl e, die aus der Geometrie stammende Zahl π, die algebraische imaginäre Einheit i der komplexen Zahlen und die Eins 1, die Einheit aller ganzen Zahlen, verbindet. Diese heute jedem Ingenieur geläufige *Euler'sche Gleichung*

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

folgt unmittelbar aus der *Euler'schen Beziehung*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

welche Euler mittels unendlicher Reihen herleitete. Letztere findet sich in seinem meisterhaften Werk *"Introductio in analysin infinitorum"*, das als erstes Lehrbuch der höheren Analysis, 1748 bei Bousquet in Lausanne erschienen, in der Darstellung mustergültig geblieben ist. Dort hat Euler eine Vielzahl der von ihm entdeckten Funktionen eingeführt und auch schon deren verschiedenartige mögliche Darstellungsweisen als Integral, Potenzreihe, unendliches Produkt oder als Lösung einer Differentialgleichung hervorgehoben. Der Buchstabe e für die *Euler'sche Zahl*

$$e = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

wurde zuerst von Euler 1736 in seinem Werk *"Mechanica"* benutzt. Er wurde vermutlich in Anlehnung an die Exponentialfunktion gewählt.

2. Im Bereich der angewandten Mathematik verdanken wir Euler grundlegende Arbeiten zur Ballistik, zum Segner'schen Wasserrad, zum Turbinenbau, zur Schiffstheorie, zur Herstellung von achromatischen Linsen, zur Optik, zur Berechnung von Planeten- und Kometenbahnen, zur Theorie von Licht und Farben sowie zu Musik und Akustik. Einige seiner Entdeckungen sind auf der alten Schweizer Zehn-Franken-Note dargestellt. Die Euler'sche Turbine ist 1943 von Jakob Ackeret an der ETH Zürich mit Erfolg nachgebaut worden.

3 Biographie

Die Vorfahren von Euler stammen aus der Gegend von Lindau am Bodensee; dort wird der Familienname als "Öwler" 1287 erstmals erwähnt. Der Urgrossvater Hans-Georg Euler liess sich als Kammmacher in Basel nieder, wo er 1594 das Bürgerrecht erwarb.

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren als Sohn des Pfarrers zu St. Jakob, Paulus Euler. Ein Jahr später wurde sein Vater nach Riehen versetzt. Daselbst verbrachte Euler seine Jugendjahre. Ersten Unterricht erteilte der Vater. Danach besuchte Euler die Schule in Basel und immatrikulierte sich, erst vierzehnjährig, an der Basler Universität. Zunächst studierte er Philosophie, um sich eine Grundausbildung zu erwerben, und dann, dem Wunsche des Vaters entsprechend, Theologie.

In Basel lehrte damals Johann Bernoulli, einer der glänzendsten Mathematiker seiner Zeit. Der Kontakt mit Bernoulli hat Euler entscheidend beeinflusst und dazu geführt, dass er mit Einwilligung des Vaters zur Mathematik wechselte. Mit siebzehn Jahren erwarb er sich den Titel eines Magisters. Erst neunzehnjährig bewarb er sich mit einer Dissertation über den Schall um die frei gewordene Professur für Physik. Abgesehen vom negativen Losentscheid war es wohl auch seine Jugend, die einer Berufung im Wege stand.

Im Jahre 1725 wurden seine beiden Studienfreunde Daniel und Niklaus Bernoulli, Söhne Johann Bernoullis, von Katharina I., der Witwe Peters des Grossen, an die neu gegründete Akademie der Wissenschaften in Petersburg berufen. Schon bald meldeten sie Euler, dass an der Akademie die Vakanz einer Stelle für Physiologie und Anatomie bevorstehe, auf die er sich vorbereiten solle. Hierauf immatrikulierte sich Euler noch schnell an der Medizinischen Fakultät und reiste im Frühjahr 1727 über Lübeck nach Petersburg. Der Tod der Kaiserin eine Woche vor seiner Ankunft veränderte die Verhältnisse in unvorhergesehener Weise. Euler wurde lediglich Adjunkt der mathematischen Klasse, d. h. Assistent von Daniel Bernoulli. Erst im Jahre 1730, als der Basler Jakob Hermann, ebenfalls ein Freund der Familie, von Petersburg in seine Heimatstadt zurückkehrte, besserte sich Eulers Lage mit der Übernahme von dessen Physikprofessur an der Akademie. Den Rang eines Mathematikprofessors erlangte er drei Jahre später als Nachfolger von Daniel Bernoulli, der gleichfalls nach Basel heimkehrte. Nunmehr in sicherer Stellung, heiratete er Katharina Gsell, Tochter des St. Galler Kunstmalers und Direktors der Petersburger Mal-Akademie Georg Gsell. Mit ihr hatte er dreizehn Kinder, wovon aber nur fünf die ersten Kinderjahre überlebten.

