

# Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte

**Educational Material**

**Author(s):**

Hauser, Rainer

**Publication date:**

2009

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005872142>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Mentorierte Arbeit in *Fachwissenschaftlicher Vertiefung* mit *pädagogischem Fokus* in Mathematik

zur

## Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte

von

Dr. Rainer Hauser

### **Inhalt**

Ziel dieser Arbeit ist, einen Eindruck davon zu vermitteln, wie die Flugbahn einer Raumsonde entworfen werden kann. Werkzeuge, um Flugbahnen aus Stücken von Kegelschnitten zusammenzusetzen, werden vorgestellt.

### **Zielpublikum**

Lehrpersonen in Mathematik oder Physik sowie Bachelorstudierende ab dem dritten Semester in Mathematik oder Physik

### **Voraussetzungen**

Gute Kenntnisse der Vektorrechnung (mit Kosinussatz) und der Kegelschnitte (speziell der Ellipsen) sowie Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung werden vorausgesetzt. Auch ein Grundverständnis für die Physik (Mechanik, Gravitation und Erhaltungssätze) ist von Nutzen.

### **Form**

Lesetext mit Aufgaben und Lösungen

### **Betreuung**

PD Dr. Daniel Stoffer

### **Datum**

9. August 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Historische Betrachtungen . . . . .	3
1.2	Flugbahnmechanik . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Keplergesetze</b>	<b>7</b>
2.1	Die Ellipse . . . . .	7
2.2	Keplerbahnen . . . . .	9
2.3	Die Vis-Viva-Gleichung . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Einflussbereich der Gravitation eines Himmelskörpers</b>	<b>12</b>
3.1	Erster Versuch einer Definition . . . . .	12
3.2	Gestörte relative Bewegung zweier Himmelskörper . . . . .	13
3.3	Definition des Einflussbereichs . . . . .	14
3.4	Ungefähre Form des Einflussbereichs . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Hohmann-Übergänge</b>	<b>16</b>
4.1	Schubstoss als Delta-Distribution . . . . .	17
4.2	Hohmann-Bahnen . . . . .	18
4.3	Treibstoffverbrauch . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Zusammengesetzte Kegelschnitte</b>	<b>23</b>
5.1	Verallgemeinerungen der Hohmann-Bahnen . . . . .	24
5.2	Der Einfluss der Planetenmassen . . . . .	25
5.3	Hohmann-Bahnen unter Berücksichtigung der Planetenmassen . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Gravitationskick</b>	<b>28</b>
6.1	Vereinfachte Darstellung . . . . .	28
6.2	Prinzip des Gravitationskicks . . . . .	29
6.3	Nutzung des Gravitationskicks . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>31</b>
7.1	Übersicht über die Methode . . . . .	31
7.2	Aspekte des gymnasialen Unterrichts . . . . .	33
	<b>Literatur</b>	<b>35</b>
	<b>Lösungen</b>	<b>36</b>

# 1 Einleitung

Ein erstaunlich grosser Teil der theoretischen und praktischen Vorarbeiten für die Raumfahrt ist geleistet worden, lange bevor man realistischerweise annehmen konnte, dass bemannte Flüge ins Weltall und zu anderen Himmelskörpern möglich sind. Neben wichtigen Überlegungen zum geeigneten Raketenantrieb, um der irdischen Schwerkraft zu entkommen, gab es auch präzise, wissenschaftliche Berechnungen von möglichen Flugbahnen zu benachbarten Planeten in unserem Sonnensystem, die bis heute in der Flugbahnmechanik eingesetzt werden.

## 1.1 Historische Betrachtungen

In den 20er-Jahren des letzten Jahrhunderts erschienen im gleichen Verlag kurz hintereinander drei Werke, die sich mit verschiedenen Aspekten der Raumfahrt beschäftigten. Das erste Buch [8] stammt von Hermann Oberth, der später wesentlich an der Entwicklung der V2-Raketen beteiligt war. Das 1923 publizierte Werk beschäftigt sich vorwiegend mit Raketen, die sich für die Fahrt in den Weltraum eignen. Ein Jahr später publizierte Max Valier sein bedeutend weniger wissenschaftliches, dafür umso enthusiastischeres Buch [14], das gerade deshalb eine breite Öffentlichkeit für die Raumfahrt begeisterte. Wieder ein Jahr später erschien die streng mathematische Arbeit [5] von Walter Hohmann, in der die Loslösung von der Erde, die Rückkehr zur Erde, die freie Fahrt im Raume, die Umfahrung anderer Himmelskörper und Landung auf anderen Himmelskörpern systematisch analysiert und berechnet werden. Die Abbildung 1.1 zeigt ein Portrait des Ingenieurs.



Abbildung 1.1: Walter Hohmann.

Diese drei Herren waren aber nicht die einzigen Menschen, die sich ernsthaft mit der Raumfahrt beschäftigten. Der russische Mathematiker Konstantin Eduardowitsch Ziolkowsky veröffentlichte bereits 1895 technisch fundierte Gedanken darüber, und sein grundlegendes Buch über die Rakete erschien 1927. Auch der amerikanische Physiker Robert Hutchings Goddard arbeitete an diesem Thema und beschäftigte sich erst mit Feststoff- und später mit Flüssigkeitsraketen, was 1926 zum Start der ersten Flüssigkeitsrakete führte.

Obwohl diese fünf Pioniere sehr engagiert theoretisch und praktisch zum späteren Erfolg der Raumfahrt beitrugen, und obwohl es vom Zeitpunkt der Veröffentlichung ihrer Werke an nur noch etwa 30 Jahre dauerte, bis Sputnik 1957 für 92 Tage die Erde umkreiste, erlebte von ihnen nur Hermann Oberth, der 1989 in hohem Alter verstarb, diesen Moment. Gemäss Wikipedia wurde Max Valier als jüngster der fünf Männer das erste Opfer der Raketentechnik und kam 1930

durch eine Explosion bei einem Raketenprobelauf um. Der 1857 geborene Ziolkowsky lebte bis 1935, während Hohmann und Goddard, beide anfangs der 80er-Jahre geboren, 1945 verstarben.

Auch wenn die meisten von ihnen es selber nicht mehr erlebten, waren sie überzeugt davon, dass bemannte Flüge ins Weltall in absehbarer Zeit technisch machbar sein werden. Hohmann etwa beginnt das Vorwort von [5] mit den deutlichen Worten:

Die vorliegende Arbeit will durch nüchterne rechnerische Verfolgung aller scheinbar im Wege stehenden naturgesetzlichen und Vorstellungsschwierigkeiten zu der Erkenntnis beitragen, dass das Raumfahrtproblem durchaus ernst zu nehmen ist, und dass bei zielbewusster Vervollkommnung der bereits vorhandenen technischen Möglichkeiten an seiner schliesslichen erfolgreichen Lösung gar nicht mehr gezweifelt werden kann.

Die Zeitgenossen waren jedoch nicht immer überzeugt und brachten teils wenig wissenschaftliche Argumente gegen die Raumfahrt vor. So wurde Oberth in Besprechungen seines Buches entgegeng gehalten, “seine Raketenmaschinen könnten im luftleeren Weltenraume ihre Wirksamkeit nicht entfalten, da die Auspuffgase alsdann keinen Rückhalt mehr fänden” [14, p. 7]. Derselbe Trugschluss wie auch die Behauptung, “die Treibstoffe könnten nicht einmal ihr eigenes Gewicht aus dem Schwerebereich der Erde herausheben” [9, p. 31] wurde auch später noch vorgebracht. Die grosse Mehrheit der wissenschaftlich denkenden Bevölkerung jener Zeit ignorierte die Raumfahrt und überliess das Gebiet den Phantasten, die den Roman *Von der Erde zum Mond* von Jules Verne genauso begeistert verschlangen wie das mehr pseudowissenschaftlich als wissenschaftlich zu nennende Buch von Max Valier, in dem denn auch Fehler bei Jules Verne wie das Geniessen einer Flasche Wein in der Schwerelosigkeit [14, p. 79] mit demselben Ernst und derselben blumig ausschweifenden Sprache behandelt werden wie das Reisen “mit der Schnelle des flinksten Boten, der das Sternenall durchstürmt” (also mit Lichtgeschwindigkeit) und der dabei erfahrenen Wirkung des Doppler-Effektes [14, p. 92-94].

Trotzdem gab es auch ernsthafte, positive Stimmen in der Presse, wie die auf der hintersten Seite von [14] zitierte Besprechung des Buches [8] von Oberth in der technischen Beilage der Deutschen Allgemeinen Zeitung zeigt:

Oberth erörtert mit deutscher Gründlichkeit alle Seiten des Problems, durch raketenartig betriebene Flugkörper Messinstrumente und auch Menschen in grösste Höhen – sogar über das Schwerefeld der Erde hinaus – zu tragen. Er begnügt sich nicht mit leicht hingeworfenen Anregungen, die von der Öffentlichkeit teils staunend gläubig, teils spottend zweifelnd aufgenommen werden würden und nach einigen Wochen wieder vergessen wären, sondern er wendet sich an die technische Fachwelt. Mit dem ganzen Rüstzeug der technischen Mechanik und höheren Mathematik untersucht Oberth die Beziehungen zwischen Zeit, Masse, Kraft, Weg, Luftdruck und günstigster Geschwindigkeit, er berechnet den Treibapparat und die Ausströmungsgeschwindigkeit, untersucht die Verhältnisse während des freien Fluges und die Grösse der Beschleunigungskräfte. Die Diskussion der rechnerischen Ergebnisse führt sodann zu gründlich durchdachten technischen Entwürfen, gegen die vom Standpunkte des Technikers keine grundsätzlichen Einwände zu machen sind.

Ziolkowsky, nach dem die bekannte, etwa bei Messerschmid und Fasoulas [6, p. 37-40] besprochene Raketengleichung zur Berechnung des Antriebsvermögens einer Rakete benannt ist, Goddard, der erste erfolgreiche Tests mit Flüssigkeitsraketen durchführte, Valier, der sein Leben in Autos mit Pulverraketenantrieb aufs Spiel setzte, und Oberth, der den Raketenantrieb theoretisch

untersuchte, beschäftigten sich von verschiedenen Seiten mit Raketen. Die Überwindung der irdischen Schwerkraft mit Fluggeräten, die eine stabile, im Voraus festgelegte Flugbahn einhalten können, war das eine grosse Problem der Raumfahrt.

Hohmann, nach dem ein in jedem Lehrbuch der Flugbahnmechanik wie beispielsweise Messerschmid und Fasoulas [6, p. 121-125] beschriebenes Manöver benannt ist, das auch heute noch wichtig ist, und das von uns im Folgenden besprochenen wird, hat jedoch mehr an der Mechanik der Flugbahnen, dem zweiten grossen Problem der Raumfahrt, gearbeitet und unter anderem eine mögliche Flugbahn zur Venus entworfen [5, p. 65]. Auch für die Rückkehr zur Erde hat er exakte Berechnungen durchgeführt, wobei er erst den Fall mit fünf Bremsellipsen zur Reduktion der Geschwindigkeit in der Erdatmosphäre [5, p. 18-24], und anschliessend den Fall ohne Bremsellipsen [5, p. 34-37] untersuchte.

Auf diese Weise sind die Voraussetzungen dafür geschaffen worden, dass 1957 Sputnik als erster Satellit die Erde umkreisen, dass Juri Gagarin als erster Mensch aus einer Erdumlaufbahn wieder zur Erde zurückkehren, und dass mit Apollo 11 zum ersten Mal zwei Menschen den Mond betreten konnten, um nur drei bedeutende Ereignisse der Raumfahrt zu erwähnen. (Eine ausführliche Übersicht über die wichtigsten Daten der Raumfahrt findet man bei Messerschmid und Fasoulas [6, Anhang A p. 483-502].) Entsprechend würdigte Hans Barth in der Einführung zum Buch von Oberth [9] die wertvollen Beiträge von Ziolkowsky, Goddard und Oberth. Er zitierte (leider ohne Quellenangabe) auch den folgenden, für unseren Geschmack vielleicht etwas gar euphorisch formulierten Vergleich von Ernst Stuhlinger, der die Eroberung des Weltalls mit einem Ereignis der Erdgeschichte in Verbindung bringt [9, p. 19]:

Vor 300 Millionen Jahren vollzogen lurchähnliche Wassertiere einen ähnlichen Schritt, als sie das trockene Land zu betreten begannen, das für sie äusserst feindselig gewesen sein muss. Die Kiemenatmung funktionierte nicht mehr; die Haut war sengender Hitze und klirrender Kälte, trockenen Winden und Schneestürmen ausgesetzt; Nahrung war schwer zu finden; das volle Körpergewicht lastete auf den Füßen; Jungtiere gingen sofort zugrunde, wenn sie auf dem Lande geboren wurden oder den Eiern entschlüpften. Und doch war es der Schritt in diese neue, feindselige Umgebung, der die Evolution vom Stadium der Fische und Krebse zu den Vögeln und Säugetieren und schliesslich zum Menschen ermöglichte. Das neue Biotop war nicht nur voller Schwierigkeiten und Gefahren, es schenkte auch eine neue Dimension der Freiheit für Aktivitäten und Entwicklung, die unter Wasser unmöglich gewesen wäre. Freilich, für die Aneignung und Nutzung dieser neuen Dimension hatten die kühnen Landfahrer vor 300 Millionen Jahren nur die äusserst langsam wirkenden Prinzipien der Darwinschen Theorie. Die Raumfahrer unseres Jahrhunderts, mit den phantastischen Fähigkeiten menschlichen Intellektes ausgestattet, vermögen den Schritt von der Erde in den Raum im Laufe einer einzigen Generation zu tun.

## 1.2 Flugbahnmechanik

Ein grosses Problem der Raumfahrt war und ist bis heute der Start auf der Erde, um einerseits in der Atmosphäre mit ihren Turbulenzen einen vorbestimmten Kurs einzuhalten und andererseits der immensen irdischen Gravitation in der Nähe der Erdoberfläche zu entkommen. Ein Grossteil des Treibstoffes wird dafür verbraucht. Wir ignorieren diesen Teil einer Raummission in der vorliegenden Arbeit jedoch und nehmen an, die Raumsonde sei erfolgreich gestartet und befinde sich ausserhalb der Atmosphäre auf einer so genannten Parkbahn, also einer Umlaufbahn um die Erde, von der aus die Sonde ihre eigentliche Reise beginnt.

Will eine Raumsonde aus so einer Parkbahn um die Erde beispielsweise zum Saturn fliegen, so ist die Analogie zu einem Flugzeug, das sich auf einem interkontinentalen Flug befindet, nicht hilfreich, weil sie zur falschen Vorstellung führen kann, dass die Triebwerke der Sonde gleich wie die Triebwerke des Flugzeugs ununterbrochen arbeiten müssen. Das ist jedoch nicht der Fall, denn die Sonde wird nicht durch den Luftwiderstand abgebremst, sondern bewegt sich auch ohne Triebwerk und wird nur durch die Gravitation der umliegenden Himmelskörper geführt.

Um die Bahn einer Sonde durch die Gravitationsfelder der Himmelskörper exakt zu berechnen, müsste man das so genannte *n-Körperproblem* lösen können, was aber bekanntlich – siehe etwa Prussing und Conway [11, p. 9] – nicht exakt, sondern – siehe beispielsweise Hockney und Eastwood [4, p. 417ff] – nur näherungsweise möglich ist. Gäbe es nur einen Himmelskörper und die Sonde, und wäre die Masse der Sonde im Vergleich zur Masse des Himmelskörpers vernachlässigbar, so liesse sich die Bahn der Sonde, die sich ohne Triebwerk oder andere Kräfte im Gravitationsfeld des Himmelskörpers bewegt, durch Kegelschnitte beschreiben. Dass es noch andere Himmelskörper gibt, stellt sich als nicht so problematisch heraus, weil man in guter Näherung um jeden Himmelskörper einen Einflussbereich dessen Gravitation definieren kann, innerhalb dessen man von der Gravitation anderer Himmelskörper absehen kann.

Normalerweise fliegt aber eine Raumsonde nicht ganz ohne Unterstützung eines Triebwerks, denn sonst könnte sie sich nicht einmal aus der Parkbahn lösen und würde wie ein Satellit nur einfach die Erde umkreisen. Bei den Triebwerken unterscheidet man solche mit schwacher Schubkraft (engl. low-thrust) und solche mit starker Schubkraft (engl. high-thrust). Die meisten bisherigen Missionen basierten auf Triebwerken mit starker Schubkraft, welche die Flugbahn mit Schubstößen korrigierten, die im Vergleich zu den Abständen zwischen solchen Schubstößen nur sehr kurz dauerten. Missionen, bei denen die Triebwerke nur schwachen Schub liefern, werden aber immer wichtiger. Die europäische Sonde SMART-1 beispielsweise näherte sich wie von Wiss [15] leicht verständlich beschrieben aus Kostengründen dem Mond nur mit schwachem, aber kontinuierlichem Schub.

Zwei wichtige Parameter für die Bestimmung einer geeigneten Flugbahn sind die Flugzeit und der Treibstoffverbrauch. Spielt die Zeit keine Rolle, kann am Treibstoff gespart werden. Ist eine kurze Reisezeit jedoch wichtig, wird mehr Treibstoff gebraucht. SMART-1 benötigte zum Mond zwar vergleichsweise viel Zeit, war dafür aber leicht, wozu der eingesparte Treibstoff signifikant beitrug. Für die von der NASA geplanten Missionen zum Mars darf man annehmen, dass später auf dem Mars benötigtes Material wie etwa Treibstoff für die Rückreise vorgängig mit in Bezug auf Treibstoffverbrauch günstigen Flügen hingebraucht wird, während bei den Flügen mit Menschen an Bord die Flugzeit möglichst kurz gehalten wird.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Flugbahnen, die mit wenigen kurzen und zeitlich weit auseinander liegenden Schubstößen beschrieben werden können. Weil wir zudem annehmen, dass sich eine Raumsonde an jedem Punkt ihrer Flugbahn in guter Näherung innerhalb des Einflussbereiches eines Himmelskörpers befindet, können wir eine komplexe Flugbahn als Folge von antriebslosen, durch die Gravitation eines einzelnen Himmelskörpers bestimmten Kegelschnittfragmenten beschreiben. Das ist das Prinzip hinter der Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte, die zwar auf vereinfachenden Annahmen beruht, dafür aber ohne grossen Rechenaufwand einen ersten Grobentwurf für eine geplante Flugbahn liefert, die dann vor der effektiven Durchführung der Mission natürlich noch exakter berechnet werden muss.

Verschiebt sich eine Raumsonde von einer niedrigen zu einer höheren Umlaufbahn um einen Planeten, so kann der Planet als fest und nur die Sonde als bewegt betrachtet werden. Bewegt sich jedoch die Sonde auf einer Bahn durch das Sonnensystem und kommt einem Planeten nahe, so ist die Gesamtdynamik wichtig, denn die Sonde wird durch das Gravitationsfeld des Planeten angezogen und ändert ihre Geschwindigkeit. Diesen Effekt, den man Gravitationskick (engl.

swingby oder gravity-assist) nennt, kann man gezielt zum Beschleunigen oder Bremsen ausnutzen, was Treibstoff sparen hilft. Die 1997 gestartete Cassini/Huygens-Mission, die von der NASA (National Aeronautics and Space Administration) in [7] übersichtlich zusammengefasst und in der Broschüre [3] des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt ausführlich beschrieben ist, wendete auf ihrem Weg zum Saturn diese zusätzliche Möglichkeit, Geschwindigkeit zu gewinnen, systematisch an.

## 2 Keplergesetze

Die Bahnen von Planeten um die Sonne und von Monden (oder künstlichen Satelliten) um die Planeten sind – abgesehen von Störeinflüssen anderer Himmelskörper – Ellipsen. Diese Körper verlassen das Sonnensystem nicht. Ein Komet hingegen kann sich auf einer Hyperbelbahn bewegen, auf der er das Sonnensystem einmal besucht und dann für immer verschwindet. Dass die Flugbahnen von Himmelskörpern Kegelschnitte (also Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln) sind, folgt aus den drei empirisch gefundenen Gesetzen von Kepler, die sich aus den Grundgesetzen der Mechanik und dem Gravitationsgesetz von Newton herleiten lassen.

