High-order numerical modelling of highly conductive thin sheets

Author(s):
Schmidt, Kersten

Publication Date:
2008

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005750560

DISS. ETH NO. 17903

HIGH-ORDER NUMERICAL MODELLING OF HIGHLY CONDUCTIVE THIN SHEETS

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doktor of Sciences

presented by

KERSTEN SCHMIDT

Dipl. Ing., TU Ilmenau

born July 7, 1976

citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Ralf Hiptmair, examiner
Prof. Dr. Christoph Schwab, co-examiner
Dr. Sébastien Tordeux, co-examiner

2008

Summary

The subject of this thesis is the accurate modelling of electromagnetic fields in domains with thin conducting sheets. Such thin sheets with thicknesses much smaller than the longitudinal dimensions are widely used in engineering applications, like as casings or as layers for the shielding of electromagnetic fields. The direction application of the finite element method is challenging, since standard mesh generators do not create meshes for such structures or meshes which are adaptively refined in the vicinity of the sheet.

We investigate two approaches for the high-order approximation of the sheet by means of dimension reduction. In the first approach we replace the thin sheet by an interface and derive transmission conditions with of asymptotic expansions. These conditions at the interface approximate the physical behaviour of the thin conducting sheets with any order given that the sheets are arbitrarily smooth. In the second approach we approximate the solution inside the sheet by a tensor-product of function in thickness direction and functions in tangential direction. The integrals in thickness direction can be pre-computed and only integrals in tangential direction, *i. e.* on a face of lower dimension, remain. A finite element discretisation of this model resolves the sheet. The curvature is considered in both models to achieve the respective rate of consistency.

In this work we consider a model problem in two space dimensions, which includes the time harmonic eddy-current model. For the asymptotic analysis we class the problem for a sheet of a particular thickness in families of problems with varying thicknesses and conductivities which depend on the respective thickness. Families with different conductivity functionality $c(\varepsilon)$ have different limit problems for vanishing thickness, which define different limit solutions.

For the approach based on asymptotic expansion we choose a conductivity reciprocal to the thickness ε. Thus, neither the behaviour of the sheet vanishes for $\varepsilon \to 0$ nor the sheets gets perfectly conducting and consequently impenetrable. For this family of problems we expand the solution outside and inside the sheet with the thickness parameter ε. Thereby, we represent the external solution on the limit domain for vanishing ε, where the sheet is represented by its mid-line Γ_{m}, and the internal solution on a normalised domain which is independent of the thickness ε. Key components in the derivation of the models are the asymptotic expansions of the equations in the interior and the exterior of the sheet and the transformation of the Dirichlet and Neumann continuity conditions between the exterior and interior solution to transmission conditions on the mid-line of the sheet. The resulting models define the expansion functions iteratively and uniquely for arbitrary order if the sheet is smooth enough. We rigorously proof that the modelling error of the truncated expansions of order N approximate the exact solution in the exterior domain in different norms with $O(\varepsilon^{N+1})$. We show the same consistency rate for the power loss and the jump of the normal derivative, two indicators of the shielding behaviour. As the size of the sheet scales with ε the same consistency rates up to a factor $\varepsilon^{-1/2}$ or $\varepsilon^{1/2}$ holds in the interior of the sheet when measured in the H^1- or L^2-norm.

We derive models for the external expansion functions of order 0, 1 and 2, in which the transmission conditions on the mid-line Γ_{m} does not depend from the internal expansion functions any more, but only on the external functions of lower orders. Numerical experiments for straight, circular and ellipsoidal sheet verifies the sharpness of the a-priori estimates of the modelling error. For order 1 and 2 we derive models which define approximative solution for a particular thickness directly, *i. e.* not iteratively, which have the same consistency rates as the respective iteratively computed solutions. We show existence, uniqueness, and regularity for the two models, where the model of order 2 needs a conductivity with non-vanishing imaginary part. Numerical experiments for the model of order 1 for ellipsoidal sheets verifies the estimates of the modelling error.

For the derivation of the models based on basis functions in thickness direction we use general conductivity functionality $c(\varepsilon)$. We state the variational formulation with a tensor product of functions in lateral and longitudinal direction inside the sheet and show, that the overall error in the H^1-norm is bounded by the H^1 best approximation error of the problem inside the sheet with exact Dirichlet data

on the interfaces. We define a family of functions in thickness direction, and for straight sheets show an optimal modelling error for arbitrary order of the model independent of the choice of the conductivity function. Numerical simulations verifies the theoretically predicted rates of consistency, which excel the rates achieved by polynomial trial functions for conductivities increasing with decreasing ε. Furthermore, we derive a family of function considering the curvature of the sheet, and show numerically that they retain the consistency rates of the straight sheet. The numerical experiments show also that the functions considering the sheet curvature are only necessary for achieving the optimal rates of the modelling error from three basis functions on.