Im Jahre 1740 brachte der Tod von Kaiserin Anna erneut unsichere Verhältnisse. Euler nahm daher ein Angebot Friedrichs II. von Preussen an, der eben die Regierungsgeschäfte übernommen hatte und sich anschickte, eine Akademie zu gründen. Zwischen Friedrich und Euler konnte sich indessen nie eine befriedigende Beziehung entwickeln, einmal weil Friedrich französischen Gelehrten den Vorzug gab, und wohl auch, weil ihm Eulers strenge religiöse Einstellung missfiel. Auch war Mathematik nicht gerade des Königs Stärke.

Als mit der Thronbesteigung Katharinas II. in Petersburg Wissenschaft und Kunst wieder aufzublühen begannen und von der Kaiserin ein grosszügiges Angebot an Euler erging, zögerte dieser nicht lange und übersiedelte 1766 mit seiner Familie nach Petersburg. Dort übernahm er eine hochangesehene führende Stellung an der Akademie und war gesellschaftlich dem einheimischen Erbadel gleichgestellt.

Schon in jungen Jahren hatte Euler die Sehfähigkeit des rechten Auges eingebüsst infolge einer lebensbedrohenden Infektion. Im Jahre 1771 erblindete er fast völlig. Seine Schaffenskraft blieb aber ungebrochen dank seinem phänomenalen Gedächtnis und seinem hohen Vorstellungsvermögen. Am 18. September 1783 starb er an einem Schlaganfall mitten in der Arbeit, nachdem er sich noch über aktuelle Themen unterhalten hatte, den Ballonaufstieg der Brüder Montgolfier im Juni in Paris und die Berechnung der Umlaufbahn des zwei Jahre zuvor durch Herschel entdeckten Planeten Uranus.

Euler ragt auch deswegen über viele berühmte Wissenschafter hinaus, weil er ausserordentlich bescheiden war, frei von Arroganz und Missgunst. Auf wissenschaftliche Entdeckungen erhob er keine Ansprüche und war in keine Prioritätsdispute verwickelt. Im Gegenteil, er freute sich über die Entdeckungen anderer und überliess ihnen gelegentlich sogar grosszügig seine eigenen.

4 Euler-Kommission

Anlässlich von Eulers 200. Geburtstag im Jahre 1907 wurde die Bildung der "Euler-Kommission" der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften angeregt, welche die Herausgabe des monumentalen Euler'schen Gesamtwerkes, der "Opera Omnia", vorbereiten sollte. Das Werkverzeichnis von G. Eneström umfasst 40 Bücher – Bücher, die über lange Zeit absolute Autorität hatten – und über 900 Forschungsbeiträge, welche noch über Eulers Tod hinaus die Zeitschriften der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Akademien Europas füllten. Seit Veröffentlichung des ersten Bandes des Gesamtwerkes im Jahre 1911 sind insgesamt 72 Quartbände erschienen. Mit den beiden Bänden zur Himmelsmechanik wird die Reihe der wissenschaftlichen Arbeiten in den nächsten zwei Jahren abgeschlossen. In zehn weiteren Bänden sollen bis 2011 noch Eulers wichtigste Korrespondenz mit seinen berühmtesten Zeitgenossen mit mehr als 3000 Briefen sowie Manuskripte, Notizen und Tagebücher der Öffentlichkeit erschlossen werden. Vier davon sind bereits erschienen. Was dann noch nicht erfasst sein wird, plant die Euler-Kommission in einem gemeinsamen Projekt mit der Russischen Akademie der Wissenschaften neben dem gesamten Euler-Nachlass zu digitalisieren und elektronisch zu veröffentlichen und so der Forschung vollständig zugänglich zu machen.

Zum 300. Geburtstag des grossen Schweizer Wissenschafters hat das Programmkomitee der Euler-Kommission unter dem Patronat der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften und mit Unterstützung der Universität Basel eine Vielzahl von Aktivitäten geplant. Eine Übersicht findet sich auf der Website `www.euler-2007.ch`.

Literaturhinweise

Emil A. Fellmann: *Leonhard Euler.* Hamburg: rowohlts monographien, 1995.
Rüdiger Thiele: *Leonhard Euler.* Leipzig: Teubner, 1982
`http://www.euler-2007.ch/`
`http://www.leonhard-euler.ch/`
`http://www.springer.com/dal/home/birkhauser/`

Hombrechtikon, den 11. Mai 2007

Prof. Dr. Günther Frei,
Prof. em. der Université Laval, Kanada
Mitglied der Euler-Kommission
Mitglied des Internationalen Redaktionskomitees von Eulers Opera Omnia

Adresse:
Lützelstrasse 36
CH-8634 Hombrechtikon
Schweiz

E-mail: `g.frei@active.ch`