

Diss. ETH No. 17662

# Efficient Software Tools for Control and Analysis of Hybrid Systems

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY (ETH) ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

Michal Kvasnica  
ing., Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia  
born 20.6.1977  
citizen of Slovakia

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Manfred Morari, examiner  
Prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc., co-examiner

2008

# Abstract

This thesis deals with the topic of control and analysis of constrained dynamical systems.

Specifically, we consider the class of hybrid dynamical systems, i.e. systems which combine continuous dynamics with discrete logic. Such systems can efficiently describe the dynamical behavior of systems with on/off switches, gear shifts, or can be used to approximate nonlinearities by utilizing the concept of multiple linearizations.

It is well known that the task of deriving stabilizing controllers for dynamical systems subject to constraints on states and inputs can be attacked by utilizing the concept of *Receding Horizon Control* (RHC). In RHC, the sequence of manipulated variables is obtained by optimizing a given performance function subject to specified constraints. Subsequently, only the first input of that sequence is applied to the system. At the next time step, the state is measured again and the procedure is repeated. However, the computational complexity involved in solving each optimization problem significantly limits the minimal admissible sampling rate at which RHC can be applied on-line.

This problem has been alleviated to some degree by the recent introduction of *multi-parametric programming* to control theory. In this approach the given RHC optimization problem is solved off-line for all admissible initial conditions which satisfy system constraints. By solving the problem in a parametric fashion, the solution can be shown to take the form of a look-up table, which describes a piecewise affine state feedback law defined over a polyhedral partition. The on-line implementation of such feedback laws then reduces to a simple set-membership set, which can be performed very efficiently on-line, thus allowing to apply the concept of RHC to processes with fast dynamics. The main drawback of the multi-parametric technique, however, is the growing complexity of the look-up table as the problem size increases. One of the aims of this thesis is therefore to mitigate this problem.

Specifically, various schemes to speed up the calculation of the parametric solutions to RHC problems are presented in this thesis. A combination of reachability-based methods along with efficient polytope reduction techniques yields new computation algorithms which are substantially faster than other known schemes. Moreover, new algorithms are given which serve to speed up the task of finding a correct entry in the look-up table on-line.

Large part of this thesis is devoted to a description of the Multi-Parametric Toolbox (MPT), which is a novel software tool for modeling, control, and analysis of constrained dynamical systems. The main strong point of MPT is that it simplifies and automates many tasks a control engineer has to go through when designing and validating optimal control laws based on the RHC principle. The toolbox offers a broad spectrum of algorithms compiled in a user friendly and accessible format starting from different performance objectives (linear, quadratic, minimum-time) to the handling of systems with persistent additive and polytopic uncertainties. Users can add custom constraints, such as polytopic, contraction or collision avoidance constraints, or create custom objective functions. Resulting optimal control laws can either be embedded into target applications in the form of the C code, or deployed to control platforms using the Real Time Workshop.

The MPT toolbox contains all of the algorithms presented in this thesis as well as a wide range of additional algorithms and tools developed by the academic community.

# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse und Regelung dynamischer Systeme mit Beschränkungen.

Die untersuchte Systemklasse der hybriden Systeme zeichnet sich durch die Kombination kontinuierlicher Dynamik mit diskreter Logik aus. Diese Klasse eignet sich sowohl für eine effiziente Beschreibung schaltender, dynamischer System als auch zur Approximation nichtlinearer Systeme mit Hilfe einer stückweisen Linearisierung.

Die Berechnung stabilisierender Regelgesetze für solche dynamischen Systeme unter zusätzlichen Stell- und Zustandsbeschränkungen wird häufig mittels Optimierungsverfahren durchgeführt, wobei das Konzept *Receding Horizon Control* (RHC) zur Anwendung kommt. Hierbei wird, durch Prädiktion der Zustände und unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen, ein Gütefunktional minimiert, um eine optimale Stellgrössensequenz zu generieren. Von dieser Sequenz wird der erste Eingangsvektor auf das System gegeben. Im nächsten Zeitschritt initiiert die Messung des neuen Systemzustands eine neuerliche Optimierung. Die Komplexität dieser einzelnen Optimierungsprobleme limitiert massgeblich die maximal erreichbare Abtastrate der RHC.

Durch die Einführung der *multi-parametrischen Programmierung* in der Regelungstechnik konnte diese Grenze deutlich verschoben werden. Bei diesem neuartigen Ansatz wird das Optimierungsproblem der RHC offline, d.h. für alle möglichen Zustände des Systems, gelöst. Das Ergebnis ist eine parametrische Darstellung des optimalen Eingangs und des Gütefunktionswertes als Funktion dieser Anfangszustände. Es handelt sich dabei um eine stückweis-affine Funktion, deren Partitionierung durch lineare Ungleichungen beschrieben wird. Durch die effiziente Darstellung des Regelgesetzes in Form einer Look-up Tabelle reduziert sich die online Auswertung auf das Auffinden der aktiven Region des gemessenen Zustandes und das Auswerten eines affinen Regelungsgesetzes. Dies erlaubt die Anwendung der Modelprädiktiven RHC für Systeme, die eine hohe Abtastrate benötigen. Ein wesentlicher Nachteil dieser Technik ist die stark steigende Komplexität der Lösung bei wachsender Problemgrösse.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Problem zu entschärfen.

Es werden verschiedene Verfahren zur Beschleunigung der Lösungsberechnung für das RHC Problem vorgestellt. Dabei kommen eine Kombination aus Erreichbarkeitsmethoden und effizienten Verfahren zur Polytopreduktion zur Anwendung. Dies führt auf einen neuen, deutlich verbesserten Algorithmus, der eine schnellere Berechnung der Regelgesetze erlaubt. Darüber hinaus werden neue Algorithmen für das Auffinden der aktiven Region und damit das Auswerten der Look-up Tabelle präsentiert.

Ein grosser Teil der Arbeit befasst sich mit der Beschreibung der Multi-Parametrischen Toolbox (MPT), einem neuen Programm zur Modellierung, Regelung und Analyse dynamischer Systeme mit Stell- und Zustandsbeschränkungen. Die Stärke dieser Software ist eine deutlich vereinfachte und automatisierte Prozedur zum Entwurf optimaler Regelungen und dessen Validierung. Die Toolbox bietet ein breites Spektrum von benutzerfreundlichen Algorithmen angefangen bei der Unterstützung für verschiedene Gütefunktionale (linear, quadratisch, zeit-minimal, benutzerdefiniert), über die Berücksichtigung additiver und polytopischer Störungen bis hin zu verschiedenartigen Beschränkungen (polytopisch, kontrahierend oder kollisionsvermeidend).

Das berechnete, optimale Regelgesetz kann automatisch entweder in C-Code exportiert und auf die Zielplattform heruntergeladen werden, oder mittels Real-Time Workshop auf eine Regelungsplattform portiert werden.

Die MPT Toolbox enthält alle in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen, sowie eine Vielzahl weiterer Algorithmen und Werkzeuge, die weltweit an Universitäten entwickelt wurden.