

# Wave-packet approach to full counting statistics

**Doctoral Thesis**

**Author(s):**

Hassler, Fabian

**Publication date:**

2009

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005779848>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

DISS. ETH NO. 18218

# Wave-Packet Approach to Full Counting Statistics

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

Fabian Hassler

Dipl. Phys. ETH

born September 30, 1980

citizen of

Liechtenstein

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. J. W. Blatter, examiner

Prof. Dr. G. B. Lesovik, co-examiner

2009

# Abstract

Traditionally, (charge) transport phenomena describe the average current flow in response to a constant applied driving force. Additional information is provided by current-current correlations or noise, telling about the granularity, the statistical properties, and the interactions between the particles. The complete characterization of transport is given by the full counting statistics, quantifying the probability that  $n$  particles pass the device during a time window  $t$ . The desire for a complete characterization of transport in a mesoscopic device goes together with the development of new single-particle sources and the availability of quantum bits as measurement devices. In this thesis, we will describe how to combine these three elements, full counting statistics, single-particle sources, and qubit measurement devices and how these concepts relate to the description of charge transport of noninteracting electrons in a mesoscopic device.

In the work on full counting statistics, we develop a new wave-packet formalism that provides access to an entire class of interesting results. The wave-packet formalism is derived from an insight regarding the equivalence between the fidelity of a quantum system and the generating function of full counting statistics; furthermore, we show how qubits can be used to measure both quantities, fidelity and full counting statistics, exploiting the induced ‘decoherence’ as a signal; thereby, we transfer the measurement of the fidelity and of the full counting statistics from the realm of a ‘Gedanken’ experiment to a practical proposal realizable with today’s qubit technology.

Subsequently, we study the full counting statistics for the transmission of two identical particles with positive or negative symmetry under exchange, for the situation where the scattering depends on energy. We make use of our first-quantized wave-packet formalism and find interesting results. While it is expected that the noise as well as higher-order correlators will be sensitive to the exchange symmetry, we find the astounding result that exchange can hugely enhance (or suppress) the *average charge* already. The effect is a consequence of the symmetry-induced reshuffling of weight in the momentum distribution of the

two-particle wave function, combined with the energy dependence of the scattering matrix: the anti-symmetry under exchange moves weight away from the (Pauli-blocked) diagonal, which typically leads to an enhancement in the scattering channel transmitting one particle at the expense of the channel where both particles are reflected, resulting in an enhanced transport. Applying voltage *pulses* in the incoming lead and injecting individual particles then produces a nonlinear transport due to exchange effects; i.e., a twice larger voltage pulse does not double the transmitted charge and hence the average current is sensitive to the exchange symmetry. A corresponding, although smaller, effect is found in a four-lead geometry even for energy-independent scattering.

Finally, we attempt to exploit the full potential behind the wave-packet formalism of full counting statistics. We derive a simple expression in determinant form for the characteristic function  $\chi_N(\lambda)$  of  $N$  nonentangled fermions transmitted across an energy-dependent scatterer and find a generalized binomial distribution; the coefficients appearing in the characteristic function can be found by solving a generalized eigenvalue problem involving the transmission matrix and the overlap matrix of the  $N$  wave packets. For  $N = 2$ , utilizing the minimum–maximum property of eigenvalues of a bilinear form, we present the generic statistical properties of all two-fermion scattering processes and find, among other features, sub-binomial statistics for nonentangled incoming states (Slater rank 1), while entangled states (Slater rank 2) may generate super-binomial (and even super-Poissonian) noise. We use this feature in the design of a spin singlet-triplet detector, a device similar to the one proposed previously by Burkard, Loss, and Sukhorukov (2000) but with the four-lead scatterer replaced by a two lead setup with an energy dependent scattering matrix. We then generalize the determinantal expression for the generating function to various cases, to a time-dependent scatterer or counting interval, as well as to a statistical distribution of different numbers of incoming particles. Finally, we rederive and generalize the result of Levitov und Lesovik (1993) for the constant voltage  $V$  situation which allows us to determine the full counting statistics of the constant-voltage driven system at small measuring times  $t$ .

In summary, with this work, we provide a first-quantized formalism of full counting statistics which is particularly suited to describe a stream of individual electron generated by pulsed voltage, demonstrate how qubits can be used for its measurement, apply the formalism to various setups, in particular, to energy-dependent scattering, and provide a new regularization scheme to describe the constant voltage case.

