The Yang-Mills gradient flow and loop groups

Author(s):
Swoboda, Jan

Publication Date:
2009

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005813591

DISS. ETH NO. 18 296

THE YANG-MILLS GRADIENT FLOW AND LOOP GROUPS

A dissertation submitted to the

ETH ZÜRICH

for the degree of

DOCTOR OF SCIENCE

presented by

JAN SWOBODA

Dipl.-Math. (Universität Würzburg)

born April 2, 1979

in Miltenberg, Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Dietmar A. Salamon, examiner

Prof. Dr. Michael Struwe, co-examiner

Prof. Dr. Matthias Schwarz, co-examiner

2009

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation betrachten wir den Yang-Mills Gradientenfluß

$$\frac{\partial A}{\partial s} + d_A^* F_A = 0$$

auf dem Raum $\mathcal{A}$ der Zusammenhänge über der Sphäre $\Sigma = S^2$ mit Werten in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ unter dem Gesichtspunkt der äquivarianten Morse-Theorie.

Als Hauptresultat konstruieren wir einen Isomorphismus zwischen den G-äquivarianten Morse-Homologien des Raumes $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ von Eichäquivalenzklassen von Zusammenhängen einerseits, und des Raumes ΩG von basierten Schleifen in der Eichgruppe G andererseits.

Hierbei verfolgen wir einen ausschließlich analytischen Zugang. In diesem verbinden wir in geeigneter Weise den Raum der Lösungen endlicher Energie des Yang-Mills Gradientenflusses auf dem negativen Zeitintervall $\mathbb{R}^-$ mit den Lösungen des Schleifengruppen-Gradientenflusses

$$\frac{\partial g}{\partial s} - \nabla_t \partial_t g = 0$$

auf dem positiven Zeitintervall $\mathbb{R}^+$ in einem sogenannten *hybriden Modulraum* $\mathcal{M}(A^-, g^+)$. Beide Gradientenflüsse stehen miteinander über eine sogenannte Kopplungsbedingung in Beziehung. Diese erfordert, daß die Schleife $g(0)$ dem Bild des Zusammenhangs $A(0)$ unter sogenannter *radialer Trivialisierung* entspricht.

Im Falle der Gleichheit der Morse-Indices beider kritischer Punkte A^- und g^+ zeigt es sich, daß der Modulraum $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ die Dimension null besitzt. Das Abzählen seiner Elemente führt auf eine Kettenabbildung Θ zwischen den äquivarianten Morse-Komplexen, die erzeugt werden vom Yang-Mills Funktional $\mathcal{YM} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ und dem Energiefunktional $\mathcal{E} : \Omega G \to \mathbb{R}$ auf der Schleifengruppe. Die Abbildung Θ ist hierbei so konstruiert, daß deren Invertierbarkeit direkt aus einer sogenannten Energieungleichung, die aus der radialen Trivialisierung resultiert, gefolgert werden kann.

Die Analyse dieses Modulraumproblems erfordert die Entwicklung einer Fredholm-Theorie welche die beiden Gradientenflüsse in einem nichtlokalen Randwertproblem miteinander in Beziehung setzt. Hiermit befassen wir uns im ersten Teil der Arbeit.

Im anschließenden Teil der Dissertation zeigen wir die Kompaktheit des Modulraums $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ bis auf Konvergenz zu sogenannten gebrochenen Trajektorien. Daran schließt sich eine Diskussion des asymptotischen Verhaltens des Yang-Mills Gradientenflusses für Zeiten $s \to \pm\infty$ an. Diese Ergebnisse ermöglichen es, eine sogenannte Verklebungsabbildung für die Randstrata des Modulraums $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ zu definieren. Ferner wird das Problem der Transversalität des den Modulraum $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ definierenden Bündelschnitts behandelt. Hier zeigt sich einerseits, daß in bestimmten, für die Konstruktion der Kettenabbildung Θ relevanten Fällen, Transversalität automatisch gegeben ist. In den übrigen Fällen kann diese Frage zurückgeführt werden auf die Frage der Surjektivität des linearisierten Yang-Mills Gradientenflusses unter generischen Störungen der Holonomie. Dieses Problem konnte nicht mehr abschließend behandelt werden.

In Kombination der einzelnen Teilschritte erweist sich schließlich der Modulraum $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ als eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Im abschließenden Teil der Arbeit weisen wir mittels dieses Resultats nach, daß es sich bei der Abbildung Θ in der Tat um einen Kettenhomomorphismus handelt. Die Dissertation endet mit einem Beweis einer Vermutung von Atiyah über die Isomorphie der äquivarianten Morse-Homologien der Räume $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ und ΩG.

Abstract

In this dissertation we study the Yang-Mills gradient flow

$$\frac{\partial A}{\partial s} + d_A^* F_A = 0$$

on the space $\mathcal{A}$ of Lie algebra valued connections over the sphere $\Sigma = S^2$ from the point of view of equivariant Morse theory.

Our main result is to establish an isomorphism between the G-equivariant Morse homology of the space $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ of gauge equivalence classes of connections on the one hand, and the space ΩG of based loops in the gauge group G on the other.

Our approach is purely analytic in nature. It combines in a suitable way the space of finite energy trajectories of the Yang-Mills gradient flow on the time interval $\mathbb{R}^-$ with solutions of the loop group gradient flow

$$\frac{\partial g}{\partial s} - \nabla_t \partial_t g = 0$$

on the time interval $\mathbb{R}^+$ in a so-called *hybrid moduli space* $\mathcal{M}(A^-, g^+)$. Those two gradient flows are linked to each other via a coupling condition which requires the loop $g(0)$ to coincide with the loop obtained from $A(0)$ by a process which we call *radial trivialization*.

In the case where the Morse indices of the critical points A^- and g^+ coincide, the moduli space $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ turns out to be zero dimensional. A count of the number of its elements then gives rise to a chain map Θ between the equivariant Morse complexes generated by the Yang-Mills functional $\mathcal{YM} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ and the energy functional $\mathcal{E} : \Omega G \to \mathbb{R}$. The map Θ is constructed in such a way that its invertibility can be proved directly from an energy inequality related to radial trivialization.

The analysis of this moduli space problem requires to develop a Fredholm theory which combines both gradient flows in a nonlocal boundary value problem. This is accomblished in the first main part of the dissertation.

A subsequent part of the dissertation entails a proof of compactness of the moduli space $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ up to so-called convergence to broken trajectories. Then follows a discussion of the asymptotic behaviour of the Yang-Mills gradient flow for time $s \to -\infty$. With this result at hand it is possible to

construct a gluing map for the boundary strata of $\mathcal{M}(A^-, g^+)$. We moreover treat the problem of transversality of the bundle section defining the moduli space $\mathcal{M}(A^-, g^+)$. Here we find that, on the one hand, in certain for the definition of the chain map Θ relevant cases transversality automatically holds. In the remaining cases this question can be traced back to the question of surjectivity of the linearized Yang-Mills gradient flow under generic holonomy perturbations. This problem is not finally settled so far.

The single steps are then combined to prove that $\mathcal{M}(A^-, g^+)$ carries the structure of a finite dimensional manifold with boundary. Using this result we are finally able to conclude that the map Θ is indeed a chain homomorphism. The dissertation ends with a proof of a conjecture by Atiyah relating the equivariant Morse homology of the space $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ of gauge equivalence classes of connections to that of the loop group ΩG.