### 2.1 Die Ellipse

Im Folgenden sind wir stärker an geschlossenen Flugbahnen interessiert und besprechen deshalb nur Ellipsen, nicht aber Parabeln und Hyperbeln. Abbildung 2.1 zeigt eine Ellipse mit den bestimmenden Grössen sowie einem beliebigen Punkt  $P$  eingetragen.

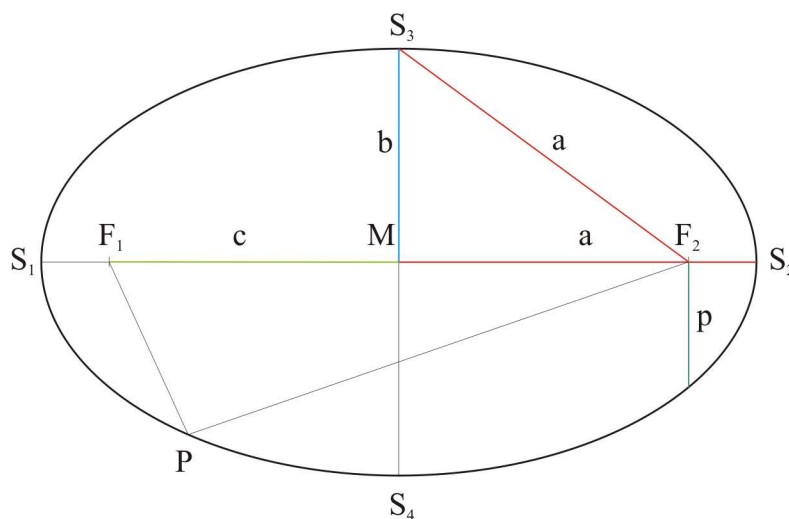


Abbildung 2.1: Charakteristische Grössen auf einer Ellipse.

Die beiden Punkte  $S_1$  und  $S_2$  heissen *Hauptscheitel*, die Punkte  $S_3$  und  $S_4$  *Nebenscheitel* und die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  *Brennpunkte*. Die Strecke  $\overline{S_1S_2}$  heisst Hauptachse, und die Strecke  $\overline{S_3S_4}$  heisst Nebenachse. Die halbe Hauptachse und die halbe Nebenachse werden *grosse* und *kleine Halbachse* genannt, und ihre Längen werden mit  $a$  und  $b$  bezeichnet. Die Strecke vom Mittelpunkt  $M$  zu einem Brennpunkt heisst *lineare Exzentrizität*, und ihre Länge wird mit  $c$  bezeichnet. Wichtiger ist jedoch meist das Verhältnis der linearen Exzentrizität und der grossen Halbachse als Mass dafür, wie abgeplattet die Ellipse ist. Diese dimensionslose Grösse heisst *numerische Exzentrizität* (oder einfach *Exzentrizität*) und wird mit  $e$  bezeichnet. Die Strecke  $p$  schliesslich, die bei einem Brennpunkt senkrecht auf der Hauptachse steht, wird *semi-latus rectum* oder



schlicht *Parameter* genannt. (Eine anschauliche Einführung ins Thema Ellipse bietet Tan in seinem Buch über die Flugbahnmechanik [13, Appendix A p. 251-271].)

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich eine Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung, der Hauptachse parallel zur x- und der Nebenachse parallel zur y-Achse darstellen als Menge der Punkte  $(x, y)$ , welche die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

erfüllen. Diese Gleichung geht für  $a = b = r$  in die bekannte Kreisgleichung über.

Eine wichtige Eigenschaft der Ellipse ist, dass für jeden Punkt  $P$  auf der Ellipse die Grösse  $\overline{F_1P} + \overline{PF_2}$  konstant ist<sup>1</sup>. Weil dies erstens auch für die beiden Punkte  $S_1$  und  $S_2$  gilt, folgt

$$\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$$

für alle Punkte  $P$ , und weil dies zweitens ebenso für die Punkte  $S_3$  und  $S_4$  gilt und somit aus Symmetriegründen  $\overline{S_3F_1} = \overline{S_3F_2} = a$  gelten muss, folgt für die lineare Exzentrizität

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.2)$$

beziehungsweise für die numerische Exzentrizität

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.3)$$

aus dem Satz von Pythagoras. Mit analogen Überlegungen lässt sich auch der Parameter  $p$  bestimmen. Im rechtwinkligen Dreieck, in dem  $\overline{F_1F_2} = 2c$  und  $p$  die Katheten bilden, ist die Hypotenuse  $2a - p$ , und es gilt somit  $p^2 + (2c)^2 = (2a - p)^2$ , woraus

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a(1 - e^2) \quad (2.4)$$

durch einfache Umformungen folgt.

Neben der Gleichung (2.1) im kartesischen Koordinatensystem, lässt sich die Ellipse auch in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  mit dem Brennpunkt  $F_2$  im Zentrum durch

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.5)$$

darstellen, wobei für alle Punkte  $P$  auf der Ellipse  $\varphi = \sphericalangle S_2F_2P$  und  $r = \overline{F_2P}$  ist. Für die numerische Exzentrizität einer Ellipse gilt wegen der Gleichung (2.3) und wegen  $0 < b \leq a$

$$0 \leq e < 1 \quad (2.6)$$

wobei  $e$  den Wert 0 bei einem Kreis mit Radius  $r = a = b$  annimmt. Der Nenner in (2.5) verschwindet also nie<sup>2</sup>.

**Aufgabe 1** Leiten Sie die Ellipsengleichung (2.5) her und überprüfen Sie sie für Werte von  $\varphi$ , die Vielfache von  $90^\circ$  sind. (*Tipp*: Wenden Sie den Kosinussatz auf das Dreieck  $F_1F_2P$  mit dem Winkel  $180^\circ - \varphi$  an.)

<sup>1</sup>Darauf basiert die so genannte Gärtnerkonstruktion. Um ein Blumenbeet in der Form einer Ellipse zu bekommen, schlägt man zwei Pflöcke bei den Brennpunkten ein und befestigt daran die beiden Enden eines Seils. Um die Ellipse auf dem Boden zu markieren, spannt man das Seil und fährt mit etwas, das eine Spur hinterlässt, dem gespannten Seil entlang.

<sup>2</sup>Betrachtet man nicht nur Ellipsen, sondern auch Parabeln und Hyperbeln, so kann der Nenner den Wert 0 annehmen, denn die Gleichung (2.5) gilt nicht nur für Ellipsen, sondern liefert für  $e = 1$  Parabeln und für  $e > 1$  Hyperbeln, wie etwa Curtis in seinem speziell für Studierende konzipierten Buch [2, p. 51-75] zeigt.

## 2.2 Keplerbahnen

Johannes Kepler (1571 - 1630) entdeckte basierend auf den exakten Beobachtungsdaten von Tycho Brahe (1546 - 1601) die drei nach ihm benannten Gesetze<sup>3</sup>, die sich nach Messerschmid und Fasoulas [6, p. 70] wie folgt formulieren lassen: Das erste Kepler'sche Gesetz besagt, dass sich die Planeten auf Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Das zweite Kepler'sche Gesetz, der so genannte Flächensatz, stellt fest, dass der von der Sonne zum Planeten gezogene Strahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Das dritte und erst fast zehn Jahre später entdeckte Kepler'sche Gesetz behauptet, dass die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten des gleichen Zentralgestirns sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen verhalten.

Isaac Newton (1643 - 1727) entwickelte seine Mechanik und Gravitationstheorie basierend auf den Arbeiten von Galileo Galilei und Johannes Kepler. Weil wir im Folgenden nur das erste Kepler'sche Gesetz brauchen, leiten wir dieses Prussing und Conway [11, p. 12-14] folgend aus der Newton'schen Mechanik ab und verweisen für die beiden anderen Gesetze auf die daran anschliessenden Seiten in [11, p. 15-17] und für eine ausführlichere Behandlung auf die Werke von Curtis [2, Chapter 1-3 p. 1-147] und Tan [13, Chapter 1-2 p. 1-46].

Wenn sich ein Massenpunkt mit der Masse  $m$  im Raum bewegt, so lässt sich seine Position zum Zeitpunkt  $t$  als  $\mathbf{x}(t)$  oder einfach  $\mathbf{x}$  schreiben. (Wir benutzen fett gedruckte Buchstaben für vektorielle und normale Buchstaben für skalare Grössen.) Für die Ableitung von  $\mathbf{x}$  nach der Zeit  $t$ , also für die Geschwindigkeit, schreiben wir  $\dot{\mathbf{x}}$  oder manchmal auch  $\mathbf{v}$ . Für die Ableitung von  $\dot{\mathbf{x}}$  nach  $t$ , also für die Beschleunigung, schreiben wir  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  oder manchmal auch  $\mathbf{a}$ . Gemäss dem zweiten Grundgesetz der Mechanik von Newton gilt

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \quad (2.7)$$

für die Summe  $\mathbf{F}$  aller Kräfte, die auf den Massenpunkt wirken.

Betrachten wir jetzt zwei Massenpunkte mit Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die sich gegenseitig durch die Gravitation anziehen, und auf die sonst keine weiteren Kräfte wirken, so gilt

$$\mathbf{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \quad \mathbf{F}_{21} = \gamma \frac{m_2 m_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$$

nach dem Gravitationsgesetz von Newton, wobei die so genannte *Gravitationskonstante* nach Prussing und Conway [11, p. 6] den Wert  $\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  hat. Benutzt man statt den zwei Ortsvektoren die zwei Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , so bekommt man

$$\mathbf{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad \mathbf{F}_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{|\mathbf{r}_{21}|} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad (2.8)$$

für die beiden Gravitationskräfte. (Wegen dem dritten Grundgesetz der Mechanik von Newton – Actio gleich Reactio – müssen die Kräfte  $\mathbf{F}_{12}$  und  $\mathbf{F}_{21}$  betragsmässig gleich stark sein, aber in entgegengesetzte Richtung zeigen, was sie auch sind, wie man leicht sieht.)

Kombiniert man jetzt die Gleichungen (2.7) und (2.8) zu

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}$$

---

<sup>3</sup>Es ist bemerkenswert, wie Schlingloff [12, p. 185] feststellt, dass man die Planetenbewegung, obwohl die drei Keplergesetze vor Newton und dessen fundamentalen Arbeiten formuliert worden sind, auch heute noch nicht durch "einfachere Beziehungen" beschreiben kann.

dividiert die linke Gleichung durch  $m_1$  und die rechte durch  $m_2$ , subtrahiert sie von einander und berücksichtigt  $\ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_{12}$ , so erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \gamma \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12}$$

oder umgeformt

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

indem man  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$  und  $\mu = \gamma(m_1 + m_2)$  setzt. Das ist die Form, in der man das so genannte *Zweikörperproblem* als Differentialgleichung meistens darstellt. Diese Gleichung beschreibt die relative Bewegung von zwei Himmelskörpern mit gegebenen Massen  $m_1$  und  $m_2$ .

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) von  $\mathbf{r}$  mit der Gleichung (2.9) gibt

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{0}$$

was sich wegen  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$  zu  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  vereinfacht. Integriert man diese Gleichung, so erhält man wegen  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.10)$$

für einen konstanten Vektor  $\mathbf{h}$ . Weil der Drehimpuls eines Körpers als  $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  definiert ist, folgt daraus unmittelbar die Drehimpulserhaltung. Die Gleichung (2.10) impliziert aber auch, dass  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  immer senkrecht auf dem konstanten Vektor  $\mathbf{h}$  stehen, und dass die Bewegung somit in einer Ebene abläuft, die man die *Bahnebene* nennt.

Um die Gleichung (2.9) zu lösen, berechnen wir

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} [\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})] = \mu \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}|\dot{\mathbf{r}}|}{|\mathbf{r}|^2} \right)$$

unter Benutzung von (2.10) und der Identität  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Wegen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{|\mathbf{r}|\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|\dot{\mathbf{r}}|}{|\mathbf{r}|^2}$$

gilt

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

oder integriert

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \mathbf{e} \right)$$

für die dimensionslose Integrationskonstante  $\mathbf{e}$ . Das Skalarprodukt mit  $\mathbf{r}$  unter Berücksichtigung von (2.10) und der Identität  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  ergibt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot \mu \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \mathbf{e} \right) = \mu(|\mathbf{r}| + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) = \mu(|\mathbf{r}| + |\mathbf{r}||\mathbf{e}| \cos \varphi) \\ &= (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 \end{aligned}$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{e}$  ist. Setzt man  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $e = |\mathbf{e}|$  sowie  $h = |\mathbf{h}|$  und löst die so entstehende Gleichung  $\mu(r + re \cos \varphi) = h^2$  nach  $r$  auf, so bekommt man

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.11)$$

was mit  $p = h^2/\mu$  der Ellipsengleichung (2.5) entspricht. Damit ist aber gezeigt, dass die Ellipsenbahn eine mögliche Lösung der Differentialgleichung (2.9) des Zweikörperproblems ist.

### 2.3 Die Vis-Viva-Gleichung

Kreist eine Raumsonde mit Masse  $m_r$  und Geschwindigkeit  $v_r$  antriebslos um einen Planeten mit Masse  $m_p$ , so ist die gesamte Energie der Sonde die Summe der kinetischen und der potenziellen Energie,  $E = E_k + E_p$ , wobei für die kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2}m_r v_r^2$$

gilt. Die durch das Gravitationsfeld des Planeten erzeugte potentielle Energie  $E_p(r)$  lässt sich Messerschmid und Fasoulas [6, p. 79-81] folgend als Arbeit definieren, die eine Kraft  $\mathbf{F}$  leisten muss, um die Raumsonde von einem Punkt mit Abstand  $r$  vom Planeten zu einem Punkt mit Abstand  $\infty$  vom Planeten zu bringen. Setzt man  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  als Einheitsvektor, so gilt

$$\begin{aligned} E_p(r) &= \int_r^\infty \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_r^\infty -\gamma \frac{m_r m_p}{r^2} \mathbf{e}_r d\mathbf{r} = \int_r^\infty -\gamma \frac{m_r m_p}{r^2} dr \\ &= \gamma \frac{m_r m_p}{\infty} - \gamma \frac{m_r m_p}{r} = -\gamma \frac{m_r m_p}{r} \end{aligned}$$

wegen  $\mathbf{e}_r d\mathbf{r} = dr$ . Damit lässt sich die gesamte Energie der Raumsonde als

$$E = \frac{1}{2}m_r v_r^2 - \gamma \frac{m_r m_p}{r} \quad (2.12)$$

und die spezifische Energie der Bahn (unabhängig von  $m_r$ ) als

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_r^2 - \gamma \frac{m_p}{r} \quad (2.13)$$

schreiben.

Wegen dem Energieerhaltungssatz ist  $E$  (beziehungsweise  $\varepsilon$ ) konstant und lässt sich somit bestimmen, wenn man die kinetische und potentielle Energie für einen Punkt auf der Bahn kennt. Dazu wählen wir den Punkt mit  $r_0$  und  $v_0$ , an dem die Sonde am nächsten beim Planeten ist. Weil dort  $\dot{\mathbf{r}}$  senkrecht auf  $\mathbf{r}$  steht, folgt aus der Gleichung (2.10)  $r_0 v_0 = h$  und mit  $r_0 = a - c = a(1 - e)$  gilt somit  $v_0 = h/(a(1 - e))$ .

Die Grösse  $h$  lässt sich aus der Gleichung (2.11) bestimmen. Es gilt  $h^2 = \mu p$ , wobei jedoch zu beachten ist, dass  $\mu = \gamma(m_r + m_p)$  ist und  $h$  somit von der Masse  $m_r$  abhängt. Wegen  $m_p \gg m_r$  kann  $\gamma(m_r + m_p) \approx \gamma m_p$  und  $h^2 \approx \gamma m_p p$  gesetzt werden. Damit kann  $\varepsilon$  zu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \gamma \frac{m_p}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2(1 - e)^2} - \gamma \frac{m_p}{a(1 - e)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma m_p p}{a^2(1 - e)^2} - \gamma \frac{m_p}{a(1 - e)}$$

und mit  $p = a(1 - e^2)$  aus der Gleichung (2.4) weiter zu

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma m_p \left( \frac{a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{1}{a(1 - e)} \right) = \gamma m_p \left( \frac{(1 - e)(1 + e)}{2a(1 - e)^2} - \frac{1}{a(1 - e)} \right) \\ &= \gamma m_p \left( \frac{1 + e}{2a(1 - e)} - \frac{2}{2a(1 - e)} \right) = \gamma m_p \frac{-1 + e}{2a(1 - e)} = -\frac{\gamma m_p}{2a} \end{aligned}$$

umgeformt werden. In der Gleichung (2.13) eingesetzt und immer noch unter der Annahme, dass die Masse  $m_r$  der Raumsonde im Vergleich zur Masse  $m_p$  des Planeten vernachlässigt werden kann, führt das zur Gleichung

$$v_r^2 = \gamma m_p \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.14)$$

für allgemeine Ellipsenbahnen. Bei einer Kreisbahn mit Radius  $r$  gilt  $r = a$ , sodass sich diese Gleichung zu

$$v_r^2 = \gamma m_p \frac{1}{r} \quad (2.15)$$

vereinfacht. Die kinetische Energie hiess früher auch *lebendige Kraft* (lat. vis viva), weshalb die Gleichung (2.14) – vorwiegend im englischen Sprachraum – bis heute als *Vis-Viva-Gleichung* bezeichnet wird. Diese Gleichung hat sich bei Flugbahnrechnungen als äusserst nützlich herausgestellt.

### 3 Einflussbereich der Gravitation eines Himmelskörpers

Wenn sich eine Raumsonde von der Erde aus zu einem anderen Planeten unseres Sonnensystems aufmacht, so wirken je nach Ort die Gravitationskräfte all dieser Himmelskörper unterschiedlich stark auf sie und beeinflussen ihre Bewegung. Um also die Flugbahn der Sonde exakt zu bestimmen, müsste man all diese Effekte berücksichtigen. Ist die Sonde jedoch genügend nahe bei einem Himmelskörper kann man das System bestehend aus diesem Himmelskörper und der Sonde als Zweikörperproblem approximieren.

Den Bereich eines Himmelskörpers, in dem die Gravitationskräfte anderer Himmelskörper in guter Näherung vernachlässigt werden können, nennt man den *Einflussbereich der Gravitation* oder kurz *Einflussbereich* dieses Himmelskörpers (engl. *sphere of influence*). Auf der Erdoberfläche beispielsweise befinden wir uns zweifellos gänzlich im Einflussbereich der Erde und können bei den meisten physikalischen Messungen die übrigen Himmelskörper ignorieren, auch wenn sich deren Einflüsse wie etwa bei den durch den Mond verursachten Gezeiten manchmal trotzdem auf das irdische Geschehen auswirken.

Weil sich eine Sonde auf ihrer Flugbahn innerhalb unseres Sonnensystems in mehr oder weniger guter Näherung immer im Einflussbereich genau eines Himmelskörpers – der Sonne, eines Planeten oder eines Mondes – befindet, kann die Flugbahn innerhalb dieser Einflussbereiche jeweils approximativ als Zweikörperproblem berechnet und an den Grenzen der Einflussbereiche zusammengesetzt werden. Bevor wir uns aber in den nächsten Kapiteln mit dem Bestimmen von Flugbahnen beschäftigen, definieren wir im Folgenden erst den Einflussbereich eines Himmelskörpers einmal durch nahe liegende, jedoch zu starke Vereinfachungen und anschliessend auf geeigneter Weise. Wir folgen dabei der Herleitung von Prussing und Conway [11, p. 121-124].