# Kurzfassung

Traditionellerweise wird beim Studium von (Ladungs-) Transportphänomenen der mittlere Strom als Antwort auf einen konstanten Treiber untersucht. Der Strom-Strom-Korrelator, auch Rauschen genannt, liefert zusätzliche Information, welche über die Granularität, die statistischen Eigenschaften und die Wechselwirkung der Teilchen Auskunft gibt. Die vollständige Beschreibung des Transports ist durch die “Full Counting Statistics” (FCS) gegeben, welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür angibt, dass innerhalb eines Zeitraums  $t$   $n$  Teilchen transferiert werden. Der Wunsch nach einer kompletten Beschreibung des Transports in einer mesoskopischen Struktur geht einher mit der Entwicklung neuer Einteilchenquellen und der Verfügbarkeit von Quantenbits, die man als Messinstrumente einsetzen kann. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, wie man die drei Elemente, FCS, Einteilchenquelle und Messinstrument, kombinieren kann und in welchem Zusammenhang diese Konzepte mit dem Ladungstranport nichtwechselwirkender Elektronen durch eine mesoskopische Apparatur stehen.

Wir entwickeln zuerst einen neuen Wellenpaketformalismus, welcher es uns ermöglicht, eine Reihe interessanter Ergebnisse zu erhalten. Der Wellenpaketformalismus wird aus der Erkenntnis hergeleitet, dass die Treue (“fidelity”) eines Quantensystems und die generierende Funktion der FCS die gleiche Form aufweisen. Ausserdem zeigen wir, dass man Quantenbits verwenden kann, um beide Grössen, Treue und FCS, zu messen, wobei die induzierte ‘Dekohärenz’ als Messsignal benutzt wird. Entsprechend finden wir, dass die Treue eines Quantensystems nicht nur eine abstrakt theoretische Bedeutung hat, sondern experimentell mit heute vorhandenen Quantenbits gemessen werden kann.

Anschliessend untersuchen wir die FCS für den Transport zweier identischer Teilchen mit positiver beziehungsweise negativer Austauschsymmetrie, wobei wir annehmen, dass die Durchlässigkeit des Quantendrahtes von der Energie des einfallenden Teilchens abhängt. Dazu benutzen wir den Wellenpaketformalismus und erhalten interessante Resultate: während man erwartet, dass das Rauschen und Korrelatoren höherer Ordnung von der Austauschsymmetrie abhängen, fin-

den wir das verblüffende Ergebnis, dass schon der gemittelte Ladungstransfer sensitiv von der Austauschsymmetrie abhängt. Dieser Effekt tritt dadurch auf, dass die (Anti-) Symmetrisierung zu einer neuen Impulsverteilung in der Zweiteilchenwellenfunktion führt, welche zusammen mit der energieabhängigen Transferwahrscheinlichkeit den Ladungstransport verändert. Wenn ein elektronisches, eindimensionales Quantensystem mit gepulsten Spannungen getrieben wird, führt die Austauschsymmetrie zu einer Nichtlinearität in den Transporteigenschaften, d. h. ein doppelt so grosser Spannungspuls treibt nicht doppelt so viele Ladung durch den Draht.

Zuletzt versuchen wir das vollständige Potential des Wellenpaketformalismus zu nutzen. Wir leiten einen einfachen Ausdruck in Form einer Determinante für die charakteristische Funktion  $\chi_N(\lambda)$  der FCS her, welche den Transport  $N$  unverschränkter, nichtwechselwirkender Fermionen beschreibt. Die Statistik der transferierten Teilchen ist durch eine verallgemeinerte binomische Statistik gegeben, deren Koeffizienten durch die Lösungen eines verallgemeinerten Eigenwertproblems gefunden werden können. Wir bestimmen die allgemeinen statistischen Eigenschaften des Transports von zwei Fermionen indem wir das Minimum-Maximumprinzip der Eigenwerte einer bilinearen Form ausnutzen. Wir finden, unter Anderem, dass das Rauschen unverschränkter Teilchen unterhalb des Wertes einer binomischen Verteilung liegt, während das Rauschen verschränkter Teilchen einen beliebigen Wert annehmen kann. Diese Eigenschaft kann dazu benutzt werden, einen Spin-Singulett/Spin-Triplett Detektor zu bauen. Wir verallgemeinern zudem die Determinantenformel, so dass auch zeitabhängige Streuvorgänge oder einfallende Teilchen in statistischen Mischungen beschrieben werden. Schliesslich leiten wir das Resultat von Levitov und Lesovik (1993) für eine konstante, äussere Spannung erneut her und verallgemeinern es auf energieabhängige Transferwahrscheinlichkeiten und für kurze Messzeiten.

Zusammenfassend entwickeln wir in dieser Arbeit einen neuen erstquantisierten Formalismus der FCS, der speziell dazu geeignet ist, einen Strom von einzelnen Elektronen zu beschreiben, welche zum Beispiel durch gepulste Spannungen erzeugt werden können. Wir zeigen, wie man Quantenbits benutzen kann, die FCS zu messen, wenden den Formalismus auf verschiedene Probleme an, insbesondere auf einen Quantendraht mit einer energieabhängigen Transferwahrscheinlichkeit, und führen eine neue Regularisierungsmethode für den stationären Fall (mit konstanter Spannung) ein.