Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Report

Author(s):
Büchel, Peter; Hauser, Rainer

Publication date:
2009

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005879853

Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Autoren:	**Peter Büchel**
	Rainer Hauser
Kursinformation:	Empirische Arbeit zur Lehr- und Lernforschung (EW4),
	ETH Zürich, Herbstsemester 2008/Frühjahrssemester 2009
Datum:	28. März 2009

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine Untersuchung, in der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten aus drei Klassen im achten Schuljahr auf Flexibilität beim Einsatz verschiedener Lösungsstrategien untersucht wurden. Sie haben die Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsmethode zum Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten in einem Lerntext, der diese drei Methoden als gleichberechtigt nebeneinander gestellt hat, kennen gelernt. Anschliessend haben sie diesen Typ Aufgaben intensiv geübt, bevor ihnen in einem Test nacheinander mehrere Gleichungssysteme vorgelegt wurden, bei denen sich die drei Methoden unterschiedlich gut eigneten. Die Studie hat gezeigt, dass Jugendliche in diesem Alter durchaus zu Flexibilität dieser Art fähig sind, dass aber weitere Studien nötig sind, um detailliertere Antworten auf interessante Fragen zu bekommen.

1. Einleitung

Flexibilität im Gebrauch verschiedener Strategien ist in einer Welt, in der lebenslanges Lernen verlangt wird, eine nützliche Fähigkeit. Im Folgenden wird das Verhältnis von Lernen und Flexibilität eingehender beleuchtet.

1.1. Fachspezifisches und strategisches Wissen

Zu den wichtigsten Zielen guten Unterrichtes gehört sicher die Vermittlung von fachspezifischem Wissen, das teils deklarativer und teils prozeduraler Natur ist. In der Mathematik besteht der deklarative Anteil im Wesentlichen aus den korrekten begrifflichen Definitionen und geeigneten Modellvorstellungen, während Methoden, Algorithmen und Heuristiken zum prozeduralen Wissen gehören, deren Sinn darin besteht, das zielgerichtete Lösen von mathematischen Problemen zu ermöglichen.

Die Vermittlung von fachspezifischem Wissen allein genügt aber nicht, denn zum erfolgreichen Lernen gehört auch Wissen über das Lernen selber. Nach Hasselhorn und Gold (2006) ist ebenfalls ein vorrangiges Ziel guten Unterrichts, dass die Lernenden Experten des eigenen Lernens werden. Ormrod (1990) betont, dass es beim sinnvollen Lernen – im Gegensatz zu blindem Auswendiglernen – um das Verständnis geht, mit dem Lernende Problemlösungsstrategien einsetzen. Der bewusste Umgang mit Lösungsstrategien ist Teil dieses Wissens über das Lernen selber, das jemanden zum Experten des eigenen Lernens macht.

1.2. Flexibilität als Gegenstand der Untersuchung

Flexibilität und Anpassungsfähigkeit im Gebrauch von Strategien ist also ein Zeichen für ein gut entwickeltes Wissen über Problemlösungen. Leute mit dieser Fähigkeit müssen erstens verschiedene Lösungsmethoden kennen, die sie gelernt oder aber selber entdeckt haben, und sie müssen diese auch effizient einsetzen können. Wenn flexible Problemlöser jedoch eine Strategie kennen, die sich den anderen Strategien als überlegen erwiesen hat, so setzen sie von diesem Moment an nur noch diese ein. Um also den flexiblen Einsatz verschiedener Strategien zu untersuchen, braucht es einen Typ Testaufgaben, bei denen in Abhängigkeit von der Aufgabe verschiedene Strategien verschieden geeignet sind.

Lineare Gleichungssysteme bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten haben sich für diesen Zweck als besonders passend herausgestellt, denn es gibt mehrere verschiedene Lösungsmethoden, von denen keine a priori besser als die anderen ist. Sie führen zwar alle zur richtigen Lösung, kommen jedoch je nach gegebenem Gleichungssystem unterschiedlich schnell zum Ziel.

1.3. Rahmen dieser Studie über Flexibilität

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Flexibilität beim Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten und ist eine Art Vorstudie zu einer umfangreicheren Arbeit, der von Michael Schneider betreuten Doktorarbeit von Daniela Nussbaumer am Institut für Lehr- und Lernforschung der ETH Zürich. Unter Benutzung von Materialien, die an diesem Institut entwickelt worden sind, haben die beiden Autoren drei Schulklassen im achten Schuljahr an zwei verschiedenen Gymnasien darauf getestet, wie sie lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten lösen, und ob sie verschiedene Lösungsmethoden flexibel einsetzen oder immer dieselbe Methode benutzen. Die drei Klassen haben erst eine kurze Einführung in das Thema gehört, anschliessend einen speziell für diese Studie erstellten Lerntext, in dem die Gleichsetzungs-, die Einsetzungs- und die Additionsmethode nebeneinander vorgestellt werden, selbstständig durchgearbeitet und zum Schluss das Lösen an Beispielen geübt.