#### 3.1 Erster Versuch einer Definition

Um den Einflussbereich der Gravitation eines Planeten zu bestimmen, betrachten wir die drei Körper Sonne, Planet und Raumsonde mit den jeweiligen Massen  $m_s$ ,  $m_p$  und  $m_r$  und gegenseitigen Abständen  $r_{sp}$ ,  $r_{sr}$  und  $r_{pr}$ . Auf die Raumsonde wirken die beiden Gravitationskräfte

$$F_s = \gamma \frac{m_s m_r}{r_{sr}^2} \quad F_p = \gamma \frac{m_p m_r}{r_{pr}^2}$$

falls man diese Zweikörperprobleme als unabhängig betrachtet. Nimmt man an, dass  $F_s < F_p$  gelten muss, wenn sich die Raumsonde im Einflussbereich des Planeten befindet, so folgt

$$\gamma \frac{m_s m_r}{r_{sr}^2} < \gamma \frac{m_p m_r}{r_{pr}^2} \quad (3.1)$$

woraus weiter als Bedingung

$$r_{pr} < \sqrt{\frac{m_p}{m_s}} \cdot r_{sr} \quad (3.2)$$

für den Einflussbereich des Planeten folgt.

Nimmt man an, die Raumsonde befinde sich irgendwo auf der Strecke zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem Mittelpunkt des Planeten, dann gilt  $r_{sr} + r_{pr} = r_{sp}$ . Ersetzt man  $r_{sr}$  durch  $r_{sp} - r_{pr}$  in der Formel (3.2), so ergibt sich

$$r_{pr} < \frac{\sqrt{m_p/m_s}}{1 + \sqrt{m_p/m_s}} \cdot r_{sp} \quad (3.3)$$

durch einfache Umformungen. Diese Definition ist jedoch – mindestens für den Einflussbereich der Erde – nicht sehr sinnvoll, wie man sieht, wenn man die folgende Aufgabe löst.

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie mit den Massen  $m_s = 1.989 \cdot 10^{30}$  kg,  $m_p = 5.974 \cdot 10^{24}$  kg und dem Abstand  $r_{sp} \approx 1.5 \cdot 10^8$  km für Sonne und Erde den Punkt zwischen diesen beiden Himmelskörpern, bei dem gemäss dieser Formel der Einflussbereich der Erde endet, und prüfen Sie nach, ob sich der Mond, der die Erde im Abstand von etwa  $3.8 \cdot 10^5$  km umkreist, innerhalb des Einflussbereiches der Erde befinden würde. (Die angegebenen Werte für die Massen und Abstände der Himmelskörper stammen von Prussing und Conway [11, p. 188].)

### 3.2 Gestörte relative Bewegung zweier Himmelskörper

Um den Einflussbereich der Gravitation eines Himmelskörpers sinnvoller zu definieren, nehmen wir nicht einfach zwei unabhängige Zweikörperprobleme an, sondern berücksichtigen auch die gegenseitigen Störungen. Wir folgen somit Laplace, der sich im 18. Jahrhundert mit diesem Problem beschäftigte, und bestimmen die gestörte relative Bewegung von zwei Körpern.

Dazu betrachten wir das n-Körperproblem analog zum Zweikörperproblem im Kapitel 2, also  $n$  Massenpunkte mit Massen  $m_i$  am Ort  $\mathbf{x}_i$  unter dem Einfluss der gegenseitigen Anziehung. Gemäss dem zweiten Gesetz von Newton bestimmt sich die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers durch  $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$ , und gemäss dem Gravitationsgesetz von Newton gilt mit  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$

$$\mathbf{F}_{ij} = \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} = \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij}$$

für die Gravitationskraft, die vom Massenpunkt  $m_i$  auf den Massenpunkt  $m_j$  ( $j \neq i$ ) wirkt. Summiert man alle auf  $m_i$  wirkenden Gravitationskräfte  $\mathbf{F}_{ij}$

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij} = \gamma m_i \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (3.4)$$

erhält man die für die Berechnung des Einflussbereiches der Gravitation eines Himmelskörpers benötigte Formel.

Sind wir nur an der durch die übrigen  $n - 2$  Massenpunkte gestörten relativen Bewegung der beiden Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  interessiert, so kann man die Formel (3.4) für den Massenpunkt  $m_1$  als

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \gamma \frac{m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} + \gamma \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{1j}|^3} \mathbf{r}_{1j}$$

und für den Massenpunkt  $m_2$  als

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = \gamma \frac{m_1}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} + \gamma \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{2j}|^3} \mathbf{r}_{2j}$$

schreiben. Subtrahiert man diese beiden Gleichungen unter Benutzung von  $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ , so erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} - \gamma \sum_{j=3}^n m_j \left( \frac{\mathbf{r}_{1j}}{|\mathbf{r}_{1j}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{j2}}{|\mathbf{r}_{j2}|^3} \right)$$

und weiter

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = -\gamma \sum_{j=3}^n m_j \left( \frac{\mathbf{r}_{1j}}{|\mathbf{r}_{1j}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{j2}}{|\mathbf{r}_{j2}|^3} \right) \quad (3.5)$$

für  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ . Im Zweikörperproblem verschwindet der Term auf der rechten Seite dieser Gleichung, der als *Störfunktion* oder einfach *Störung* bezeichnet wird.

**Aufgabe 3** Wirken auf die  $n$  als Massenpunkte modellierten Körper keine weiteren Kräfte als die Gravitation der anderen  $n - 1$  Körper, so ist das Gesamtsystem ein geschlossenes System. Begründen Sie, weshalb sich darin die Summe der Kräfte  $\mathbf{F}_i$  gegenseitig aufheben.

### 3.3 Definition des Einflussbereichs

Für die drei Körper Sonne, Planet und Raumsonde mit den Massen  $m_s$ ,  $m_p$  und  $m_r$  sowie den Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_{sp}$ ,  $\mathbf{r}_{sr}$  und  $\mathbf{r}_{pr}$  gemäss Abbildung 3.1 kann jetzt mit der Formel (3.5) einerseits bestimmt werden, wie die Sonne das System bestehend aus Planet und Raumsonde stört, und andererseits, wie der Planet das System bestehend aus Sonne und Raumsonde stört.

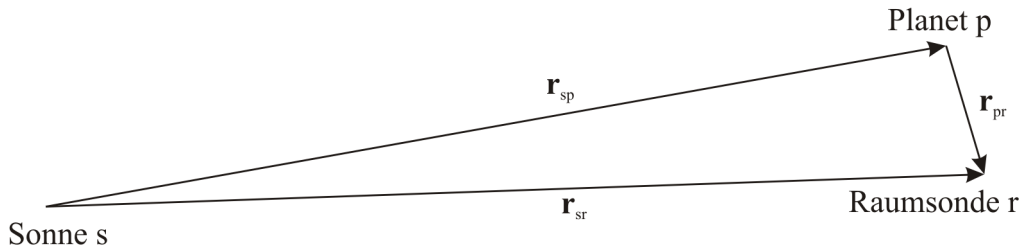


Abbildung 3.1: Die drei Körper Sonne, Planet und Raumsonde mit Abstandsvektoren.

Die durch die Sonne gestörte Bewegung der Raumsonde relativ zum Planeten kann als

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pr} + \gamma \frac{m_p + m_r}{|\mathbf{r}_{pr}|^3} \mathbf{r}_{pr} = -\gamma m_s \left( \frac{\mathbf{r}_{sr}}{|\mathbf{r}_{sr}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{sp}}{|\mathbf{r}_{sp}|^3} \right) \quad (3.6)$$

und die durch den Planeten gestörte Bewegung der Raumsonde relative zur Sonne als

$$\ddot{\mathbf{r}}_{sr} + \gamma \frac{m_s + m_r}{|\mathbf{r}_{sr}|^3} \mathbf{r}_{sr} = -\gamma m_p \left( \frac{\mathbf{r}_{sp}}{|\mathbf{r}_{sp}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{pr}}{|\mathbf{r}_{pr}|^3} \right) \quad (3.7)$$

geschrieben werden. Man kann also sowohl die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_{pr}$  wie auch die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_{sr}$  aufteilen in eine Komponente für das ungestörte Zweikörperproblem und eine Komponente für die Störung durch den dritten Körper. Bezeichnet man diese Komponenten in folgender Weise

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s &= -\gamma \frac{m_s + m_r}{|\mathbf{r}_{sr}|^3} \mathbf{r}_{sr} & \mathbf{a}_p &= -\gamma \frac{m_p + m_r}{|\mathbf{r}_{pr}|^3} \mathbf{r}_{pr} \\ \tilde{\mathbf{a}}_s &= -\gamma m_s \left( \frac{\mathbf{r}_{sr}}{|\mathbf{r}_{sr}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{sp}}{|\mathbf{r}_{sp}|^3} \right) & \tilde{\mathbf{a}}_p &= -\gamma m_p \left( \frac{\mathbf{r}_{sp}}{|\mathbf{r}_{sp}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{pr}}{|\mathbf{r}_{pr}|^3} \right) \end{aligned}$$

so lassen sich die beiden Gleichungen (3.6) und (3.7) in die Form

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pr} = \mathbf{a}_p + \tilde{\mathbf{a}}_s \qquad \ddot{\mathbf{r}}_{sr} = \mathbf{a}_s + \tilde{\mathbf{a}}_p \qquad (3.8)$$

bringen.

Sind Planet und Raumsonde nahe beisammen, so ist  $\tilde{\mathbf{a}}_s$  die Differenz von zwei fast identischen Vektoren und somit trotz  $m_s \gg m_p + m_r$  im Vergleich zu  $\mathbf{a}_p$  sehr klein. Ist hingegen die Raumsonde weit vom Planeten entfernt, so ist  $\tilde{\mathbf{a}}_p$  wegen  $m_s \gg m_p$  klein im Vergleich zu  $\mathbf{a}_s$ .

Man definiert: Gilt für einen Raumsonde im Abstand  $\mathbf{r}_{pr}$  vom Planeten die Gleichung

$$\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_p|}{|\mathbf{a}_s|} = \frac{|\tilde{\mathbf{a}}_s|}{|\mathbf{a}_p|}$$

so befindet sie sich auf der Grenze des Einflussbereichs des Planeten. Gilt hingegen für die Raumsonde im Abstand  $\mathbf{r}_{pr}$  vom Planeten eine der beiden äquivalenten Ungleichungen

$$\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_p|}{|\mathbf{a}_s|} > \frac{|\tilde{\mathbf{a}}_s|}{|\mathbf{a}_p|} \qquad \frac{|\mathbf{a}_p|}{|\mathbf{a}_s|} > \frac{|\tilde{\mathbf{a}}_s|}{|\tilde{\mathbf{a}}_p|} \qquad (3.9)$$

so ist sie im Innern des Einflussbereichs des Planeten. Vergleicht man die rechte Version der Ungleichung (3.9) mit der vorher bestimmten Ungleichung (3.1), so ist der Unterschied, dass in der eben hergeleiteten Ungleichung  $|\mathbf{a}_p|/|\mathbf{a}_s| > |\tilde{\mathbf{a}}_s|/|\tilde{\mathbf{a}}_p|$  verlangt wird, während die vorher bestimmte Ungleichung  $|\mathbf{a}_p|/|\mathbf{a}_s| > 1$  fordert. Das Verhältnis  $|\tilde{\mathbf{a}}_s|/|\tilde{\mathbf{a}}_p|$  der Störungen ist aber dort, wo  $|\mathbf{a}_p|/|\mathbf{a}_s| = 1$  gilt, signifikant kleiner als eins, sodass mit der Ungleichung (3.9) ein bedeutend grösserer Einflussbereich für den Planeten errechnet wird.

**Aufgabe 4** In Aufgabe 2 haben Sie mit der zu stark vereinfachenden Formel (3.3) berechnet, dass die Grenze der Einflussbereiche von Erde und Sonne auf der Strecke zwischen diesen beiden Himmelskörpern etwa  $2.6 \cdot 10^5$  km von der Erde entfernt liegen würde. Bestimmen Sie nun für diesen Punkt die Grösse  $|\tilde{\mathbf{a}}_s|/|\tilde{\mathbf{a}}_p|$  für eine Raumsonde mit vernachlässigbarer Masse. Benutzen Sie dafür wieder die Werte  $m_s = 1.989 \cdot 10^{30}$  kg,  $m_p = 5.974 \cdot 10^{24}$  kg und  $r_{sp} \approx 1.5 \cdot 10^8$  km nach Prussing und Conway [11, p. 188]. Was bedeutet das für diesen Punkt in Bezug auf die Einflussbereiche von Sonne und Erde?

### 3.4 Ungefähre Form des Einflussbereichs

Bisher haben wir gesehen, dass man für die Berechnung der Flugbahn einer Raumsonde innerhalb des Sonnensystems den Raum in guter Näherung in die Einflussbereiche der Sonne, der Planeten und deren Monde einteilen kann. Befindet sich die Sonde im Einflussbereich eines Himmelskörpers, können die Gravitationskräfte der anderen Himmelskörper für den ersten Entwurf einer Flugbahn vernachlässigt werden. Um den Einflussbereich eines Planeten auf seiner Bahn um die Sonne (oder allgemeiner eines Himmelskörpers auf seiner Bahn um dessen Zentralkörper) zu bestimmen, benutzt man die Ungleichungen (3.9). In der Abbildung 3.2 befindet sich *Sonde*<sub>1</sub> innerhalb des grau markierten Einflussbereichs des Planeten, während *Sonde*<sub>2</sub> ausserhalb und somit im Einflussbereich der Sonne liegt.

Um die Form des Einflussbereichs etwa der Erde zu bestimmen, müsste man die Ungleichungen (3.9) nach  $\mathbf{r}_{pr}$  auflösen, was direkt nicht möglich ist, sodass man auf Näherungslösungen angewiesen ist. Eine Approximation findet man bei Battin [1, p. 387ff]. Dort wird auch gezeigt, dass der Einflussbereich eines Planeten im Sonnensystem ungefähr eine Kugel mit Mittelpunkt im Zentrum des Planeten ist, dass diese Näherung aber für den Einflussbereich des Mondes im





Abbildung 3.2: Die Sonne und ein Planet mit seinem Einflussbereich.

System bestehend aus Erde und Mond wegen der im Verhältnis zur Erdmasse grossen Mondmasse sehr ungenau ist. Gemäss der Tabelle von Prussing und Conway [11, p. 125] mit Werten für mehrere Planeten des Sonnensystems ist der Radius des Einflussbereiches der Erde  $9.24 \cdot 10^5$  km, womit der Mond im Abstand von  $3.8 \cdot 10^5$  km also weit innerhalb dieses Bereichs zu liegen kommt. Eine ähnliche Tabelle mit den Radien des Einflussbereiches der Planeten findet man auch bei Battin [1, p. 397], wobei dort die Werte jedoch in Meilen und nicht in Kilometer angegeben sind.

Statt in aufwändiger Rechnung nachzuweisen, dass der Einflussbereich eines Planeten in guter Näherung eine Kugel ist, genügt es uns in der nachfolgenden Aufgabe zu zeigen, dass sich die Grenze des Einflussbereiches der Erde für die drei repräsentativen Konstellationen in der Abbildung 3.3 ungefähr gleich weit vom Erdmittelpunkt entfernt befindet.

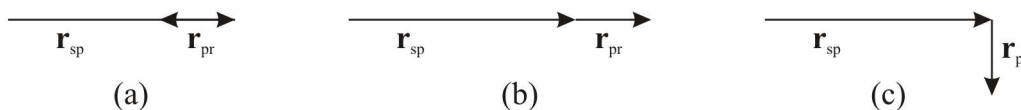


Abbildung 3.3: Drei Anordnungen von Sonne, Erde und Raumsonde.

**Aufgabe 5** Bestimmen Sie das Verhältnis  $(|\mathbf{a}_p| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_p|) / (|\mathbf{a}_s| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_s|)$  für die drei Konfigurationen von Sonne, Erde und Raumsonde in der Abbildung 3.3. Benutzen Sie für die Sonne und Erde die Massen  $m_s = 1.989 \cdot 10^{30}$  kg,  $m_p = 5.974 \cdot 10^{24}$  kg und den Abstand  $r_{sp} = 1.495978 \cdot 10^8$  km aus der Liste von Prussing und Conway [11, p. 188] sowie für die Raumsonde die Masse  $m_r \approx 0$  kg und mehrere verschiedene Abstände um den Wert  $r_{pr} = 9.25 \cdot 10^5$  km. Setzen Sie dazu wenn möglich Ihr bevorzugtes Computerwerkzeug ein. Was folgt aus den gefundenen Werten?

## 4 Hohmann-Übergänge

Nachdem wir im letzten Kapitel den Einflussbereich eines Himmelskörpers definiert haben, wenden wir dies jetzt auf die Bahn einer Raumsonde an. Befindet sich eine Sonde, die sich nur durch die Gravitation der Himmelskörper geleitet (also antriebslos) durch den Raum bewegt, gänzlich im Einflussbereich eines Himmelskörpers, so ist ihre Bahn nach den Keplergesetzen eine Ellipse, und der Himmelskörper, um den sich die Sonde bewegt, liegt in einem der Brennpunkte. Soll die Sonde in eine andere Bahn gebracht werden, so muss eine Kraft darauf einwirken.

Die benötigte Kraft, um eine Raumsonde in eine andere Bahn zu bringen, kann ein kurzer, kräftiger Impulsstoss aus einem Triebwerk der Sonde sein. Dauert ein solcher Schub im Vergleich zu den zeitlichen Abständen zwischen den Schüben nur sehr kurz, so kann man die Dauer eines Schubes vernachlässigen und mit unendlich kurzen, aber unendlich starken Impulsstößen rechnen. Einen solchen Impulsstoss modelliert man als *Delta-Distribution*.

Neben Bahnänderungen durch einen kurzen, starken Schubstoss (engl. high-thrust) lassen sich Bahnänderungen auch durch einen zwar sehr schwachen, aber kontinuierlichen Schub (engl. low-thrust) erreichen. Nach Wiss [15] basiert die europäische Mondsonde SMART-1 (wie bereits erwähnt) auf dieser Technik. In dieser Arbeit werden wir uns aber nur mit den für die bisherige Raumfahrt wichtigeren kurzen und starken (high-thrust) Impulsstößen beschäftigen und uns auf Bahnänderungen beschränken, die mit ihnen erzeugt werden können.

Ein zwar einfaches, aber in der Praxis der Raumfahrt trotzdem sehr bedeutendes Manöver gehört in diese Gruppe. Es ist der Übergang von einer Kreisbahn in eine andere Kreisbahn mittels zweier Schubstöße, der nach seinem Entdecker *Hohmann-Übergang* genannt wird und sich in den folgenden zwei Fällen eignet:

1. Ein Satellit wird aus einer niedrigen, kreisförmigen Bahn um die Erde (engl. low earth orbit) auf eine geostationäre Bahn (engl. geostationary earth orbit) gebracht.
2. Eine Raumsonde fliegt von einem Planeten zu einem anderen (beispielsweise von der Erde zum Mars), wobei einerseits die Planetenbahnen als kreisförmig angenommen und andererseits die Planetenmassen vernachlässigt werden.

Weil solche Bahnänderungen durch Treibstoff bewirkt werden, und weil dieser Treibstoff der Raumsonde mitgegeben werden muss, was dessen Gewicht beträchtlich vergrößern kann, ist man daran interessiert, solche Manöver zu finden, die den Treibstoffverbrauch minimieren. Um den Treibstoffverbrauch (oder den Massenverlust) einer Raumsonde zu minimieren, muss die Summe der durch die Schubstöße bewirkten Geschwindigkeitsänderungen minimiert werden, denn je grösser eine Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  ist, desto grösser war nach der Ziolkowsky-Raketengleichung die dafür benötigte Treibstoffmenge, wie man etwa bei Messerschmid und Fasoulas [6, p. 38-40] nachlesen kann. Es lässt sich beweisen, dass der Hohmann-Übergang unter den Übergängen mit zwei Schubstößen am wenigsten Treibstoff benötigt.

