

Diss. ETH No. 17661

Wavelet Compression of
Anisotropic Integrodifferential Operators
on Sparse Tensor Product Spaces

A dissertation submitted to

ETH Zurich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

NILS CHRISTOPHER REICH

MSci. Mathematics, University College London

born 05 September 1980

citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Christoph Schwab, ETH Zurich, examiner

PD Dr. Erich Walter Farkas, Swiss Banking Institute, co-examiner

Prof. Dr. Reinhold Schneider, TU Berlin, co-examiner

2008

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Konstruktion von Wavelet-Kompressionsmethoden für eine große Klasse von nicht-lokalen, anisotropen Operatoren. Basierend auf anisotropen Tensorprodukt-Wavelets in Verbindung mit Dünngitter-Techniken reduzieren diese Kompressionsschemata die Komplexität der zugehörigen Finite-Element-Steifigkeitsmatrix (asymptotisch) von ursprünglich $\mathcal{O}(h^{-2n})$ auf im wesentlichen optimale $\mathcal{O}(h^{-1}|\log h|^{2(n-1)})$, wobei h die Maschenweite der Finite-Element-Diskretisierung und n die Raumdimension bezeichnet. Die Kompressionsmethoden beeinträchtigen weder die Konvergenz noch die Stabilität oder Glattheitsanforderungen der ursprünglichen Dünngitter-Diskretisierung ohne Kompression.

Um die behandelten Operatoren zu beschreiben, werden neue Klassen von anisotropen Symbolen eingeführt und einige ihrer analytischen Eigenschaften bewiesen (z.B. schwächere Glattheitsvoraussetzungen für Dünngitter-Konvergenz).

Die Motivation dieser Arbeit ist die Preisberechnung von Finanzderivaten in multidimensionalen Lévy-Modellen mit Finiten Elementen. Es wird bewiesen, dass die Generatoren von gewissen Lévy Copula Prozessen nicht-lokale Operatoren sind, die in unsere neuen Klassen von anisotropen Symbolen fallen. Im Allgemeinen sind diese Operatoren nicht in den bekannten Operatorklassen (wie z.B. denen von Hörmander) enthalten.

Summary

The subject of this thesis is the construction of sparse tensor product-based wavelet compression schemes for a wide class of non-local anisotropic operators. Using anisotropic tensor product wavelets, the schemes (asymptotically) reduce the complexity of the corresponding Finite Element stiffness matrix from originally $\mathcal{O}(h^{-2n})$ to essentially optimal $\mathcal{O}(h^{-1}|\log h|^{2(n-1)})$, where h denotes the meshwidth of the Finite Element discretization and n indicates the space dimension. The compression schemes do not corrupt the convergence, stability or smoothness requirements of the sparse tensor product scheme without compression.

To describe the operators under consideration, new classes of anisotropic symbols are introduced and some of their analytical properties (e.g. relaxed smoothness requirements for sparse tensor product convergence) are proved.

The work is motivated by Finite Element-based derivatives pricing in multi-dimensional Lévy models. It is proved that the infinitesimal generators of certain Lévy copula processes are non-local operators that in general do not fall in the classical operator classes of e.g. Hörmander-type, but are contained in our new classes of anisotropic symbols.