Die drei Lösungsmethoden wurden im Lerntext so vorgestellt, dass die Lernenden dazu angeregt werden, die von Klauer und Leutner (2007) beschriebene Strategie des Vergleichens anzuwenden, um die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der drei Methoden zu entdecken. So eignen sich die Schülerinnen und Schüler auch strategisches Wissen über das Lernen selber an und beschäftigen sich indirekt mit der Tatsache, dass es nicht nur einen Weg zum Ziel gibt. In allen drei Klassen sind die Schülerinnen und Schüler aber bewusst nicht darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Studie ihre Flexibilität untersucht, oder dass Flexibilität überhaupt eine wünschenswerte Eigenschaft ist.

Flexible Anwendung von verschiedenen Methoden und verwandte Arten strategischen Wissens ist bei Lernenden im achten Schuljahr noch nicht sehr hoch entwickelt, und etwelche Fehlvorstellungen behindern nicht selten ein planvolles Vorgehen beim Lösen von mathematischen Problemen. Insbesondere findet man nach Hasselhorn und Gold (2006) bei manchen Jugendlichen die Überzeugung, dass es für jedes mathematische Problem nur eine korrekte Lösungsprozedur geben könne. Die drei vorgestellten Methoden für das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten können mithelfen, diese und ähnliche fragliche Vorstellungen auszuräumen oder doch wenigstens zu hinterfragen.

Das sind aber Nebeneffekte der vorliegenden Arbeit. Das Hauptziel der Untersuchung war, wie im Folgenden beschrieben wird, die Flexibilität von Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr beim Lösen von linearen Gleichungssystemen zu erforschen, wenn ihnen die zu

Grunde liegende Theorie so präsentiert wird, dass sie die drei Methoden als gleichwertige Vorgehensweisen nebeneinander kennen lernen.

1.4. Übersicht über die folgenden Kapitel

Im nächsten Kapitel wird der Hintergrund der Studie mit dem Stand der Forschung, der Bedeutung des untersuchten Gegenstandes, der Grundidee der Arbeit und den untersuchten Forschungsfragen beschrieben. Das dritte Kapitel befasst sich mit der Methode und geht insbesondere auf die Stichprobe, die benutzten Materialien und den Design sowie die Durchführung des Versuches ein. Im vierten Kapitel werden die Ergebnisse quantitativ analysiert, wobei sowohl die vom benutzten Computerprogramm aufgezeichneten Dateien wie auch die handschriftlichen Notizen der Versuchspersonen behandelt werden. Zum Schluss wird die Untersuchung im fünften und letzten Kapitel auch qualitativ diskutiert, indem nochmals auf die Forschungsfragen, die methodischen Grenzen der Studie und offene Fragen eingegangen wird. Die benutzten Materialien werden in den Anhängen am Schluss der Arbeit zusammengestellt und besprochen.

2. Hintergrund der Studie

Ein direkter Zusammenhang zwischen fehlendem flexiblen Wissen und unbefriedigenden akademischen Leistungen in der Mathematik macht das Thema Flexibilität beim Problemlösen interessant für die Didaktik des Mathematikunterrichts.

2.1. Stand der Forschung

Flexibilität beim Lösen von Problemen als ein Kernaspekt von Kreativität (Silver, 1997) ist durch verschiedene Studien für verschiedene Fachgebiete und unterschiedliche Altersgruppen erforscht worden. Deák (2000) beispielsweise hat die Flexibilität von Kindern im Vorschulalter beim Lernen neuer Wörter und beim Generalisieren dieser Wörter auf ähnliche Objekte untersucht. Silver, Hughes, Bornstein und Beversdorf (2004) massen den Effekt von bestimmten Medikamenten auf die kognitive Flexibilität von Studenten einer amerikanischen Universität gemessen an der zum Lösen von Anagrammen benötigten Zeit im Vergleich zu einer Kontrollgruppe, der ein Placebo verabreicht worden war.

Das Spektrum an Forschung auf diesem Gebiet ist also sehr gross. Wir beschränken uns hier aber auf die Altersgruppe in der unteren Sekundarstufe, auf das Fachgebiet Mathematik und auf Effekte rein didaktischer Interventionen. In diesem Zusammenhang sind besonders zwei Studien zu erwähnen, die erst kürzlich vom gleichen Forschungsteam durchgeführt worden sind, und die das Lösen von Gleichungen zum Thema haben.

In der ersten Studie lernten Schülerinnen und Schüler im siebten Schuljahr das Lösen von Gleichungen in der Algebra entweder durch den Vergleich von alternativen Lösungsmethoden zur gleichen Zeit oder durch das Beschäftigen mit den alternativen Lösungsmethoden nacheinander (Rittle-Johnson & Star, 2007). Die Hypothese war, dass die Gruppe, welche die alternativen Lösungsmethoden gleichzeitig vergleichend lernen konnte, im Folgenden *‚compare group‘* genannt, flexibleres Wissen aufbaut als die Gruppe, welche sich nacheinander mit den alternativen Lösungsmethoden beschäftigte, im Folgenden *‚sequential group‘* genannt. Das Resultat der Studie bestätigte die Hypothese im Wesentlichen. Genauer fand die Studie, dass die *‚compare group‘* einen grösseren Zuwachs an prozeduralem Wissen sowie an Flexibilität verzeichnete, während die *‚sequential group‘* beim prozeduralen Wissen weniger, dafür beim deklarativen Wissen stärker zulegte.