#### 4.1 Schubstoss als Delta-Distribution

Um Bahnänderungen von Raumsonden rechnerisch angehen zu können, modellieren wir den Schub eines Triebwerks der Darstellung von Prussing und Conway [11, p. 99-102] folgend als Rechteckfunktion

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, t > t_0 + \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

unter der vereinfachenden Annahme, dass das Triebwerk zum Zeitpunkt  $t_0$  sofort vollen Schub liefert, diesen konstant aufrecht erhält und zum Zeitpunkt  $t_0 + \varepsilon$  instantan vollständig abschaltet. Die Fläche unter dieser Funktion ist unabhängig vom Parameter  $\varepsilon$  immer 1. Abbildung 4.1 zeigt zwei solche Rechteckfunktionen, wobei  $\varepsilon$  in (a) doppelt so gross ist wie in (b).

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird die Dauer des Schubs immer kürzer, seine Stärke dafür aber immer grösser, während die Fläche (also das Integral) immer gleich 1 bleibt. Man definiert die *Delta-Distribution*  $\delta(t)$  (auch Delta- oder Dirac-Funktion genannt) als Grenzwert und schreibt dies als

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

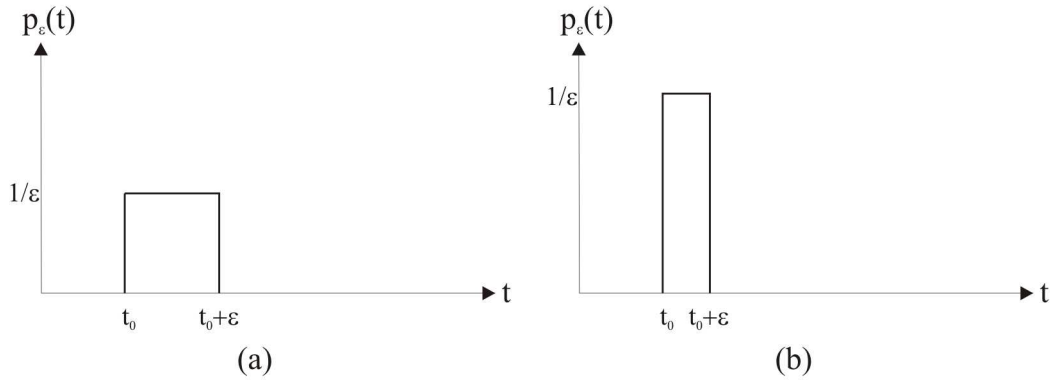


Abbildung 4.1: Rechteckfunktion  $p_\varepsilon(t)$  für zwei verschiedene  $\varepsilon$ .

obwohl das mathematisch nicht ganz unproblematisch ist. Das so idealisierte Triebwerk erzielt also in unendlich kurzer Zeit mit einem unendlich starken Schub eine endliche Geschwindigkeitsänderung. Ist die Geschwindigkeit unmittelbar vor dem Schub  $\mathbf{v}(t_0^-)$  und unmittelbar danach  $\mathbf{v}(t_0^+)$ , so ist diese Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_0^+) - \mathbf{v}(t_0^-)$  wie in Abbildung 4.2 gezeigt.

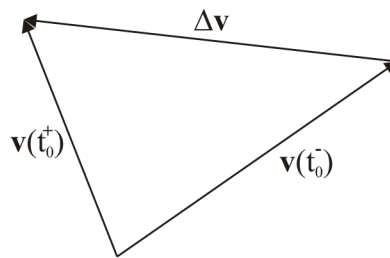


Abbildung 4.2: Änderung des Geschwindigkeitsvektors.

Mit einem durch eine Delta-Distribution idealisierten Schubstoss ändert die Raumsonde also instantan seine Geschwindigkeit. Mit Hilfe solcher Schubstöße aus einem Triebwerk kann die Sonde ihre Flugbahn beeinflussen.

## 4.2 Hohmann-Bahnen

Befindet sich eine Raumsonde auf einer niedrigen kreisförmigen Bahn um die Erde (oder einen anderen Himmelskörper) und soll in eine höhere kreisförmige Umlaufbahn gebracht werden, so genügen zwei solche Schubstöße, wie man aus der Abbildung 4.3 sieht<sup>4</sup>. Die Sonde wechselt von der Kreisbahn  $K_1$  durch die zwei geeignet starken und entsprechend gerichteten Impulsstöße bei den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  auf die Kreisbahn  $K_2$  wie von Prussing und Conway [11, P. 102-108] ausführlich behandelt.

Anfänglich bewegt sich die Sonde auf dem Kreis  $K_1$ . Unmittelbar vor dem Punkt  $P_1$  hat sie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1^-$  und bekommt bei  $P_1$  einen Impulsstoss, der die Geschwindigkeit um  $\Delta\mathbf{v}_1$  ändert, sodass ihre Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Punkt  $P_1$   $\mathbf{v}_1^+$  ist. Die Sonde bewegt sich jetzt auf der Ellipse  $E$  und würde ohne weitere Einwirkung auch darauf bleiben<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Wir beschränken uns hier auf Übergänge von einer niedrigen auf eine höhere Umlaufbahn. Der Übergang in der anderen Richtung kann ähnlich behandelt werden.

<sup>5</sup>Diese Aussage gilt nur für kleine Werte  $\Delta\mathbf{v}_1$ . Werden die Werte grösser, geht die Ellipse erst in eine Parabel und danach in eine Hyperbel über.

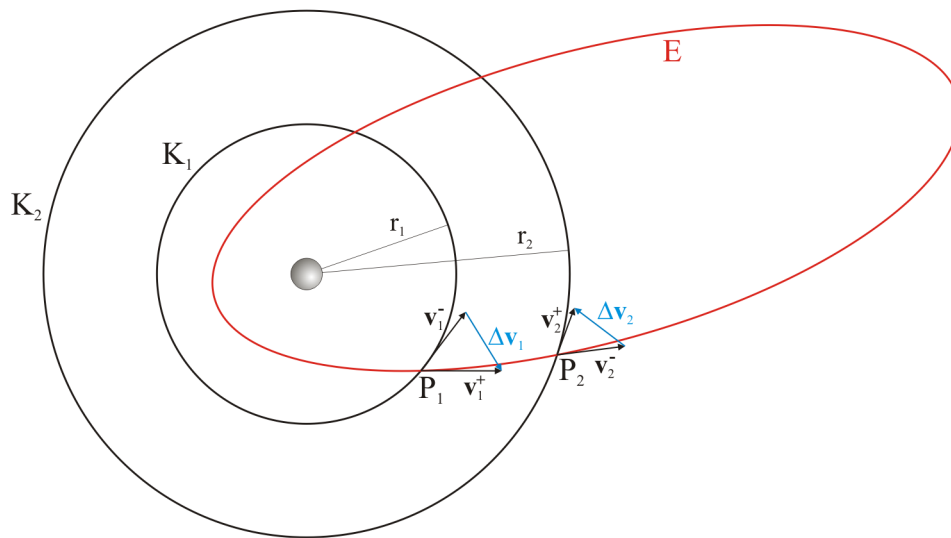


Abbildung 4.3: Bahnänderung mit zwei Schubstößen.

Unmittelbar vor dem Punkt  $P_2$  hat sie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2^-$  und bekommt bei  $P_2$  einen zweiten Impulsstoß, der die Geschwindigkeit um  $\Delta \mathbf{v}_2$  ändert, sodass ihre Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Punkt  $P_2$   $\mathbf{v}_2^+$  ist. Damit bewegt sich die Sonde auf der Kreisbahn  $K_2$  und bleibt ohne weitere Einwirkung auch darauf<sup>6</sup>.

Ein Spezialfall dieses Szenarios lässt die Raumsonde bei den beiden Punkten  $P_1$  und  $P_2$  nur den Betrag der Geschwindigkeiten, nicht aber deren Richtung ändern. Dieser von Hohmann in [5] diskutierte und nach ihm benannte Übergang von der Kreisbahn  $K_1$  in die Kreisbahn  $K_2$  verläuft wie in Abbildung 4.4 gezeigt über eine Ellipse  $E$ , deren eine Brennpunkt mit dem Mittelpunkt der beiden Kreise zusammenfällt.

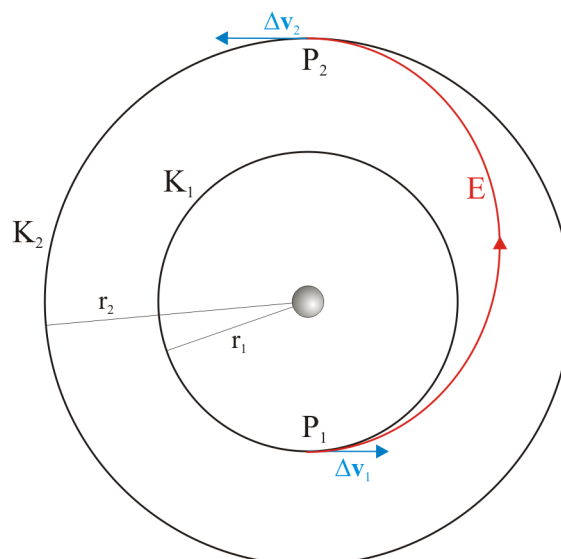


Abbildung 4.4: Hohmann-Bahn.

Aus der Abbildung 4.4 ist sofort ersichtlich, dass die Hauptachse der Ellipse  $E$  gleich  $r_1 + r_2$  ist,

<sup>6</sup>Hier und im Folgenden werden die beiden Kreisbahnen als komplanar angenommen.

und dass die lineare Exzentrizität gleich  $a - r_1$  ist, was man zusammen mit  $e = c/a$  auch als

$$a = \frac{r_2 + r_1}{2} \quad c = a - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \quad (4.1)$$

schreiben kann. Mit Hilfe der Beziehung (2.2) lässt sich daraus die kleine Halbachse  $b$  von  $E$  bestimmen, was zeigt, dass die Forderung, dass Kreis  $K_1$  und Ellipse  $E$  im Punkt  $P_1$  sowie Kreis  $K_2$  und Ellipse  $E$  im Punkt  $P_2$  eine gemeinsame Tangente besitzen, die Ellipse  $E$  bei gegebenen Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  eindeutig bestimmt.

Sind die beiden Kreisradien  $r_1$  und  $r_2$  gegeben, ist also die Ellipse und somit die statische Geometrie des Hohmann-Übergangs festgelegt. Kennt man zudem noch die Masse  $m_p$  des Himmelskörpers im Zentrum der beiden Kreisbahnen, so kann man auch die Geschwindigkeiten und somit die dynamische Seite des Hohmann-Übergangs berechnen, wie in der nachfolgenden Aufgabe gezeigt wird. (Weil in vielen Formeln nicht die Masse allein, sondern das Produkt Gravitationskonstante mal Masse vorkommt, gibt man häufig  $\gamma m_p$  statt  $m_p$  an, für das dann  $\mu_p$  geschrieben wird.)

**Aufgabe 6** Berechnen Sie aus  $\mu_p = \gamma m_p = 3.986 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$  und dem Radius  $6.378 \cdot 10^3 \text{ km}$  für die Erde die Geschwindigkeiten bei  $P_1$  und  $P_2$  jeweils vor und nach dem Schubstoss, wenn eine Raumsonde von einer niedrigen, kreisförmigen Bahn in 200 km Höhe mit einem Hohmann-Übergang auf eine geostationäre Kreisbahn ( $r_2 = 42250 \text{ km}$ ) gebracht werden soll<sup>7</sup>.

### 4.3 Treibstoffverbrauch

Betrachtet man die Abbildung 4.5, so sieht man, dass sich der Mars in Position  $Mars_1$  am nächsten bei der Erde und in Position  $Mars_2$  am weitesten weg von der Erde befindet<sup>8</sup>. Man könnte deshalb annehmen, dass eine Mission zum Mars weniger Treibstoff braucht, wenn sich der Mars beim Rendezvous in der Nähe der Stelle  $Mars_1$  befindet, aber mehr Treibstoff benötigt, um den Mars in der Nähe des Punktes  $Mars_2$  zu treffen. Das Gegenteil ist jedoch der Fall.

Weil das siderische Jahr auf dem Mars etwa doppelt so lange wie dasjenige auf der Erde dauert, zieht die Erde vom Mars aus gesehen davon. Wenn also eine Sonde von der Erde aus zum Mars nahe der Position  $Mars_1$  reisen will, muss sie gegen die Bewegung der Erde ankämpfen, was viel Treibstoff verbraucht. Befindet sich der Mars von der Flugrichtung der Erde aus gesehen vor der Erde wie in der Position  $Mars_2$ , so dürfte eine Reise zum Mars weniger Treibstoff verbrauchen. Eine mögliche Flugbahn in der Abbildung 4.5 ist eine Hohmann-Bahn, bei der die Raumsonde die Erde in der Position *Erde* verlässt und den Mars in der Position  $Mars_2$  trifft.

Hohmann hat vermutet, dass unter den Manövern, um von einer Kreisbahn auf eine andere zu gelangen, der Hohmann-Übergang am wenigsten Treibstoff verbraucht. Diese Vermutung stellte sich als richtig heraus, falls man nur Manöver mit zwei Schubstößen zulässt. Im Jahr 1963 wurde ein erster Beweis veröffentlicht gefolgt von weiteren, einfacheren Beweisen. Wir zeigen den in [10] erstmals publizierten und auch in [11, p. 106-108] behandelten Beweis von Prussing.

Damit eine Raumsonde auf einer Ellipsenbahn<sup>9</sup> wie in Abbildung 4.3 mit zwei Schubstößen von einer Kreisbahn  $K_1$  auf eine andere Kreisbahn  $K_2$  gelangen kann, muss diese Ellipsenbahn die offensichtliche Bedingung erfüllen, dass sie die beiden Kreisbahnen schneidet oder wenigstens

<sup>7</sup>Diese Aufgabe stammt von Schlingloff [12, p. 200].

<sup>8</sup>Die Position  $Mars_1$  heisst *Opposition* und die Position  $Mars_2$  heisst *Konjunktion*.

<sup>9</sup>Wir beschränken den Beweis auf Ellipsenbahnen, obwohl man (wie im Beweis von Prussing in [10] und [11]) alle Kegelschnitte gleich behandeln könnte.

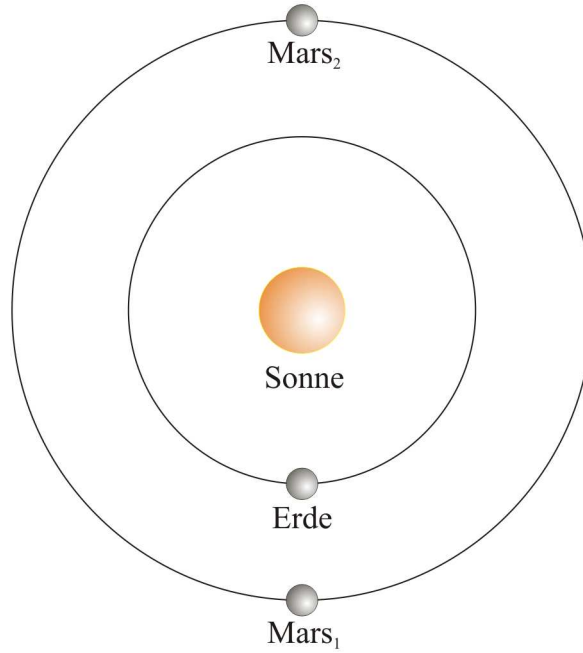


Abbildung 4.5: Konstellationen von Erde und Mars.

berührt. Haben die beiden Kreise die Radien  $r_1$  und  $r_2$  (mit  $r_1 < r_2$ ), und wird die Ellipse durch die Gleichung (2.5) beschrieben, so muss

$$\frac{p}{1+e} \leq r_1 \qquad \frac{p}{1-e} \geq r_2 \qquad (4.2)$$

gelten<sup>10</sup>. Man kann diese Ungleichungen zu

$$p \leq r_1(1+e) \qquad p \geq r_2(1-e) \qquad (4.3)$$

umformen.

Zeichnet man diese beiden Bedingungen für feste Werte von  $r_1$  und  $r_2$  zusammen mit der Bedingung (2.6) in einer  $(p, e)$ -Ebene wie in Abbildung 4.6 ein, so enthält das durch die Geraden  $e = 1$ ,  $p = r_1(1 - e)$  und  $p = r_2(1 + e)$  gebildete Dreieck die  $p$ - und  $e$ -Werte aller möglichen Übergangselipsen von einer Kreisbahn mit Radius  $r_1$  zu einer Kreisbahn mit Radius  $r_2$ <sup>11</sup>.

Der Punkt  $P_H$  stellt die mögliche Übergangselipse mit dem kleinsten  $e$ -Wert (also mit der kleinsten numerischen Exzentrizität) dar und entspricht dem Hohmann-Übergang. Dies ist offensichtlich, weil auf der Geraden  $p = r_1(1 - e)$  alle Ellipsen liegen, die den Kreis mit Radius  $r_1$  nicht schneiden, sondern nur berühren, und auf der Geraden  $p = r_2(1 + e)$  analog alle Ellipsen liegen, die den Kreis mit Radius  $r_2$  nicht schneiden, sondern nur berühren.

Betrachtet man einen Schubstoss und die dabei beteiligten Geschwindigkeiten wie in Abbildung 4.2, so folgt aus dem Kosinussatz

$$(\Delta v)^2 = v_-^2 + v_+^2 - 2v_-v_+ \cos \theta$$

<sup>10</sup>Um die Gleichung (2.5) zu benutzen, kann man das Polarkoordinatensystem immer so legen, dass der Mittelpunkt der beiden Kreise, der auch der eine Brennpunkt der Ellipse ist, im Nullpunkt liegt, dass der Punkt für  $\varphi = 0^\circ$  dem näheren Hauptscheitel (bei Bahnen um die Erde *Perigäum* genannt) entspricht, und dass der Punkt für  $\varphi = 180^\circ$  dem entfernteren Hauptscheitel (bei Bahnen um die Erde *Apogäum* genannt) entspricht.

<sup>11</sup>Die Punkte mit  $e = 1$  stellen Parabeln und keine Ellipsen dar, gehören also nicht mehr zum von uns betrachteten Bereich.

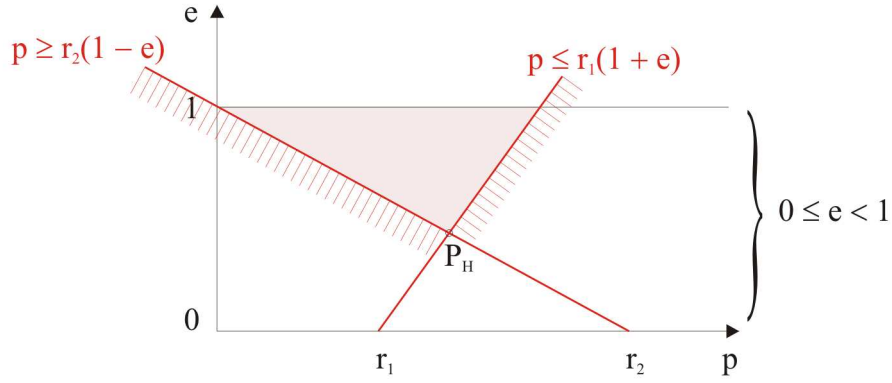


Abbildung 4.6: Bereich der  $(p, e)$ -Werte aller mögliche Übergangselipsen.

mit  $v_- = |\mathbf{v}(t_0^-)|$ ,  $v_+ = |\mathbf{v}(t_0^+)|$  und dem Winkel  $\theta$  dazwischen. Bei den betrachteten Übergängen gehört immer eine der beiden Geschwindigkeiten zu einer Kreisbahn und die andere zur Ellipsenbahn. Schreiben wir für die Geschwindigkeit auf der Kreisbahn  $v_K$  und für die Geschwindigkeit auf der Ellipsenbahn  $v_E$ , und interpretieren  $v_\theta = v_E \cos \theta$  als Länge der Projektion des zur Ellipsenbahn gehörigen Geschwindigkeitsvektors auf den zur Kreisbahn gehörigen Geschwindigkeitsvektor, so gilt

$$(\Delta v)^2 = v_E^2 + v_K^2 - 2v_K v_\theta$$

bei den beiden Schubstößen.