We performed numerical experiments for the asymptotic expansion models by means of high-order finite elements. In the last part of this thesis we describe the implementation of this models into the numerical C++ library Concepts. First of all for the computation of the exact model, where the thin sheets of thickness ε are resolved by cells of the mesh, but also for the discretisation of asymptotic expansion model the use of curved cells is important. We describe how we define such curved cells for given analytic edge parametrisation by means of blending techniques. In these cells and edges we define elements with polynomial trial functions of high-order. With the iterative computation of the asymptotic expansion function we use finite element solutions as formulas in linear forms. We introduce the concepts of such formulas in Concepts, and describe the formulas used for the asymptotic expansion models like the extension of a jump over the interface Γ_{m} or the mean value of the normal derivative. After describing the used bilinear and linear forms, the iteratively computed models of order 0, 1 and 2 and the collectively computed model of order 1 we show how we compute the modelling error in various norms and indicators. For this we represent the solution of the asymptotic expansion model given on the mesh of the external limit domain on the mesh on which we approximated the solution of the exact model. Then, the error indicators can be computed by integration on this mesh.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die akkurate Modellierung elektromagnetischer Felder in Gebieten mit dünnen, leitenden Schichten oder Blechen. In Ingenieuranwendungen kommen solche dünnen Schichten, deren Dicken viel kleiner sind als die Dimensionen in Längsrichtung, vielfach vor, z.B. als Gehäuse oder als Bleche zur Abschirmung von elektromagnetischen Feldern. Eine direkte Simulation mit der Finiten-Element-Methode ist schwierig, u.a. da Standardgittergeneratoren für solche Strukturen keine Gitter oder in der Nähe der Schicht stark adaptierte Gitter erzeugen.

Wir untersuchen zwei Ansätze zur hochgradigen Approximation solcher Schichten mittels Dimensionsreduktion. Im ersten Ansatz wird die Schicht durch eine Grenzfläche ersetzt, auf der Transmissionsbedingungen gestellt werden. Diese Bedingungen an der Grenzfläche, hergeleitet mit asymptotischen Entwicklungen, approximieren das physikalische Verhalten der dünnen, leitenden Schichten mit beliebig hoher Ordnung, sofern die Schicht genügend glatt ist. Im zweiten Ansatz nähern wir die Lösung innerhalb der Schicht durch ein Tensorprodukt von Funktionen in Dickenrichtung und solchen in tangentialer Richtung. Die vorkommenden Integrale in Dickenrichtung können vorberechnet werden und es verbleiben lediglich Integrale in Längsrichtung, d.h. auf einem Gebiet verminderter Dimension. Eine Finite-Element-Diskretisierung dieses Modells berücksichtigt die Ausdehnung der Schicht. In beiden Ansätzen wird die Krümmung der Schicht mit einbezogen, um die jeweilige Approximationsordnung zu erhalten.

In dieser Arbeit betrachten wir ein Modellproblem in zwei Raumdimensionen, das das zeitharmonische Wirbelstrommodell einschliesst. Für eine asymptotische Analyse wird das Problem für eine Schicht der Dicke ε in Familien von Problemen mit unterschiedlichen Schichtdicken und eine mit diesen variierenden Leitfähigkeit eingeordnet. Problemfamilien mit verschiedenen Leitfähigkeitsfunktionen $c(\varepsilon)$ besitzen unterschiedliche Grenzprobleme für verschwindend kleine Schichtdicken, die unterschiedliche Grenzlösungen definieren.

