ETH zürich

Research Collection

Doctoral Thesis

Prime tensor ideals in some triangulated categories of C*-algebras

Author(s):
Dell'Ambrogio, Ivo

Publication Date:
2008

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005711794

Rights / License:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection. For more information please consult the Terms of use.

ETH Library

Diss. ETH Nr. 17939

Prime tensor ideals in some triangulated categories of C*-algebras

a dissertation submitted to
ETH Zurich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

Ivo Dell'Ambrogio

Dipl. Math. ETH Zurich

born 3.3.1979

citizen of

Giubiasco (TI)

*

Paul Balmer, examiner

Max-Albert Knus, co-examiner

Henning Krause, co-examiner

Richard Pink, co-examiner

*

Zurich 2008

Abstract

The purpose of this thesis is to inaugurate the application of algebraico-geometric ideas, in the form of Paul Balmer's *tensor triangular geometry* [**Bal05**], to the study of such tensor triangulated categories as arise in relation to the topological K-theory of operator algebras. More precisely, we are interested in Balmer's spectrum Spc of the equivariant Kasparov category KK^G associated to a (second countable Hausdorff) locally compact group G.

Using work of Ralf Meyer and Ryszard Nest [**MN06**], we show (Theorem 4.3.7) that if the space $\mathrm{Spc}(\mathsf{KK}^G)$ is covered by the union $\bigcup_H \mathrm{Spc}(\mathsf{KK}^H)$, with H varying among the compact subgroups of G, then a strong form of the Baum-Connes conjecture (which is known to hold for all groups with the Haagerup property) holds for G.

As a first step towards understanding the spectrum of these tensor triangulated categories, we turn our attention to $\mathcal{T}^G := \langle \mathbb{1} \rangle_{\mathrm{loc}}$, the localizing subcategory of KK^G generated by the tensor unit $\mathbb{1} \in \mathcal{T}^G$. If $G = \{1\}$ is the trivial group, then $\mathcal{T}^G$ is better known as the Bootstrap category $\mathsf{Boot} \subseteq \mathsf{KK}$. We prove (Theorem 5.1.11) that the spectrum of its subcategory Boot_c of compact objects (i.e., separable C*-algebras in the Bootstrap class having finitely generated K-theory) is isomorphic to the Zariski spectrum of the integers: $\mathrm{Spc}(\mathsf{Boot}_c) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

We conjecture the analog result at least for finite groups, namely, that there is a homeomorphism $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}^G_c) \cong \mathrm{Spec}(R(G))$, where $R(G) = \mathrm{End}_{\mathcal{T}^G_c}(\mathbb{1})$ is the complex representation ring of the finite group G. In order to tackle this conjecture we first provide, speaking quite roughly, an abstract criterion (Theorem 2.5.2) for a 'continuous generalized support datum' (X, σ) of a certain nice form defined on a compactly generated tensor triangulated category $\mathcal{T}$, to be classifying for the subcategory $\mathcal{T}_c$ of compact objects, i.e. – equivalently – to provide a homeomorphism $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}_c) \cong X$.

In Section 5.4 we construct such a support $(\mathrm{Spec}(R(G)), \sigma)$ for $\mathcal{T}^G$ when G is finite, but we fail – for the moment – to show that it enjoys all the properties required by our criterion. We can use it though to show that the natural map $\rho : \mathrm{Spec}(\mathcal{T}^G_c) \to \mathrm{Spec}(R(G))$ is a retraction. Along the way to constructing σ we define, for G a compact Lie group and $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R(G))$, a '$\mathfrak{p}$-local' subcategory $\mathcal{T}^G_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{T}^G$, and we show that it enjoys several nice properties (see Theorem 5.2.1). Moreover, we use relative homological algebra [**MN07**] [**Mey08**] to prove (a new version of) N. Christopher Phillips's [**Phi85**] Künneth Theorem for certain important localized K-theory groups (see Theorem 5.3.11).