Die Quadrate der Geschwindigkeiten  $v_E$  und  $v_K$  können aus den Vis-Viva-Gleichungen (2.14) und (2.15) unter Benutzung von  $p = a(1 - e^2)$  gemäss (2.4) als

$$v_E^2 = \gamma m_p \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad v_K^2 = \gamma m_p \frac{1}{r}$$

geschrieben werden. Weil bei der Kreisbahn  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  senkrecht aufeinander stehen, und weil im Moment des Schubstosses die Vektoren  $\mathbf{r}$  für die Kreis- und die Ellipsenbahn zusammenfallen, folgt  $v_\theta = h/r$  aus dem Drehimpulserhaltungssatz (2.10) und

$$v_\theta = \frac{\sqrt{\gamma m_p p}}{r}$$

aus der Ellipsengleichung (2.11). Das lässt sich für die beiden Geschwindigkeitsänderungen  $\Delta v_i$  (mit  $i \in \{1, 2\}$ ) zu

$$\begin{aligned} (\Delta v_i)^2 &= \gamma m_p \left( \frac{2}{r_i} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) + \gamma m_p \frac{1}{r_i} - 2\sqrt{\gamma m_p \frac{1}{r_i}} \frac{\sqrt{\gamma m_p p}}{r_i} \\ &= \gamma m_p \left( \frac{2}{r_i} + \frac{e^2 - 1}{p} + \frac{1}{r_i} - 2\sqrt{\frac{p}{r_i r_i}} \right) = \gamma m_p \left( \frac{3}{r_i} - 2\sqrt{\frac{p}{r_i^3}} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

zusammenfassen. Weil für alle betrachteten Manöver die Radien der beiden Kreisbahnen  $r_i$  und die Planetenmasse  $m_p$  konstant sind, sind die Geschwindigkeitsänderungen  $\Delta v_i$  Funktionen der beiden Ellipsenparametern  $p$  und  $e$ , sodass wir  $\Delta v_i(p, e)$  schreiben können.

Der Treibstoffverbrauch für das ganze Manöver hängt monoton wachsend von der totalen Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_T$  ab, denn je grösser eine Geschwindigkeitsänderung ist, desto grösser muss der Schub sein, der diese bewirkt. Die totale Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta v_T(p, e) = \Delta v_1(p, e) + \Delta v_2(p, e)$$

ist die Summe der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_1(p, e)$  von der Kreisbahn mit Radius  $r_1$  zur Ellipsenbahn und der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_2(p, e)$  von der Ellipsenbahn zur Kreisbahn mit Radius  $r_2$ .

Um den Gradienten der totalen Geschwindigkeitsänderung bezüglich der Exzentrizität zu untersuchen, setzen wir die aus der Gleichung (4.4) gewonnene partielle Ableitung

$$2\Delta v_i(p, e) \frac{\partial \Delta v_i(p, e)}{\partial e} = 2\gamma m_p \frac{e}{p}$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial \Delta v_T(p, e)}{\partial e} = \frac{\partial \Delta v_1(p, e)}{\partial e} + \frac{\partial \Delta v_2(p, e)}{\partial e}$$

ein, woraus

$$\frac{\partial \Delta v_T(p, e)}{\partial e} = \gamma m_p \frac{e}{p} \left( \Delta v_1(p, e)^{-1} + \Delta v_2(p, e)^{-1} \right) > 0 \quad (4.5)$$

folgt.

Dass der Gradient der totalen Geschwindigkeitsänderung bezüglich der Exzentrizität positiv ist, heisst aber, dass an jedem Punkt  $(p_0, e_0)$  innerhalb des Bereichs der möglichen Ellipsenbahnen die totale Geschwindigkeitsänderung verkleinert werden kann, indem man den Wert  $p_0$  festhält, aber einen Wert  $e$  wählt, der kleiner als  $e_0$  ist. Der minimale Wert  $e$  für ein festes  $p_0$  liegt also auf einer oder beiden Geraden  $p = r_1(1 + e)$  und  $p = r_2(1 - e)$  in der Abbildung 4.6.

Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass der Gradient der totalen Geschwindigkeitsänderung bezüglich  $e$  positiv bleibt, wenn man die Geschwindigkeitsänderung auf diese beiden Geraden beschränkt. Dazu eliminiert man in der Gleichung (4.4) die Grösse  $p$  mit den Geradengleichungen  $p = r_1(1 + e)$  und  $p = r_2(1 - e)$ , bekommt so eine Geschwindigkeitsänderung, die nur noch von  $e$  abhängt, differenziert und zeigt ähnlich wie oben, dass die Ableitung positiv ist.

**Aufgabe 7** Führen Sie den Beweis zu Ende, falls Sie ihm bis hier mit Interesse gefolgt sind. Zeigen Sie, dass auf den beiden Geraden  $p = r_1(1 + e)$  und  $p = r_2(1 - e)$  gilt: Je kleiner die Exzentrizität  $e$  ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_T$ .

## 5 Zusammengesetzte Kegelschnitte

Hohmann-Übergänge sind Manöver, die eine Raumsonde mit zwei als instantan gedachten Schubstössen von einer Kreisbahn um einen Planeten auf eine andere Kreisbahn bringen. Lässt man mehr als zwei Schubstösse zu, führt das zu weiteren Möglichkeiten von Flugbahnen, von denen wir eine kurz betrachten. Der Hohmann-Übergang kann aber nicht nur dazu benutzt werden, um eine Sonde von einer Kreisbahn um einen Planeten in eine andere zu bringen, sondern auch, wie das ursprünglich von Hohmann in [5] vorgesehen war, um ein Raumschiff von einem Planeten zu einem anderen Planeten zu bringen. Dabei dürfen jedoch die Massen der Planeten nicht vernachlässigt werden, wie wir das mehr oder weniger stillschweigend im vorhergehenden Kapitel getan haben. Berücksichtigt man die Massen der Planeten, ändern sich die Grössen der Schubstösse, wie sie für den Hohmann-Übergang beispielsweise bei einer Reise von der Erde zum Mars benötigt werden.

Betrachtet man Flugbahnen von Raumsonden um einen Planeten, die wie Hohmann-Übergänge und ihre Verallgemeinerungen Kurskorrekturen mit kurzen, starken Schubstössen erreichen, so lassen sich diese aus Abschnitten von Kreis- und Ellipsenbahnen zusammensetzen. Nimmt man



noch die im Kapitel 3 gemachten Überlegungen zum Einflussbereich eines Himmelskörpers hinzu, so lassen sich auch allgemeinere Flugbahnen durch zusammengesetzte Abschnitte von Kegelschnitten beschreiben. Dieses Vorgehen, um Missionen von Sonden zu approximieren, wird als *Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte* (engl. *patched conic method*) bezeichnet.

## 5.1 Verallgemeinerungen der Hohmann-Bahnen

Im letzten Kapitel haben wir den Hohmann-Übergang betrachtet und gesehen, dass er unter den Manövern mit zwei Schubstößen den Treibstoffverbrauch minimiert. Eine offensichtliche Verallgemeinerung der Hohmann-Übergänge sind Flugbahnen mit mehr als nur zwei Schubstößen, wobei wir weiterhin annehmen, dass die Ausgangs- und die Zielbahn Kreise sind, und dass sich die gesamte Flugbahn der Sonde in einer Ebene befindet. (Auf den nicht-koplanaren Fall gehen Prussing und Conway [11, p. 112-114] kurz ein.)

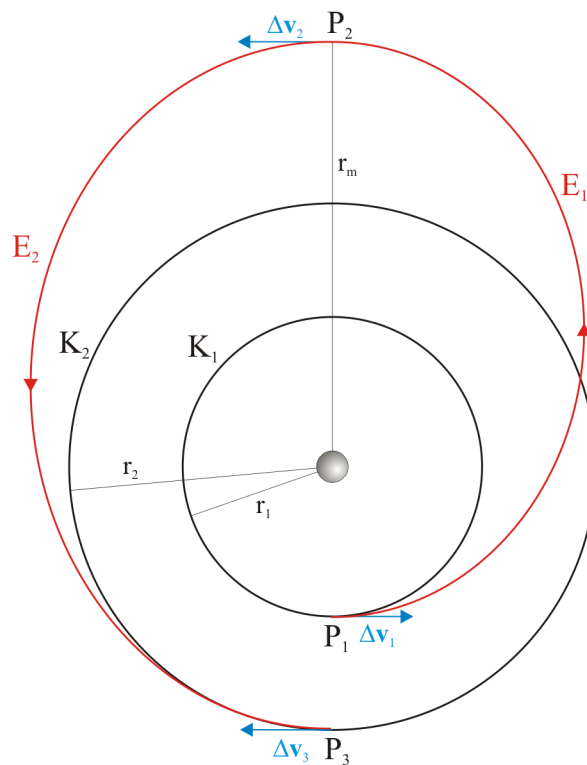


Abbildung 5.1: Bahnänderung mit drei Schubstößen.

Die Abbildung 5.1 zeigt, wie das Manöver von einer niedrigen in eine höhere Kreisbahn auch mit drei Schubstößen erreicht werden kann, was manchmal wie etwa bei Curtis [2, p. 264-268] als *bielliptischer Hohmann-Übergang* bezeichnet wird. Obwohl der Hohmann-Übergang unter den Manövern mit zwei Schubstößen den Treibstoffverbrauch minimiert, kann das Manöver mit drei Schubstößen unter Umständen – abhängig vom Verhältnis der beteiligten Radien – den Übergang von niedrigen zu höheren Kreisbahnen wie von Prussing und Conway [11, p. 108-112] gezeigt mit noch etwas weniger Treibstoff durchführen. Das Manöver braucht aber bedeutend mehr Zeit, weil die Raumsonde zuerst bei  $P_1$ , dem Ausgangspunkt des Manövers, mit einem beschleunigenden Schubstoß ( $\Delta v_1$ ) auf der Ellipse  $E_1$  zu  $P_2$ , dem entferntesten Punkt der Bahn, und dort wieder mit einem beschleunigenden Schubstoß ( $\Delta v_2$ ) auf der Ellipse  $E_2$  zurück zum Punkt  $P_3$  gelangen muss, um erst dort mit einem bremsenden Schubstoß ( $\Delta v_3$ ) auf die Kreisbahn  $K_2$  einschwenken zu können.

**Aufgabe 8** Wie in Prussing und Conway [11, p. 110-111] hergeleitet braucht eine Flugbahn mit drei Schubstößen weniger Treibstoff als der gewöhnliche Hohmann-Übergang, falls  $r_2/r_1 > 11.94$  gilt, und falls die Distanz zwischen dem Planeten und dem entferntesten Punkt der Bahn gross genug ist. Diese Bedingungen sind für den bielliptischen Hohmann-Übergang mit  $r_1 = 7'000$  km,  $r_2 = 105'000$  km und  $r_m = 210'000$  km um den Planeten Erde erfüllt. Verifizieren Sie unter Benutzung von  $\mu_p = \gamma m_p = 3.986 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$  und den Ergebnissen der Aufgabe 6, dass in diesem Fall der Hohmann-Übergang mit zwei Schubstößen mehr Treibstoff verbraucht als der bielliptische Hohmann-Übergang mit drei Schubstößen<sup>12</sup>.

Betrachtet man Flugbahnen wie in den Abbildungen 4.4 und 5.1, so lassen sie sich in Kegelschnittabschnitte einteilen, die durch die Schubstöße abgegrenzt sind. Beim gewöhnlichen Hohmann-Übergang befindet sich die Sonde auf der Kreisbahn  $K_1$ , bis sie mit einem Schubstoss in die Ellipsenbahn  $E$  und später wieder mit einem Schubstoss in die Kreisbahn  $K_2$  gestossen wird. Beim bielliptischen Hohmann-Übergang bewegt sie sich nach dem ersten Schubstoss auf der Ellipse  $E_1$ , nach dem zweiten Schubstoss auf der Ellipse  $E_2$  und nach dem dritten Schubstoss auf der äusseren Kreisbahn. Die Flugbahn besteht also aus Stücken von Kreisen und Ellipsen. Nimmt man die Aufteilung des Weltraumes in Einflussbereiche verschiedener Himmelskörper hinzu, lassen sich die Flugbahnen von Raumsonden noch in einem anderen Sinn näherungsweise aus Teilen von Kegelschnitten zusammensetzen, wie wir gleich sehen werden.

## 5.2 Der Einfluss der Planetenmassen

Im Kapitel 4 ist nur die Masse des zentralen Himmelskörpers, in dessen Gravitationsfeld sich die Raumsonde bewegt, und manchmal noch die Masse der Sonde selber, falls sie nicht vernachlässigt werden konnte, in die Berechnungen eingegangen. Die Massen der übrigen Himmelskörper hingegen sind ignoriert worden, was etwa bei einer Mission von der Erde zum Mars wie in der Abbildung 4.5 nicht zu korrekten Flugbahnrechnungen führt.

Um die Massen und damit auch die Gravitation der anderen Himmelskörper einzubeziehen, betrachten wir die Erde im Sonnensystem aus zwei Perspektiven. Einerseits misst der Radius des Einflussbereiches der Erde gemäss Prussing und Conway [11, p. 125] etwa  $9.24 \cdot 10^5$  km, was ungefähr 145 Erdradien entspricht. Die Erde ist also innerhalb ihres Einflussbereiches ein verschwindend kleiner Punkt. Der Abstand der Erde von der Sonne andererseits beträgt wieder nach [11, p. 188] etwa  $1.496 \cdot 10^8$  km, was gut 160 mal der Radius des Einflussbereiches der Erde ist. Im Sonnensystem ist der Einflussbereich der Erde also ebenfalls ein verschwindend kleiner Punkt. Abbildung 5.2 zeigt diese beiden Perspektiven etwas übertrieben dargestellt. Links ist der Planet und sein Einflussbereich ein Punkt, an dem sich die Flugbahn der Sonde abrupt ändert, während rechts der Einflussbereich des Planeten vergrössert dargestellt ist, sodass die abrupte Richtungsänderung als Stück einer Hyperbelbahn verständlich wird. Diese doppelte Sichtweise, die den Einflussbereich eines Planeten je nach Bezugssystem sowohl praktisch unendlich gross als auch verschwindend klein sieht, ist nach Prussing und Conway [11, p. 124-129] die wesentliche Idee hinter der Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte. Zeichnet man eine Flugbahn auf, so lässt sie sich sowohl bei einem groben Massstab in der Grössenordnung des Sonnensystems als auch in feinerem Massstab aus Abschnitten von Kegelschnitten zusammensetzen, weil sich nach der im Kapitel 3 besprochenen Näherung eine Sonde immer im Einflussbereich genau eines Himmelskörpers befindet.

Der Hyperbelabschnitt in der Vergrösserung auf der rechten Seite der Abbildung 5.2 zeigt die Bahn der Sonde, wenn sie sich im Einflussbereich des Planeten befindet. Weil der Planet im

<sup>12</sup>Diese Aufgabe stammt aus Curtis [2, Example 6.3 p. 265-268].

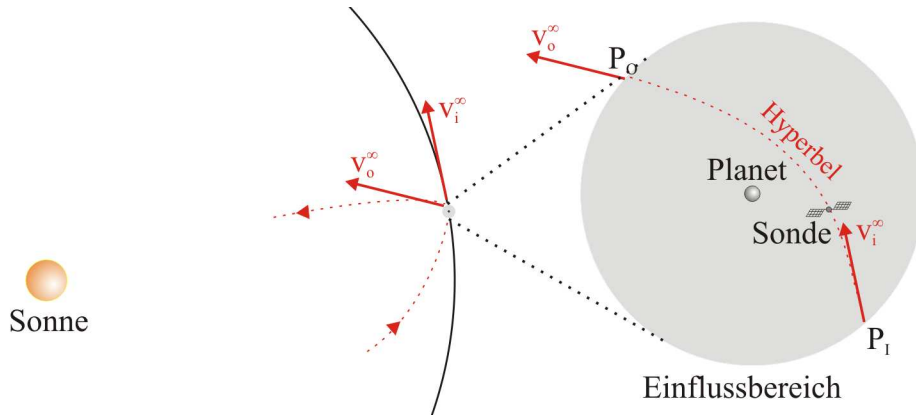


Abbildung 5.2: Zusammengesetzte Flugbahn.

Vergleich zu seinem Einflussbereich sehr klein ist, kann man den Einflussbereich aus der Sicht des Planeten als unendlich gross betrachten. Die Raumsonde tritt beim Punkt  $P_I$  praktisch mit derselben Geschwindigkeit  $v_i^\infty$ , wie wenn sie aus dem Unendlichen käme, in den Einflussbereich des Planeten ein, wird von dessen Anziehungskraft abgelenkt und verlässt den Einflussbereich beim Punkt  $P_O$  mit der Geschwindigkeit  $v_o^\infty$ , die wieder praktisch dieselbe Geschwindigkeit wie im Unendlichen ist. Diese beiden Geschwindigkeiten relativ zum Planeten sind wegen dem Energieerhaltungssatz betragsmässig gleich gross.

Die Geschwindigkeitsvektoren beziehen sich auf einen Beobachter, der sich in einem Inertialsystem befindet, in dem der Planet ruht<sup>13</sup>. Wenn man die Bewegung der Sonde von der Sonne aus beobachtet, so haben sie jedoch sowohl eine andere Richtung als auch einen anderen Betrag. Ist  $v_{ba}$  der Vektor der Geschwindigkeit des Körpers  $a$  relativ zum Körper  $b$ , so gilt

$$\mathbf{v}_{sr} = \mathbf{v}_{sp} + \mathbf{v}_{pr} \quad (5.1)$$

für die Sonne  $s$ , den Planeten  $p$  und die Raumsonde  $r$ . Somit sieht ein Beobachter auf der Sonne, wie die Sonde mit der Geschwindigkeit  $v_i^\infty + v_{sp}$  in den Einflussbereich des Planeten eintritt und später mit der Geschwindigkeit  $v_o^\infty + v_{sp}$  wieder austritt. Dass die Geschwindigkeiten je nach Standpunkt unterschiedlich sind, ermöglicht den Gravitationskick und hat deshalb Konsequenzen, die man nicht erwartet hat, wie im Kapitel 6 besprochen wird.

### 5.3 Hohmann-Bahnen unter Berücksichtigung der Planetenmassen

Bevor wir uns aber damit beschäftigen, überlegen wir uns, was das für den Hohmann-Übergang von der Erde zu einem Nachbarplaneten bedeutet, wobei wir annehmen, dass sich die Sonde bereits auf einer Parkbahn um die Erde befindet. Abbildung 5.3 zeigt eine Mission zum Mars in der Übersicht links und in der Vergrösserung rechts, die wir im Folgenden kurz besprechen werden, während Prussing und Conway [11, p. 126-128] eine Mission zur Venus eingehender behandeln.

Die Raumsonde befindet sich im Einflussbereich der Erde, die sie auf einer Parkbahn umkreist. Am richtigen Punkt auf der Umlaufbahn bekommt sie einen Schubstoss  $\Delta \mathbf{v}$ , der sie auf einer Hyperbelbahn so bis zum Rand des Einflussbereiches der Erde bringt, dass dort die resultierende Geschwindigkeit relativ zur Sonne sowohl betragsmässig als auch in Bezug auf die Richtung

<sup>13</sup>Weil sich der Planet auf einer Ellipsenbahn um die Sonne bewegt, gibt es streng genommen kein Inertialsystem, in dem er ruht. Während der kurzen Zeitdauer der Begegnung der Sonde mit dem Planeten darf man sich aber die Planetenbahn in guter Näherung als geradlinig und unbeschleunigt vorstellen.