Für den Ansatz mit asymptotischen Entwicklungen wählen wir Leitfähigkeiten proportional zum reziproken Wert der Dicke ε, womit weder das Verhalten der Schicht für kleiner werdende Dicken ε verschwindet noch die Schicht im Limes zu einem perfekten Leiter und damit undurchdringbar wird. Für diese Familie von Problemen wird die Lösung ausserhalb und innerhalb der dünnen Schicht nach dem Dickenparameter ε entwickelt. Dabei wird die externe Lösung auf dem äusseren "Grenzgebiet" für das Limes $\varepsilon \to 0$, in dem die Schicht durch ihre Mittellinie Γ_{m} repräsentiert wird, und die interne Lösung in einem von der Dicke unabhängigen Gebiet dargestellt. Wichtige Bestandteile in der Herleitung des Modells ist die asymptotische Entwicklung der Gleichung innerhalb und ausserhalb der Schicht und das Überführen der Dirichlet- und Neumann-Stetigkeitsbedingungen zwischen der externen und internen Lösung in Transmissionbedingungen auf der Mittellinie der Schicht. Die resultierenden Modelle definieren die Entwicklungsfunktionen rekursiv und eindeutig für beliebige Ordnung, sofern die Schicht genügend glatt ist. Wir weisen nach, dass die abgeschnittenen Entwicklungen der Ordnung N die exakte Lösung im äusseren Gebiet in verschiedenen Normen mit einem Fehler $O(\varepsilon^{N+1})$ approximieren. Wir zeigen dieselbe Konsistenzraten für die Verlustleistung und den Sprung der Normalenableitung, zwei für die Abschirmung charakteristischen Indikatoren. Da die Grö sse der Schicht mit ε skaliert, gelten diese Fehlerordnungen für die Lösung im Innern der Schicht bis auf einen Faktor $\varepsilon^{-1/2}$ oder $\varepsilon^{1/2}$, wenn der Fehler in der H^1-Norm bzw. L^2-Norm gemessen wird. Für die Ordnungen 0, 1 und 2 leiten wir Modelle für die externen Entwicklungsfunktionen her, deren Transmissionsbedingungen an der Grenzfläche Γ_{m} nicht mehr von den internen Entwicklungsfunktionen, sondern nur noch von den externen Funktionen niederer Ordnung abhängen. Numerische Experimente für eine gerade, kreisförmige und ellipsenförmige Schicht bestätigen, dass die a-priori Abschätzungen für den Modellierungsfehler scharf sind. Für Ordnung 1 und 2 leiten wir Modelle her, die für eine bestimmte Dicke ε direkt, d.h. nicht rekursiv, eine Näherungslösung definieren, die dieselben Konsistenzraten wie die rekursiv berechneten Lösungen besitzen. Wir zeigen Existenz, Eindeutigkeit und Regularität für die beiden Modelle, wobei für die Ordnung 2 die Leitfähigkeit einen Imaginärteil besitzen muss. Numerische Experimente für das Modell erster Ordnung für eine ellipsenförmige Schicht bestätigen die Abschätzungen.

Für den Ansatz mit Basisfunktionen in Dickenrichtung der Schicht leiten wir Modelle für allgemeine Leitfähigkeitsfunktionen $c(\varepsilon)$ her. Wir stellen eine variationelle Formulierung mit einem Tensorproduktansatz in der Schicht her und zeigen, dass der Gesamtfehler in der H^1-Norm durch den H^1-Bestapproximationsfehler des Problems in der Schicht mit exakten Dirichlet-Daten an den Oberflächen begrenzt wird. Wir definieren eine Familie von Funktionen in Dickenrichtung und zeigen für gerade Schichten die Optimalität des Modellierungsfehlers für beliebige Ordnung unabhängig von der Wahl der Leitfähigkeitsasymptotik. Numerische Simulationen bestätigen die theoretisch vorhersagten Fehlerraten, die die Fehlerraten von polynomialen Ansatzfunktionen für ε-abhängige Leitfähigkeiten wesentlich üebertreffen. Desweiteren leiten wir eine Familie von Funktionen her, die die Krümmung der Schicht berücksichtigen und zeigen numerisch, dass sie die Fehlerraten für die gerade Schicht erreichen. Die numerischen Experimente zeigen weiterhin, dass zum Erhalten der optimalen Fehlerrate die krümmungsangepassten Basisfunktionen erst ab drei Funktionen nötig sind.

Für die asymptotischen Modelle der Ordnung 0, 1 und 2 wurden numerische Experimente mit der Finite-Element-Methode hoher Ordnung durchgeführt. Im letzten Teil dieser Dissertationsschrift beschreiben wir die Implementation der Modelle in die numerische C++-Bibliothek Concepts. Vor allem für die Vergleichsrechnungen, bei denen wir die Schicht der Dicke ε mit Zellen auflösen, aber auch für die Diskretisierung der asymptotischen Modelle spielt die Verwendung von krummlinigen Zellen eine grosse Rolle. Wir beschreiben, wie aus analytischen Kantenparametrisierungen mit der Blendingtechnik krummlinige Zellen definiert werden. Auf diesen Zellen und den krummlinigen Kanten werden Elemente mit Polynomansatzfunktionen hoher Ordnung definiert. Durch die rekursive Definition der asymptotischen Modelle werden Finite-Element-Lösungen in Linearformen als Formeln benutzt. Wir geben einen Überblick über die Behandlung solcher Formeln in Concepts, und beschreiben die konkret benutzten Formeln, wie die Erweiterung des Sprungs über die Grenzfläche Γ_m oder den Mittelwert der Normalenableitung. Nach der Beschreibung der benutzten Bi- und Linearformen, der rekursiven Modelle der Ordnungen 0, 1 und 2 und des kollektiv berechneten Modells der Ordnung 1, zeigen wir, wie wir den Modellierungsfehler in verschiedenen Normen und Indikatoren berechnen. Dazu wird die Lösung der asymptotischen Entwicklungen, die auf einem Gitter im äusseren "Grenzgebiet" gegeben ist, auf dem Gitter, auf dem die exakte Lösung approximiert wurde, dargestellt. Die Fehlerindikatoren können dann durch Integration auf diesem Gitter berechnet werden.