Riassunto

Scopo di questa tesi è l'introduzione di ragionamenti algebraico-geometrici, in quanto catturati dalla *geometria triangolare tensoriale* di Paul Balmer [**Bal05**], nello studio delle categorie triangolate tensoriali che sorgono in relazione alla K-teoria topologica delle algebre d'operatori. Più precisamente, ci interessiamo allo spettro di Balmer della categoria equivariante di Kasparov KK^G associata ad un gruppo localmente compatto G.

Grazie a risultati di Ralf Meyer e Ryszard Nest [**MN06**], ci è possibile dimostrare (Teorema 4.3.7) che se lo spazio $\mathrm{Spc}(\mathsf{KK}^G)$ è ricoperto dall'unione degli spazi $\mathrm{Spc}(\mathsf{KK}^H)$, dove H percorre i sottogruppi compatti di G, allora G soddisfa una versione forte della congettura di Baum-Connes (che comunque è valida almeno per tutti i gruppi con la proprietà di Haagerup).

Come primo passo verso una comprensione della spettro di tali categorie, ci concentriamo su $\mathcal{T}^G := \langle \mathbb{1} \rangle_{\mathrm{loc}}$, la sottocategoria localizzante di KK^G generata dall'unità tensoriale $\mathbb{1} \in \mathcal{T}^G$. Nel caso del gruppo banale $G = \{1\}$, la categoria $\mathcal{T}^G$ è meglio conosciuta sotto il nome di classe Bootstrap[1] $\mathsf{Boot} \subseteq \mathsf{KK}$. Dimostriamo quanto segue (Teorema 5.1.11): lo spettro di Balmer della sua sottocategoria Boot_c degli oggetti compatti (cioè le C*-algebre nella classe Bootstrap aventi gruppi di K-teoria di tipo finito) è isomorfo allo spettro di Zariski dell'anello degli interi: $\mathrm{Spc}(\mathsf{Boot}_c) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Ci sono buone ragioni per ritenere che l'analogo risultato sia valido almeno per i gruppi finiti. Congetturiamo quindi che esista un omeomorfismo $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}_c^G) \cong \mathrm{Spec}(R(G))$, dove $R(G) = \mathrm{End}_{\mathcal{T}_c^G}(\mathbb{1})$ denota l'anello delle rappresentazioni complesse del gruppo finito G. Per affrontare questa congettura, incominciamo col dare – in parole approssimative – un criterio astratto (Teorema 2.5.2) per decidere se un 'dato di supporto generalizzato e continuo' (X, σ) di una certa forma, definito su una categoria triangolata a generazione compatta $\mathcal{T}$, si restringa a un dato di supporto classificante per la sottocategoria $\mathcal{T}_c$ degli oggetti compatti; vale a dire, un criterio perché (X, σ) induca un omeomorfismo $\mathrm{Spc}(\mathcal{T}_c) \cong X$.

Nella Sezione 5.4 costruiamo un tale supporto $(\mathrm{Spec}(R(G), \sigma)$ per $\mathcal{T}^G$ con G un gruppo finito, senza riuscire però (per il momento) a dimostrare che goda di tutte le proprietà richieste dal criterio summenzionato. Si può comunque mostrare che la funzione naturale $\rho : \mathrm{Spc}(\mathcal{T}_c^G) \to \mathrm{Spec}(R(G))$ è una retrazione. Per costruire σ definiamo, se G è un gruppo di Lie compatto e $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $R(G)$, una "localizzazione a $\mathfrak{p}$" $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}^G \subseteq \mathcal{T}^G$ con numerose proprietà desiderabili (si veda il Teorema 5.2.1). Inoltre utilizziamo l'algebra omologica relativa di [**MN07**] e [**Mey08**] per dimostrare una nuova versione del teorema di Künneth, dovuto a N. Christopher Phillips [**Phi85**], riguardante certi gruppi di K-teoria localizzata (si veda il Teorema 5.3.11).

[1] mi rifiuto categoricamente di tradurre "classe Calzastivale"