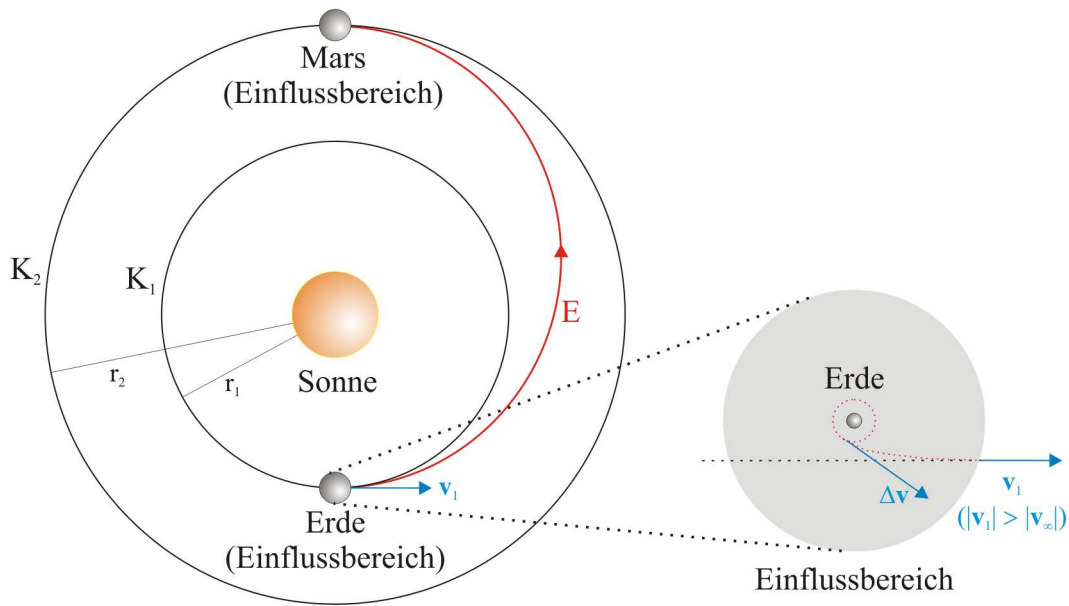


Abbildung 5.3: Hohmann-Bahn von der Erde zum Mars.

gerade das passende  $\mathbf{v}_1$  in Abbildung 5.3 für den Hohmann-Übergang ist. Wir beschränken uns hier darauf, in der folgenden Aufgabe den Betrag der minimalen Geschwindigkeit  $v_\infty$  für den Wegflug aus der Erdumlaufbahn zum Rand des Einflussbereiches der Erde zu bestimmen und verweisen für die übrigen Aspekte des Manövers auf die Bearbeitung bei Prussing und Conway [11, p. 128].

**Aufgabe 9** Eine Raumsonde befindet sich in 200 km Höhe auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde, für die  $\mu_p = \gamma m_p = 3.986 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$  gilt, und deren Radius  $6.378 \cdot 10^3 \text{ km}$  ist. Berechnen Sie, welche Geschwindigkeitsänderung durch einen Schubstoss die Sonde mindestens braucht, um den Einflussbereich der Erde verlassen zu können.

Hat die Sonde mit der eben berechneten Geschwindigkeit den Rand des Einflussbereiches der Erde erreicht, steht sie relativ zur Erde still, beziehungsweise bewegt sich relativ zur Sonne mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Erde. Es gilt also zu diesem Zeitpunkt

$$\mathbf{v}_{pr} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v}_{sr} = \mathbf{v}_{sp}$$

und die Raumsonde bewegt sich auf derselben Bahn wie die Erde um die Sonne.

Damit die Sonde beim Verlassen des Einflussbereiches der Erde die für die Hohmann-Bahn nötige Geschwindigkeit tangential zur Erdbahn hat, muss sie auf der Parkbahn um die Erde einen stärkeren Schubstoss bekommen. Gemäss (5.1) gilt

$$v_{sr} = v_{sp} + v_{pr}$$

für den Betrag der Geschwindigkeit relativ zur Sonne. Ist also  $v_{sr}$  beim Verlassen des Einflussbereichs der Erde gerade so gross wie die für den Hohmann-Übergang benötigte Geschwindigkeit  $|\mathbf{v}_1|$ , so bewegt sich die Sonde ohne zusätzlichen Schub zum Mars.

Wir können die Bewegung der Sonde und die entsprechenden Kegelschnittstücke wie folgt zusammenfassen. Anfänglich befindet sich die Raumsonde auf der kreisförmigen Parkbahn um die Erde. Jetzt bekommt sie einen Schubstoss  $\Delta \mathbf{v}$ , der sie auf einer Hyperbel so an den Rand

des Einflussbereichs der Erde bringt, dass die dort resultierende Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  tangential zur Erdbahn verläuft und den Betrag hat, den sie für die Hohmann-Bahn zum Mars benötigt. (Beachte, dass die Asymptote an diese Hyperbelbahn parallel zur Tangente an die Erdbahn verlaufen muss, damit die resultierende Geschwindigkeit die richtige Richtung hat.) Nach dem Verlassen des Einflussbereichs der Erde fliegt die Sonde auf der Ellipse  $E$  in der Abbildung 5.3 zu ihrem Bestimmungsort Mars.

## 6 Gravitationskick

Weil sich die Planeten relativ zur Sonne bewegen, kann man die Bewegung einer Raumsonde im Einflussbereich eines Planeten entweder relativ zu diesem Planeten ( $\mathbf{v}_{pr}$ ) oder aber relativ zur Sonne ( $\mathbf{v}_{sr}$ ) betrachten. Die Geschwindigkeiten sind verschieden, und die Beziehung (5.1) übersetzt zwischen den beiden Sichtweisen. Der Umstand, dass diese Geschwindigkeiten verschieden gesehen werden, liegt dem Phänomen zu Grunde, das nicht nur im englischen, sondern häufig auch im deutschen Sprachgebrauch als Gravity-Assist, Swingby oder Flyby bezeichnet wird, und das wir *Gravitationskick* nennen wollen. Im Folgenden besprechen wir dieses Manöver, wobei wir uns weitgehend an die Behandlung bei Prussing und Conway [11, p. 129-137] halten werden, aber an dieser Stelle auch auf die ausführlicheren und empfehlenswerten Darstellungen von Curtis [2, p. 375-386] und von Messerschmid und Fasoulas [6, p. 152-160] hinweisen möchten.

### 6.1 Vereinfachte Darstellung

Um die Funktionsweise des Gravitationskicks zu illustrieren, machen wir die vereinfachende Annahme, dass eine Raumsonde einen Planeten aus einer Richtung anfliegt, durch eine fiktive Kraft geführt in einem Halbkreis um diesen kurvt und anschliessend in der Gegenrichtung wieder wegfliegt. Dabei betrachten wir die Geschwindigkeitsvektoren einerseits aus der Sicht des Planeten und andererseits aus der Sicht der Sonne<sup>14</sup>.

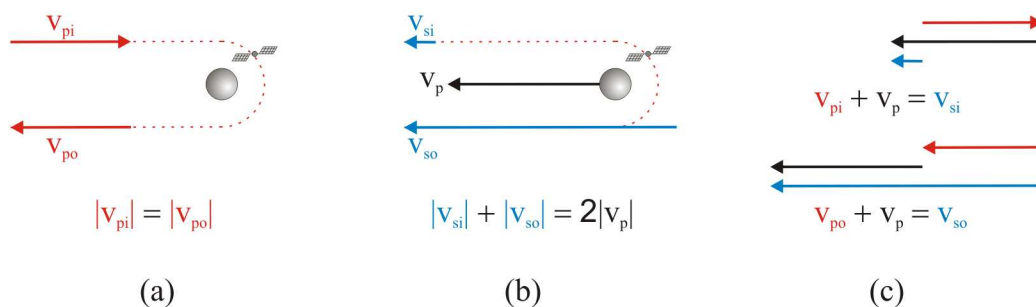


Abbildung 6.1: Vereinfachte Darstellung des Gravitationskicks.

Die Abbildung 6.1 zeigt (a) die Flugbahn vom Planeten aus gesehen, (b) die Flugbahn von der Sonne aus gesehen und (c) die resultierende Geschwindigkeitsvektoraddition aus beiden Sichten. Die vom Planeten  $p$  gesehene eingehende Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{pi}$  und ausgehende Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{po}$  sind betragsmässig gleich wegen dem Energieerhaltungssatz. Für einen Beobachter auf dem Planeten kommt die Sonde mit einer gewissen Geschwindigkeit auf ihn zu und verschwindet anschliessend in entgegengesetzter Richtung mit der gleichen Geschwindigkeit wieder. Weil

<sup>14</sup>Mit dieser etwas unpräzisen Sprechweise sind Inertialsysteme gemeint, in denen der Beobachter und der Planet beziehungsweise der Beobachter und die Sonne ruhen. Dass es eigentlich kein solches System für den Planeten gibt, haben wir oben erwähnt. Weil sich die Sonne um das Zentrum der Milchstrasse bewegt, gibt es streng genommen aber auch kein solches System für die Sonne.

gemäss (5.1) aus der Sicht der Sonne die Geschwindigkeit  $v_p$  des Planeten relativ zur Sonne zu diesen Geschwindigkeiten hinzugezählt werden muss, sieht es für einen Beobachter auf der Sonne ganz anders aus. Die Sonde fliegt mit der langsamen Geschwindigkeit  $v_{si}$  in gleicher Richtung wie der Planet, wird von diesem eingeholt und von der fiktiven Kraft mitgerissen, sodass sie anschliessend mit der Geschwindigkeit  $v_{so}$  schneller als der Planet von diesem wegfliegt. Die Raumsonde "gewinnt" also mehr als die Geschwindigkeit des Planeten relativ zur Sonne dazu.

Die Gravitation verhält sich nicht so wie diese fiktive Kraft, denn eine Sonde verlässt den Planeten nach einer Begegnung mit dessen Einflussbereich in Wirklichkeit nicht in entgegengesetzter Richtung, und sie umfliegt den Planeten auch nicht auf einem Halbkreis. Trotzdem illustriert diese Vereinfachung das dem Gravitationskick zu Grunde liegende Prinzip der Vektoraddition der Geschwindigkeiten.

### 6.2 Prinzip des Gravitationskicks

Eine realistischere Veranschaulichung des Gravitationskicks zeigt die Abbildung 6.2. Ähnlich wie in der vereinfachten Darstellung ändert die Sonde aus der Sicht des Planeten die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit, während sie aus der Sicht der Sonne auch den Betrag ändert.

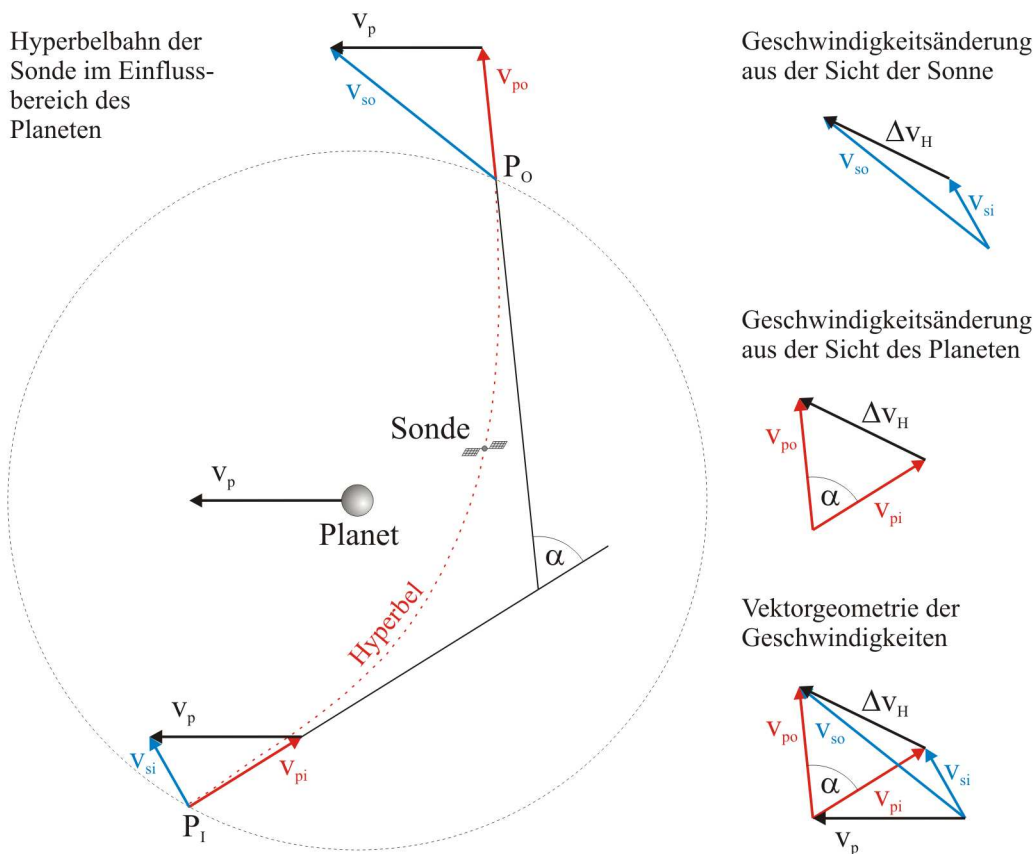


Abbildung 6.2: Gravitationskick.

Die Situation auf der linken Seite der Abbildung 6.2 entspricht bis auf die Tatsache, dass sich der Planet mit der Geschwindigkeit  $v_p$  relativ zur Sonne bewegt, der Situation auf der rechten Seite in der Abbildung 5.2. Aus der Sicht des Planeten gerät die Sonde beim Punkt  $P_I$  mit der Geschwindigkeit  $v_{pi} = v_i^\infty$  relativ zum Planeten in dessen Einflussbereich, wird durch die

Gravitation auf einer Hyperbelbahn abgelenkt und verlässt den Einflussbereich bei  $P_O$  wieder mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{po} = \mathbf{v}_o^\infty$ , wobei wie bereits erwähnt

$$|\mathbf{v}_{pi}| = |\mathbf{v}_{po}| \quad (6.1)$$

wegen dem Energieerhaltungssatz gilt. Aus der Sicht der Sonne hingegen ist die Geschwindigkeit der Sonde  $\mathbf{v}_{si}$  beim Punkt  $P_I$  beziehungsweise  $\mathbf{v}_{so}$  beim Punkt  $P_O$  und es gilt

$$\mathbf{v}_{si} = \mathbf{v}_{pi} + \mathbf{v}_p \quad \mathbf{v}_{so} = \mathbf{v}_{po} + \mathbf{v}_p \quad (6.2)$$

wegen (5.1).

Die Sonde wird durch die Begegnung mit dem Gravitationsfeld des Planeten um den Winkel  $\alpha$  abgelenkt. Aus der Sicht des Planeten beziehungsweise aus der Sicht der Sonne setzt sich die resultierende Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\mathbf{v}_H$  auf der Hyperbelbahn wie auf der rechten Seite der Abbildung 6.2 skizziert zusammen. Der Vektor  $\Delta\mathbf{v}_H$  ist natürlich aus beiden Perspektiven gleich gross und gleich gerichtet, wie man sich durch Subtraktion der Gleichungen (6.2) vergewissern kann. Aus der Sicht des Planeten bilden die drei Vektoren  $\mathbf{v}_{pi}$ ,  $\mathbf{v}_{po}$  und  $\Delta\mathbf{v}_H$  wegen (6.1) ein gleichschenkliges Dreieck. Mit  $|\mathbf{v}_{pi}| = |\mathbf{v}_{po}| = v_\infty$  lässt sich somit

$$|\Delta\mathbf{v}_H| = 2v_\infty \sin \frac{\alpha}{2} \quad (6.3)$$

herleiten.

**Aufgabe 10** Diskutieren Sie die Gleichung (6.3) unter Berücksichtigung der Geometrie der Geschwindigkeiten in der Abbildung 6.2 und begründen Sie, weshalb bei festem  $v_\infty$  der theoretische Maximalwert  $|\Delta\mathbf{v}_H| = 2v_\infty$  nicht erreicht werden kann.

Der Gravitationskick kann sowohl dazu benutzt werden, um für eine längere Mission zu den entfernten Planeten im Sonnensystem die nötige Geschwindigkeit zu gewinnen, als auch dazu, um eine Sonde bei der Rückkehr zur Erde an einem Nachbarplaneten (oder am Mond) abzubremesen. Anders ausgedrückt heisst das, dass ein solches Manöver mithelfen kann, die Geschwindigkeit relativ zur Sonne betragsmässig zu vergrössern oder aber zu verringern. Wie man sich leicht überlegt, bedeutet ein Vorbeiflug vor einem Planeten ein Abbremesen, während ein Vorbeiflug hinter dem Planeten zu einer Beschleunigung führt.

### 6.3 Nutzung des Gravitationskicks

Im Jahre 1961 wendete ein Mathematikstudent in Kalifornien numerische Methoden auf die Berechnung des Dreikörperproblems an, wie man bei Messerschmid und Fasoulas [6, p. 152] nachlesen kann, und entdeckte dabei den Gravitationskick, ohne den viele interplanetare Missionen der letzten Jahrzehnte nicht möglich gewesen wären. Nicht nur die Dauer mancher Unternehmen wäre ein Problem gewesen, sondern auch die benötigte Treibstoffmenge hätte gewisse Expeditionen verunmöglicht.

Die 1962 gestartete Raumsonde Mariner 2 überprüfte die Wirksamkeit des Gravitationskicks bei einem Vorbeiflug an der Venus. Aber erst die im November 1973 gestartete Sonde Mariner 10 setzte den Gravitationskick zum Erreichen eines anderen Planeten ein. Sie flog nach einem bremsenden Venus-Swingby am Merkur vorbei. Seither gehört der Gravity-Assist zum Repertoire. Die im August 1977 gestartete Voyager 2 Mission nutzte den Effekt in grossem Stil, führte beschleunigende Swingby-Manöver am Jupiter (1979), am Saturn (1981), am Uranus (1986) und am Neptun (1989) durch und hat so nach Messerschmid und Fasoulas [6, p. 160]

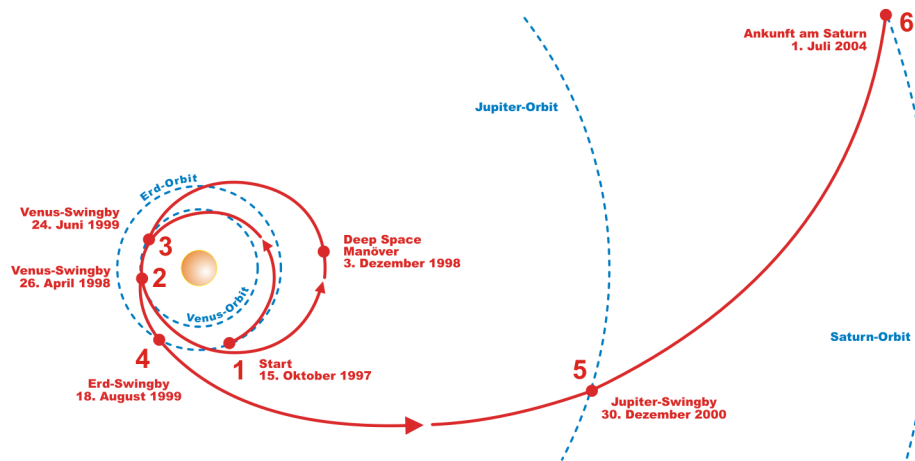


Abbildung 6.3: Flugbahn der Cassini/Huygens-Mission.

genügend Geschwindigkeit gewonnen, um das Sonnensystem zu verlassen. Die im Oktober 1997 gestartete Cassini/Huygens-Mission, deren Flugbahn in Abbildung 6.3 gezeigt ist, hat nach zwei Gravitationskicks an der Venus (1998 und 1999), einem an der Erde (1999) und einem am Jupiter (2000) im Juli 2004 wie geplant den Saturn erreicht, wie man der ausführlichen Broschüre des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt [3] und der kurzen Übersicht der NASA [7] entnehmen kann.

## 7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte vorgestellt, nachdem wir das benötigte Rüstzeug eingeführt hatten. Wir sind dabei mehrheitlich der Darstellung von Prussing und Conway [11] gefolgt. Für eine vertiefte Beschäftigung mit dem Thema Raumfahrt im Allgemeinen und dem Entwurf von Flugbahnen für Raumsonden im Speziellen empfehlen wir das deutsch geschriebene Buch [6] von Messerschmid und Fasoulas, das sich neben der Bahnmechanik sehr ausführlich anderen Themen wie der Herstellung von Raketen widmet, und das englisch geschriebene Buch [2] von Curtis, das eingehend die Bahnmechanik behandelt, den anderen Themen wie der Raketengleichung jedoch weniger Platz einräumt, dafür aber zahlreiche nützliche MATLAB-Algorithmen zur Verfügung stellt.

Wir beschreiben im Folgenden die Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte in einer Übersicht, also mit etwas Abstand, um die wesentlichen Elemente hervorzuheben. Wir diskutieren aber auch den Bezug des Themas zum gymnasialen Unterricht, denn die Raumfahrt eignet sich sehr gut als Stoff für ein Projekt auf dieser Schulstufe.

### 7.1 Übersicht über die Methode

Die Bewegung der Planeten und künstlichen Satelliten oder Raumsonden lassen sich – abgesehen von relativistischen Effekten, die in der Raumfahrt (noch) kaum eine Rolle spielen – durch die Newton'schen Gesetze der Mechanik und der Gravitation beschreiben. Die Kepler'schen Gesetze, die daraus ableitbar sind, beschreiben die Bewegung eines Himmelskörpers mit einer kleinen Masse um einen Zentralkörper, der eine viel grössere Masse hat, betreffen also das Zweikörperproblem. Im Sonnensystem bewegt sich aber nicht ein Planet um die Sonne, sondern es sind mehrere Planeten mit ihren Monden. Um die Bewegung all dieser Himmelskörper exakt



zu beschreiben, müsste man das n-Körperproblem lösen können, was aber nicht möglich ist. In den vergangenen Jahrhunderten ist von verschiedensten Seiten intensiv daran gearbeitet worden, und es sind Näherungslösungen entwickelt worden, mit denen die Bewegungen im Sonnensystem genügend genau berechnet werden konnten.

**Aufgabe 11** Bestimmen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Erde relativ zur Sonne bewegt. Weil die numerische Exzentrizität nur 0.0167 beträgt, können Sie eine Kreisbahn mit Radius  $r = 1.496 \cdot 10^8$  km annehmen, und weil die Masse der Sonne mehr als 10'000-mal grösser als diejenige der Erde ist, dürfen Sie die Erdmasse als vernachlässigbar betrachten und mit  $\mu_s = \gamma m_s = 1.327 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$  für die Sonne allein rechnen.

Während vorher nur die Bewegung der Planeten und Monde in Betracht gezogen worden war, bearbeitete seit Ende des vorletzten Jahrhunderts und bis kurz vor dem Zweiten Weltkrieg eine kleine Gruppe von "enthusiastischen Ingenieuren" [6, p. 4] das "Raumfahrtproblem". Etliche Resultate dieser von der Möglichkeit der Raumfahrt überzeugten Wissenschaftler wie die nach Ziolkowsky benannte Raketengleichung und der im Kapitel 4 besprochene Hohmann-Übergang gehören bis heute zum Grundwissen jedes Raumfahrtspezialisten. Während es zahlreiche Experimente zur Erprobung möglicher Antriebsraketen gab, blieben die Berechnungen bezüglich der Flugbahnmechanik hingegen reine Theorie, weil es noch keine Raumfahrt gab.

Als Ende der 50er-Jahre mit Sputnik die Raumfahrt Realität wurde, war sie vorwiegend ein Prestigeunternehmen mit einem wissenschaftlichen Anstrich und blieb das auch während der 60er-Jahre, obwohl die wissenschaftliche Seite immer wichtiger wurde. Mit der Kommerzialisierung wurden Umlaufbahnen um die Erde und deren Berechnung Routine. Die Planung interplanetarer Missionen für die wissenschaftliche Erforschung des Sonnensystems jedoch ist bis heute eine schwierige Aufgabe geblieben. Vorstudien mit angenäherten Flugbahnen, geschätzten Flugzeiten und ungefährem Treibstoffverbrauch sind nötig, bis die endgültige Mission feststeht und exakt durchgerechnet werden kann. Solche Entwürfe möchte man möglichst ohne aufwändige Rechnungen schnell aufstellen können, was nicht einfach ist, weil eben das n-Körperproblem nicht lösbar ist. Hier hilft die Methode der zusammengesetzten Kegelschnitte, denn sie approximiert das n-Körperproblem durch eine Reihe von Zweikörperproblemen.

Geht man von unendlich kurzen und unendlich starken Schubstößen aus, um die Flugbahn einer Raumsonde instantan zu ändern, und bestimmt man den Einflussbereich der Gravitation von Himmelskörpern, wie wir das in Kapitel 3 getan haben, so lassen sich die Flugbahnen von Raumsonden durch Stücke von Kegelschnitten approximieren. Betrachtet man eine geplante interplanetare Mission in einem groben Massstab, so sind diese Einflussbereiche Punkte, an denen die Flugbahn einen Knick hat. Betrachtet man sie hingegen mit einem feineren Massstab, so sind sie endliche Sphären, durch welche die Sonde auf einer Hyperbelbahn fliegt, und in welchen sie infolge des Gravitationskicks ihre Geschwindigkeiten relativ zur Sonne ändern.

Sieht man die Einflussbereiche der Planeten als Punkte, so ändern sich dort die Geschwindigkeiten wegen dem Gravitationskickeffekt abrupt, falls sich die Sonde einem Planeten genügend nähert. Die Begegnung mit ihm hat in einem Massstab betrachtet, der das ganze Sonnensystem übersichtlich zeigt, also die gleiche Wirkung wie ein geeignet gewählter Schubstoss aus einem Triebwerk der Sonde, hat aber den Vorteil, dass die Sonde den Treibstoff dazu mit seinem nicht zu unterschätzenden Gewicht nicht mitführen muss.

Weil der Einflussbereich in einem Massstab, der für den Planeten passend ist, als unendlich gross betrachtet werden kann, lassen sich die Geschwindigkeiten der Sonde beim Ein- und Austritt als die Geschwindigkeiten approximieren, die sie auf der Hyperbelbahn im Unendlichen hätte. Der Einflussbereich des Planeten wird also als unendlicher Raum betrachtet, in dem sich die Sonde nur im Gravitationsfeld dieses Planeten befindet. Solange sich die Sonde im Einflussbereich des

Planeten bewegt, bilden Planet und Sonde ein Zweikörperproblem, bei dem die Masse der Sonde im Vergleich zur Masse des Planeten vernachlässigt werden kann.

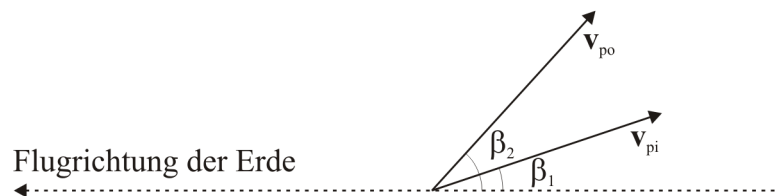


Abbildung 7.1: Beobachtete Geschwindigkeiten einer Sonde.

**Aufgabe 12** Eine Raumsonde auf einer interplanetaren Mission tritt von der Venus kommend mit der beobachteten Geschwindigkeit  $|\mathbf{v}_{pi}| = 23.5$  km/s wie in der Abbildung 7.1 skizziert in den Einflussbereich der Erde ein. Für die Winkel aus der Sicht der Erde gilt  $\beta_1 = 18.5^\circ$  und  $\beta_2 = 47.6^\circ$ . Berechnen Sie die Ablenkung sowohl aus der Sicht der Erde wie auch aus der Sicht der Sonne, und bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Aufgabe 11 die Eintrittsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{si}$  und Austrittsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{so}$  der Raumsonde in den Einflussbereich der Erde relative zur Sonne. (Rechnen Sie auf eine Kommastelle genau.)

## 7.2 Aspekte des gymnasialen Unterrichts

Weil die Raumfahrt auch noch vierzig Jahre nach der ersten Mondlandung die Menschheit fasziniert, lassen sich Gymnasiastinnen und Gymnasiasten leicht von ihr begeistern. Das lässt sich für einen motivierten Schulunterricht ausnutzen. Wir sehen neben Aufgaben aus diesem Gebiet im normalen Mathematik- und Physikunterricht, die sich selbstverständlich immer gut eignen, vor allem eine eingehendere Behandlung einzelner Teilthemen in einer Projektwoche oder aber eine intensive Bearbeitung im Rahmen einer Maturarbeit.

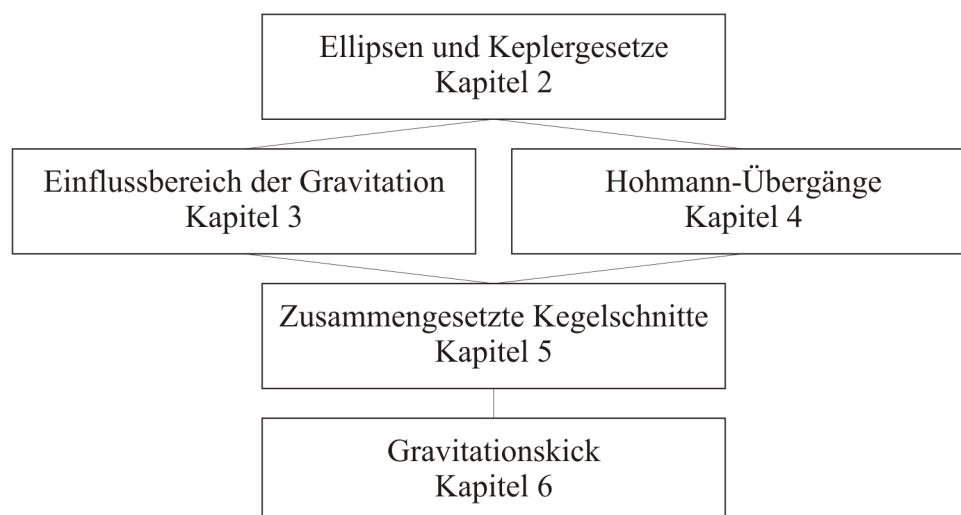


Abbildung 7.2: Übersicht über die Kapitel und ihre Abhängigkeiten.

Für eine interdisziplinäre Aufbereitung des Stoffes bietet sich eine Zusammenarbeit zwischen Mathematik- und Physikunterricht besonders an. Während die Mathematik je nach Altersstufe die Grundlagen wie Ellipsengleichung und Vektorrechnung behandelt, kann die Physik die Newton'sche Mechanik und Gravitationstheorie mit den Kepler'schen Gesetzen bereitstellen. Dabei

brauchen jedoch nicht alle in der vorliegenden Arbeit behandelten Themen durchgenommen zu werden. (Vor allem gewisse Herleitungen und Beweise, die Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung benutzen, können problemlos weggelassen werden.) Um die Planung einer Bearbeitung des Stoffes zu erleichtern, zeigt die Abbildung 7.2 eine Übersicht über die Kapitel und ihre Abhängigkeiten.

Die Raumfahrt als Thema kann interdisziplinär aber auch mit anderen Fächern als der Physik gekoppelt werden. Die Geschichte des Kalten Krieges mit dem riesigen Schock in den USA, den die Sowjetunion 1957 mit dem erfolgreichen Start von Sputnik auslöste, und der anschliessend zum Rennen um die Vorherrschaft im Weltall führte, lässt sich sehr gut mit der Bearbeitung einzelner Aspekte dieses Unternehmens in der Mathematik verbinden. Auch die Behandlung im Biologie- oder Geographieunterricht ist möglich, denn es können beispielsweise die ausführlichen Berechnungen beziehungsweise Abschätzungen von Hohmann in [5, p. 51-54] für die auf einer bemannten Mission benötigten Mittel wie Nahrung und Sauerstoff mit effektiven Missionen verglichen werden, oder aber der oben erwähnte, von Stuhlinger stammende Vergleich der Eroberung des Weltalls mit der Eroberung des trockenen Landes durch die Wassertiere vor 300 Millionen Jahren kann ausgearbeitet werden, auch wenn das nur am Rande mit dem zusammenhängt, was wir in der vorliegenden Arbeit behandelt haben.

Als Maturarbeiten möchten wir zwei Themen vorschlagen. Einerseits eignen sich grosse Teile des hier bearbeiteten Stoffes, um von einer Maturandin oder einem Maturanden mit mathematisch-physikalischen Interessen für ein breiteres Publikum verständlich ausgearbeitet zu werden. Andererseits ist eine Biographie von Walter Hohmann mit einer Würdigung seiner Arbeit ein durchaus lohnendes Unterfangen, bei dem man sich leicht von dessen Enthusiasmus und von dessen wissenschaftlicher Exaktheit anstecken lassen kann.

Die Raumfahrt ist nicht nur ein interessantes Gebiet, sondern hat durch ihre Anwendungen auch einen ganz handfesten Bezug zu unserem Alltag. Messerschmid und Fasoulas drücken im Vorwort zur vor neun Jahren erschienenen ersten Auflage von [6] ihre Überzeugung aus, dass die Informationsgesellschaft im eben beginnenden Jahrhundert in erheblichem Masse weltraumgestützt sein werde, und dass neue Formen des Transports und der Kommunikation eine wichtige Rolle spielen werden. Sie schreiben weiter:

Die Geschwindigkeit dieser Entwicklung in der Raumfahrt und ihrer Nutzung wird erheblich davon abhängen, wie die zugrunde liegenden Technologien vermittelt, verstanden und schliesslich als Teil unserer Kultur akzeptiert werden.

Zu dieser Vermittlung, zu diesem Verständnis und zu dieser Akzeptanz möchten wir mit diesem Lesetext einen Beitrag leisten.

## Literatur

- [1] Battin, R. H.: An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, AIAA Education Series, New York 1987, American Institute of Aeronautics and Astronautics, ISBN 0-930403-25-8.
- [2] Curtis, H.D.: Orbital Mechanics for Engineering Students, Burlington 2005, Elsevier, ISBN 0-7506-6169-0.
- [3] Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR): Cassini/Huygens – Mission zum Saturn, Doc. PR-200-w5d-06/2004, 2004, URL: [http://www.dlr.de/saturn/PortalData/9/Resources/saturn/cassini-huygens\\_brosch.pdf](http://www.dlr.de/saturn/PortalData/9/Resources/saturn/cassini-huygens_brosch.pdf) (Zugriff 16. März 2009).
- [4] Hockney, R. W., Eastwood, J. W.: Computer Simulation Using Particles, Bristol und Philadelphia 1988, Adolf Hilger imprint by IOP Publishing Ltd., ISBN 0-85274-392-0.
- [5] Hohmann, W.: Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, München und Berlin 1925, Verlag R. Oldenbourg.
- [6] Messerschmid, E., Fasoulas, S.: Raumfahrtsysteme, Berlin und Heidelberg 2009 (3. Auflage), Springer Verlag, ISBN 978-3-540-77699-4.
- [7] National Aeronautics and Space Administration (NASA): The Cassini Mission to Saturn, Doc. JPL 400-843 10/99, 1999, URL: [http://saturn.jpl.nasa.gov/multimedia/products/pdfs/cassini\\_msn.pdf](http://saturn.jpl.nasa.gov/multimedia/products/pdfs/cassini_msn.pdf) (Zugriff 16. März 2009).
- [8] Oberth, H.: Die Rakete zu den Planetenräumen, München und Berlin 1923, Verlag R. Oldenbourg.
- [9] Oberth, H.: Der Weltraumspiegel, Bukarest 1978, Kriterion Verlag.
- [10] Prussing, J. E.: Simple Proof of the Global Optimality of the Hohmann Transfer, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 15(4), 1992, (p. 1037-1038), DOI 10.2514/3.20941.
- [11] Prussing, J. E., Conway, B. A.: Orbital Mechanics, New York und Oxford 1993, Oxford University Press, ISBN 0-19-507834-9.
- [12] Schlingloff, H.: Astronautical Engineering, Bad Abbach 2005, Ingenieurbüro Dr.Schlingloff Publications, ISBN 3-00-016289-5.
- [13] Tan, A.: Theory of Orbital Motion, Singapore 2008, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ISBN 978-981-270-912-7 (pbk.), 978-981-270-911-0 (hbk.).
- [14] Valier, M.: Der Vorstoss in den Weltenraum, München und Berlin 1924, Verlag R. Oldenbourg.
- [15] Wiss, D.: SMART-1: mit alternativer Flugtechnik zum Mond, Sterne und Weltraum 43, 2004, (p. 24-28), [http://www.wissenschaft-online.de/artikel/833978&\\_wis=1](http://www.wissenschaft-online.de/artikel/833978&_wis=1) (Zugriff 16. März 2009).

### Bildquellen:

1. Abbildung 1.1 von [http://www.nmspacemuseum.org/halloffame/images.php?image\\_id=13](http://www.nmspacemuseum.org/halloffame/images.php?image_id=13) (Zugriff 25. Mai 2009), Ausschnitt.
2. Abbildung 6.3 von [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9d/Cassini\\_interplanetary\\_trajectory\\_DE.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9d/Cassini_interplanetary_trajectory_DE.svg) (Zugriff 25. Mai 2009), Bearbeitung.

## Lösungen

**Lösung 1** Für die Seiten des Dreiecks  $F_1F_2P$  gilt:  $\overline{F_1F_2} = 2c$ ,  $\overline{F_2P} = r$  und  $\overline{F_1P} = 2a - r$ . Aus dem Kosinussatz folgt

$$(2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr \cos(180^\circ - \varphi) = 4c^2 + r^2 + 4cr \cos \varphi$$

wegen  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ . Streicht man die Terme  $r^2$ , die sich aufheben, und teilt man durch 4, so bleibt  $a^2 - ar = c^2 + cr \cos \varphi$  oder umgeformt  $a^2 - c^2 = ar + cr \cos \varphi$ . Daraus folgt weiter  $b^2 = ar + aer \cos \varphi$  wegen  $a^2 - c^2 = b^2$  (2.2) und  $c = ae$  (2.3), was zu

$$\frac{b^2}{a} = r(1 + e \cos \varphi)$$

umgeformt werden kann. Jetzt folgt die Gleichung (2.5) mit Hilfe von (2.4) unmittelbar. Setzt man in dieser Gleichung  $\varphi = \pm 90^\circ$ , so folgt  $r = p$ , und für die Werte  $0^\circ$  und  $180^\circ$  gilt

$$r = \frac{p}{1 \pm e} = \frac{b^2}{a(1 \pm e)} = \frac{b^2}{a \pm c} = \frac{a^2 - c^2}{a \pm c} = \frac{(a + c)(a - c)}{a \pm c} = a \mp c$$

wie aus der Abbildung 2.1 erwartet.

**Lösung 2** Durch Einsetzen der Werte in die Ungleichung (3.3) bekommt man  $\sqrt{m_p/m_s} \approx 1.733 \cdot 10^{-3}$ , und somit würde für den Einflussbereich der Erde  $r_{pr} < 2.6 \cdot 10^5$  km gelten. Der grösstmögliche Wert für  $r_{pr}$ , bei dem ein Körper den Einflussbereich der Erde verlässt, entspricht also etwa 70% der Distanz von  $3.8 \cdot 10^5$  km zwischen Erde und Mond. Daraus würde entgegen unseren Erfahrungen folgen, dass sich der Mond nicht im Einflussbereich der Erde befindet. Diese Definition des Einflussbereiches ist also nicht sehr sinnvoll.

**Lösung 3** Gemäss Formel (3.4) gilt mit  $n$  Körpern, die als Massenpunkte modelliert sind, für das Gesamtsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij} \\ &= \sum_{\substack{(i,j)=(1,1) \\ (j < i)}}^{(n,n)} \left( \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij} + \gamma \frac{m_j m_i}{|\mathbf{r}_{ji}|^3} \mathbf{r}_{ji} \right) \end{aligned}$$

wobei sich die zwei Summanden  $\gamma(m_i m_j)/|\mathbf{r}_{ij}|^3 \cdot \mathbf{r}_{ij}$  und  $\gamma(m_j m_i)/|\mathbf{r}_{ji}|^3 \cdot \mathbf{r}_{ji}$  für jedes Paar  $(i, j)$  von Indizes mit  $i \neq j$  wegen  $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$  aufheben. Somit heben sich alle Summanden in der unteren Summe auf, und es gilt  $\mathbf{F} = 0$ .

**Lösung 4** Weil  $\mathbf{r}_{sp}$  und  $\mathbf{r}_{sr}$  in die gleiche Richtung zeigen,  $\mathbf{r}_{pr}$  jedoch in die entgegengesetzte, gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{a}}_s| &= \gamma m_s \left( \frac{1}{r_{sr}^2} - \frac{1}{r_{sp}^2} \right) & |\tilde{\mathbf{a}}_p| &= \gamma m_p \left( \frac{1}{r_{pr}^2} - \frac{1}{r_{sp}^2} \right) \\ &= \gamma \cdot 4.496 \cdot 10^{11} \text{ km} & &= \gamma \cdot 4.137 \cdot 10^{13} \text{ km} \end{aligned}$$

mit  $r_{sr} = r_{sp} - r_{pr}$ . Somit gilt an diesem Punkt  $|\mathbf{a}_p|/|\mathbf{a}_s| \approx 1 > |\tilde{\mathbf{a}}_s|/|\tilde{\mathbf{a}}_p| \approx 0.01$ , und der Punkt liegt gemäss Formel (3.9) innerhalb des Einflussbereichs der Erde.

**Lösung 5** Eine Unterscheidung der drei Fälle in der Abbildung 3.3 führt zu den Formeln

- Konfiguration (a): Mit  $r_{sr} = r_{sp} - r_{pr}$  gilt

$$\frac{|\mathbf{a}_p| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_p|}{|\mathbf{a}_s| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_s|} = \frac{\frac{m_p}{r_{pr}^2} \cdot m_p \left( \frac{1}{r_{pr}^2} - \frac{1}{r_{sp}^2} \right)}{\frac{m_s}{r_{sr}^2} \cdot m_s \left( \frac{1}{r_{sr}^2} - \frac{1}{r_{sp}^2} \right)}$$

- Konfiguration (b): Mit  $r_{sr} = r_{sp} + r_{pr}$  gilt

$$\frac{|\mathbf{a}_p| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_p|}{|\mathbf{a}_s| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_s|} = \frac{\frac{m_p}{r_{pr}^2} \cdot m_p \left( \frac{1}{r_{sp}^2} + \frac{1}{r_{pr}^2} \right)}{\frac{m_s}{r_{sr}^2} \cdot m_s \left( \frac{1}{r_{sp}^2} - \frac{1}{r_{sr}^2} \right)}$$

- Konfiguration (c): Mit der Näherung  $r_{sp} \approx r_{sr}$  (sicher genau genug falls  $r_{sp} > 100r_{pr}$  wie in den von uns betrachteten Fällen) gilt

$$\frac{|\mathbf{a}_p| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_p|}{|\mathbf{a}_s| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}_s|} \approx \frac{\frac{m_p}{r_{pr}^2} \cdot m_p \sqrt{\frac{1}{r_{sp}^4} + \frac{1}{r_{pr}^4}}}{\frac{m_s}{r_{sr}^2} \cdot m_s \frac{r_{pr}}{r_{sr}^3}}$$

wobei die vier Faktoren  $\gamma$ , die sich herauskürzen, bereits weggelassen sind. Die Ergebnisse für ein paar Werte von  $r_{pr}$  sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Abstand $r_{pr}$	Verhältnis $\delta = ( \mathbf{a}_p  \cdot  \tilde{\mathbf{a}}_p ) / ( \mathbf{a}_s  \cdot  \tilde{\mathbf{a}}_s )$		
	Konfiguration (a)	Konfiguration (b)	Konfiguration (c)
$6.0 \cdot 10^5$ km	4.285	4.407	8.692
$6.5 \cdot 10^5$ km	2.869	2.957	5.825
$7.0 \cdot 10^5$ km	1.978	2.044	4.022
$7.5 \cdot 10^5$ km	1.399	1.449	2.848
$8.0 \cdot 10^5$ km	1.012	1.051	2.063
$8.5 \cdot 10^5$ km	0.747	0.777	1.523
$9.0 \cdot 10^5$ km	0.560	0.584	1.145
$9.5 \cdot 10^5$ km	0.427	0.447	0.874
$10.0 \cdot 10^5$ km	0.330	0.346	0.676
$10.5 \cdot 10^5$ km	0.258	0.271	0.530

Überraschenderweise befindet sich der Übergang von  $\delta > 1$  zu  $\delta < 1$ , bei dem der Einflussbereich der Erde verlassen wird, nur bei der letzten Konfiguration zwischen  $9.0 \cdot 10^5$  km und  $9.5 \cdot 10^5$  km, wie man es gemäss Tabelle in [11, p. 125] erwarten würde, für die anderen beiden Konfigurationen aber zwischen  $8.0 \cdot 10^5$  km und  $8.5 \cdot 10^5$  km. Der Einflussbereich der Erde ist gut 10%, abgeplattet. Berechnet man die Werte, bei denen  $\delta = 1$  gilt, so bekommt man:

- (a)  $8.02 \cdot 10^5$  km
- (b)  $8.08 \cdot 10^5$  km,
- (c)  $9.07 \cdot 10^5$  km

**Lösung 6** Aus den Formeln (2.14) und (2.15) folgt für die vier Geschwindigkeiten:  $r_1 = 6578$  km und  $r_2 = 42250$  km:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^- &= \sqrt{\mu_p \frac{1}{r_1}} & \mathbf{v}_1^+ &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} \\ \mathbf{v}_2^- &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} & \mathbf{v}_2^+ &= \sqrt{\mu_p \frac{1}{r_2}} \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Radien  $r_1 = 6578$  km (Erdradius plus 200 km) und  $r_2 = 42250$  km ein, so bekommt man  $\mathbf{v}_1^- = 7.785$  km/s,  $\mathbf{v}_1^+ = 10.240$  km/s,  $\mathbf{v}_2^- = 1.594$  km/s und  $\mathbf{v}_2^+ = 3.072$  km/s, was  $\Delta \mathbf{v}_1 = 2.455$  km/s und  $\Delta \mathbf{v}_2 = 1.478$  km/s ergibt.

**Lösung 7** Wir schreiben für  $\Delta v_i$  (mit  $i = 1, 2$ ) einschränkt auf die durch die beiden Geraden definierte untere Abgrenzung des erlaubten Bereichs in Abbildung 4.6  $\Delta \hat{v}_i$ . Für die totale Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \hat{v}_T$  gilt somit  $\Delta \hat{v}_T = \Delta \hat{v}_1 + \Delta \hat{v}_2$ . (Beachte für die Ungleichungen in den folgenden Beweisschritten, dass  $r_2 > r_1$  und  $0 < e < 1$  gilt.)

Setzen wir einerseits  $p = r_1(1 + e)$  in die Gleichung (4.4) ein, so bekommen wir

$$(\Delta \hat{v}_i)^2 = \gamma m_p \left( \frac{3}{r_i} - 2 \sqrt{\frac{r_1(1+e)}{r_i^3} + \frac{e^2 - 1}{r_1(1+e)}} \right) = \gamma m_p \left( \frac{3}{r_i} - 2 \sqrt{\frac{r_1(1+e)}{r_i^3} - \frac{1-e}{r_1}} \right)$$

auf den rechten Teil der Bereichsgrenze. Ableiten nach  $e$  ergibt

$$\begin{aligned} 2\Delta \hat{v}_1 \frac{d\Delta \hat{v}_1}{de} &= \frac{\gamma m_p}{r_1} \left( 1 - \frac{1}{(1+e)^{1/2}} \right) > 0 \\ 2\Delta \hat{v}_2 \frac{d\Delta \hat{v}_2}{de} &= \frac{\gamma m_p}{r_1} \left( 1 - \frac{1}{(r_2/r_1)^{3/2}(1+e)^{1/2}} \right) > 0 \end{aligned}$$

woraus  $d\Delta \hat{v}_T/de > 0$  folgt.

Setzen wir andererseits  $p = r_2(1 - e)$  in die Gleichung (4.4) ein, so bekommen wir

$$(\Delta \hat{v}_i)^2 = \gamma m_p \left( \frac{3}{r_i} - 2 \sqrt{\frac{r_2(1-e)}{r_i^3} + \frac{e^2 - 1}{r_2(1-e)}} \right) = \gamma m_p \left( \frac{3}{r_i} - 2 \sqrt{\frac{r_2(1-e)}{r_i^3} - \frac{1+e}{r_2}} \right)$$

auf dem linken Teil der Bereichsgrenze. Ableiten nach  $e$  ergibt

$$\begin{aligned} 2\Delta \hat{v}_1 \frac{d\Delta \hat{v}_1}{de} &= \frac{\gamma m_p}{r_2} \left( (r_2/r_1)^{3/2} \frac{1}{(1-e)^{1/2}} - 1 \right) > 0 \\ 2\Delta \hat{v}_2 \frac{d\Delta \hat{v}_2}{de} &= \frac{\gamma m_p}{r_2} \left( \frac{1}{(1-e)^{1/2}} - 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

woraus  $d\Delta \hat{v}_T/de > 0$  folgt.

Weil auf beiden Grenzgeraden  $d\Delta \hat{v}_T/de > 0$  gilt, folgt: Je kleiner  $e$  ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeitsänderung. Somit liegt das Optimum in Bezug auf Treibstoffverbrauch in der Abbildung 4.6 beim Punkt  $P_H$ , also beim Hohmann-Übergang.

**Lösung 8** Für den Hohmann-Übergang können die Formeln aus Lösung 6 übernommen werden. Das führt zu  $\mathbf{v}_1^- = 7.546$  km/s,  $\mathbf{v}_1^+ = 10.333$  km/s,  $\mathbf{v}_2^- = 0.689$  km/s und  $\mathbf{v}_2^+ = 1.948$  km/s, was weiter  $\Delta \mathbf{v}_1 = 2.787$  km/s,  $\Delta \mathbf{v}_2 = 1.259$  km/s und  $\Delta \mathbf{v}_H = \Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2 = 4.046$  km/s ergibt.

Unter Benutzung der Bezeichnungen in Abbildung 5.1 lassen sich die Längen der beiden Ellipsenhauptachsen beim bielliptischen Übergang als  $r_1 + r_m$  für  $E_1$  und  $r_m + r_2$  für  $E_2$  angeben, sodass nach (2.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^- &= \sqrt{\mu_p \frac{1}{r_1}} & \mathbf{v}_1^+ &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_m} \right)} \\ \mathbf{v}_2^- &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_m} - \frac{2}{r_1 + r_m} \right)} & \mathbf{v}_2^+ &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_m} - \frac{2}{r_m + r_2} \right)} \\ \mathbf{v}_3^- &= \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_m + r_2} \right)} & \mathbf{v}_3^+ &= \sqrt{\mu_p \frac{1}{r_2}} \end{aligned}$$

folgt. Wegen  $\mathbf{v}_1^- = 7.546 \text{ km/s}$  und  $\mathbf{v}_1^+ = 10.498 \text{ km/s}$  gilt  $\Delta \mathbf{v}_1 = 2.949 \text{ km/s}$  im Punkt  $P_1$ , wegen  $\mathbf{v}_2^- = 0.350 \text{ km/s}$  und  $\mathbf{v}_2^+ = 1.125 \text{ km/s}$  gilt  $\Delta \mathbf{v}_2 = 0.775 \text{ km/s}$  im Punkt  $P_2$ , und schliesslich wegen  $\mathbf{v}_3^- = 2.250 \text{ km/s}$  und  $\mathbf{v}_3^+ = 1.948 \text{ km/s}$  gilt  $\Delta \mathbf{v}_3 = 0.302 \text{ km/s}$  im Punkt  $P_3$ . Das ergibt zusammen  $\Delta \mathbf{v}_B = \Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2 + \Delta \mathbf{v}_3 = 4.026 \text{ km/s}$ .

Die zwei Schubstösse im Hohmann-Übergang liefern also eine totale Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \mathbf{v}_H = 4.046 \text{ km/s}$ , während die drei Schubstösse beim bielliptischen Übergang insgesamt eine Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \mathbf{v}_B = 4.026 \text{ km/s}$  bewirken. Der Unterschied von etwa einem halben Prozent lässt es fraglich erscheinen, ob es sich lohnt, das Manöver mit den drei Schubstössen zu wählen, dauert doch der bielliptische Übergang über fünf Tage, während der Hohmann-Übergang nicht einmal einen Tag dauert, wie man bei Curtis [2, p. 267-268] nachlesen kann.

**Lösung 9** Die Geschwindigkeit einer Raumsonde auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  um die Erde beträgt

$$v_k = \sqrt{\mu_p \frac{1}{r}}$$

nach (2.15). Für eine Ellipsenbahn mit grosser Halbachse  $a$  und mit Abstand  $r$  im Perigäum (erdnächster Punkt) gilt

$$v_a = \sqrt{\mu_p \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

im Perigäum wegen (2.14). Hält man das Perigäum fest und lässt  $a$  grösser werden, so wird  $1/a$  immer kleiner, bis dieser Term ganz vernachlässigt werden kann, wenn die Ellipse in eine Parabel übergeht, oder wenn in unserer Näherung die Exzentrizität der Ellipse so gross ist, dass die Sonde darauf den Einflussbereich der Erde verlässt. Wir können für  $a \rightarrow \infty$  folglich

$$v_\infty = \sqrt{\mu_p \frac{2}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_k$$

schreiben. Das Verhältnis  $v_\infty/v_k$  ist also unabhängig von  $r$  immer gleich  $\sqrt{2}$ , und die benötigte Geschwindigkeitsänderung ist somit  $(\sqrt{2} - 1)v_k$  für alle  $r$ . Wir haben in der Aufgabe 6 für die Kreisbahn in 200 km Höhe  $v_k = 7.785 \text{ km/s}$  gefunden, sodass  $v_\infty \approx 11 \text{ km/s}$  und  $\Delta v \approx 3.2 \text{ km/s}$  folgt.

**Lösung 10** Wenn man die Vektorgeometrie der Geschwindigkeiten in Abbildung 6.2 betrachtet, so gibt es verschiedene Grössen, mit denen man die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \mathbf{v}_H$  der Sonde relativ zur Sonne durch die Hyperbelbahn und die Ablenkung beim Gravity-Assist-Manöver beeinflussen kann.

Wir betrachten die Flugbahn der Raumsonde erst nur aus der Sicht des Planeten. Um  $|\Delta \mathbf{v}_H|$  zu vergrössern, kann man einerseits die Eintrittsgeschwindigkeit der Sonde  $\mathbf{v}_{pi}$  relativ zum Planeten vergrössern oder aber den Winkel  $\alpha$ . Ohne die Hyperbelbahnen in dieser Arbeit explizit



behandelt zu haben, lässt sich in Analogie zu den Ellipsenbahnen vermuten: (1) Je schneller sich eine Sonde auf einen Planeten zu bewegt, desto weniger wird sie durch dessen Gravitation abgelenkt. (2) Je mehr sich eine Sonde dem Planeten nähert, desto stärker ist die Ablenkung durch dessen Gravitation.

Damit kann man bei festem Winkel  $\alpha$  die Geschwindigkeit, mit der die Sonde in den Einflussbereich des Planeten eintritt, nicht beliebig vergrössern, denn die endliche Ausdehnung des Planeten setzt dem Grenzen, wenn man eine Kollision mit ihm vermeiden will. Aus demselben Grund, und weil es keine Hyperbelbahn gibt, die wie in Abbildung 6.1 die Sonde zurückfliegen lässt, kann man aber auch bei festem  $v_\infty$  die Ablenkung  $\alpha$  nicht beliebig nahe zu  $180^\circ$  bringen, um  $\sin \alpha/2$  zu maximieren. (In der vereinfachten Darstellung in Abbildung 6.1 wird der theoretische Maximalwert erreicht.)

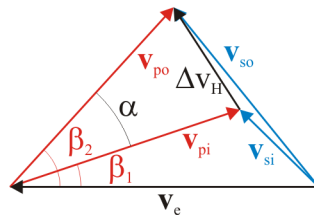
Wir betrachten die Flugbahn jetzt aus der Sicht des Sonnensystems. Hält man  $v_\infty$  und  $\alpha$  fest, so kann man nur noch den Winkel zwischen der Planetenbahn und der Anflugrichtung der Sonde variieren. Drehen Sie in der Abbildung 6.2 unten rechts das wegen dem festen  $\alpha$  starre System der Vektoren  $\mathbf{v}_{pi}$  und  $\mathbf{v}_{po}$  in Ihrer Vorstellung, so sehen Sie, wie sich die Vektoren  $\mathbf{v}_{si}$  und  $\mathbf{v}_{so}$  verändern. Ist  $\mathbf{v}_{so}$  länger als  $\mathbf{v}_{si}$ , so beschleunigt der Gravitationskick die Sonde. Andernfalls bremst er sie. Je kleiner der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren, desto grösser ist der Unterschied zwischen ihren Längen, also den Beträgen der Geschwindigkeiten.

**Lösung 11** Setzen wir die Werte für  $\mu_s$  und  $r$  aus [11, p. 188-190] in (2.15) ein, so ergibt das

$$v_e = \sqrt{\frac{\mu_s}{r}} = 29.783 \text{ km/s}$$

für die Geschwindigkeit  $v_e$  der Erde. Man kann die mittlere Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne natürlich auch auf anderem Weg ermitteln. Die Umlaufbahn der Erde hat eine Länge von  $2\pi r$ . Dividiert man dies durch die 365.256 Tage für das siderische Jahr, so ergibt das einen Wert von  $v_e = 29.785 \text{ km/s}$  in guter Übereinstimmung mit obigem Resultat.

**Lösung 12** Wir zeichnen zuerst einmal die Geometrie der gegebenen und gesuchten Geschwindigkeitsvektoren auf, von denen wir  $|\mathbf{v}_e| = 29.8 \text{ km/s}$  und  $|\mathbf{v}_{pi}| = |\mathbf{v}_{po}| = 23.5 \text{ km/s}$  kennen:



Mit dem Kosinussatz lässt sich einerseits aus  $|\mathbf{v}_{si}|^2 = |\mathbf{v}_{pi}|^2 + |\mathbf{v}_e|^2 - 2|\mathbf{v}_{pi}||\mathbf{v}_e| \cos \beta_1$  der Wert  $|\mathbf{v}_{si}| = 10.6 \text{ km/s}$  und andererseits aus  $|\mathbf{v}_{so}|^2 = |\mathbf{v}_{po}|^2 + |\mathbf{v}_e|^2 - 2|\mathbf{v}_{po}||\mathbf{v}_e| \cos \beta_2$  analog der Wert  $|\mathbf{v}_{so}| = 22.3 \text{ km/s}$  berechnen. Aus der Ablenkung  $\alpha = \beta_2 - \beta_1 = 29.1^\circ$  und (6.3) folgt  $|\Delta \mathbf{v}_H| = 11.8 \text{ km/s}$ . Der Geschwindigkeitszuwachs  $|\mathbf{v}_{so}| - |\mathbf{v}_{si}| = 11.7 \text{ km/s}$  ist fast so gross wie  $|\Delta \mathbf{v}_H|$ . Die Ablenkung aus der Sicht der Sonne – wir wenden den Kosinussatz noch zweimal an und bekommen so die Winkel zwischen  $\mathbf{v}_e$  und  $\mathbf{v}_{si}$  und zwischen  $\mathbf{v}_e$  und  $\mathbf{v}_{so}$  – ist  $6.4^\circ$ .

Wenn Sie sich weiter mit der Raumfahrt und der Flugbahnmechanik beschäftigen möchten, können Sie sich beispielsweise die Frage stellen, wie realistisch die Angaben in dieser Aufgabe sind. Wie nahe kommt die Sonde bei diesem Gravity-Assist-Manöver der Erde? Kollidiert sie mit ihr, verglüht sie in der Erdatmosphäre oder fliegt sie wie beabsichtigt durch die Erdanziehung beschleunigt weiter zum nächsten Planeten?