Die zweite Studie untersuchte Schülerinnen und Schüler im sechsten Schuljahr ebenfalls beim Lösen von linearen Gleichungen, wobei diesmal die eine Gruppe darauf hingewiesen wurde, eine Gleichung auf verschiedene Weise zu lösen, indem beispielsweise ein Problem, nachdem es gelöst worden war, mit der Aufforderung, das Problem auf eine andere Weise zu lösen, nochmals präsentiert wurde, während bei der anderen Gruppe direkt die verschiedenen Lösungsmethoden unterrichtet wurden (Star & Rittle-Johnson, 2007). Ein Beitrag dieser Arbeit war die Entflechtung des Wissens um verschiedene Lösungsstrategien von der Benutzung der verschiedenen Lösungsstrategien. Hinweise auf die Benutzung verschiedener Strategien vergrösserte die Benutzung verschiedener Lösungsstrategien, nicht aber die Benutzung effizienterer Lösungsstrategien, während der direkte Unterricht zwar die Benutzung effizienterer Lösungsstrategien, nicht aber die Benutzung verschiedener Lösungsstrategien förderte.

Beiden Studien liegen lineare Gleichungen mit einer Unbekannten zu Grunde. Die normalerweise im (amerikanischen) Schulunterricht eingeführte Methode zur Lösung solcher Gleichungen ist die Elimination von Klammern durch Ausmultiplizieren. So wird beispielsweise die Gleichung $3(x + 1) = 15$ in $3x + 3 = 15$ umgeformt, obwohl die Division durch 3 schneller zum Ziel führen würde. Bei Gleichungen der Form $3(x + 1) + 2(x + 1) = 20$ ist es noch offensichtlicher, dass das Ausklammern von $(x + 1)$ effizienter ist als das Ausmultiplizieren.

2.2. Bedeutung

Die in den beiden Arbeiten von Rittle-Johnson und Star benutzte Effizienzsteigerung hat den Nachteil, dass sie – einmal erkannt – immer angewendet wird und somit nicht mehr zur

Messung von Flexibilität benutzt werden kann. Bei den in der umfassenden Studie am Institut für Lehr- und Lernforschung an der ETH und somit auch in der vorliegenden Arbeit benutzten linearen Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten hingegen ist nicht eine der drei vorgestellten Lösungsmethoden in allen Fällen effizienter als die anderen, sondern je nach Gleichungssystem ist eine der Methoden effizienter als die anderen. So kann durch geeignete Wahl der Gleichungssysteme geprüft werden, ob die Versuchsperson immer dieselbe Methode oder je nach Problemstellung die geeignetste Lösungsmethode einsetzt, um möglichst effizient zum Resultat zu kommen.

Flexibilität bei der Strategiewahl führt nicht nur schneller zum Ziel, sondern erlaubt auch eine vielfältigere Vernetzung des Wissens mit dem Vorwissen. Menschen, die nur eine Methode kennen, können eine Aufgabe nicht mehr lösen, wenn sie die einzige ihnen bekannte und somit die einzige ihnen zur Verfügung stehende Methode oder Teile davon nicht aus dem Gedächtnis abrufen können, während Menschen mit Zugang zu mehreren Methoden, die sie flexibel anwenden können, immer auch alternative Wege zum Ziel finden können.

Flexibilität hat aber noch einen weiteren Vorteil. Wer mehrere Methoden kennt, um ein Problem zu lösen, kann eine zweite Methode benutzen, um die mit der ersten Methode gefundene Lösung zu überprüfen. Die oben erwähnte lineare Gleichung $3(x + 1) = 15$ etwa kann erst mit der effizienteren Methode (also Division beider Seiten durch 3) und anschliessend mit der Standardmethode (also Ausmultiplizieren der linken Seite) überprüft werden, was das Vertrauen in die Lösung erhöht, falls auf beiden Wegen dasselbe Resultat gefunden wird.

Die hier vorgestellte Fragestellung hat aber nicht nur eine offensichtlich praktische Relevanz, weil ein wichtiges Ziel guten schulischen Unterrichts die Vermittlung von flexiblen und adaptiv einsetzbaren Strategien beim Lösen von Problemen ist, sondern ist auch von theoretischer Bedeutung, weil der flexible Einsatz von Strategien als Forschungsgegenstand mithelfen kann, mathematisches Denken und damit auch Wege mathematischen Problemlösens besser zu verstehen.

2.3. Grundidee

Mittels der elementaren Algebra machen die Schülerinnen und Schüler ihren ersten Kontakt mit einem abstrakten Formalismus in der Mathematik und haben oftmals riesige Schwierigkeiten damit, die sich bis ins Erwachsenenalter halten (Fischer & Malle, 1985). Dieser erste Zugang zur Welt der formalen Systeme, der meist im siebten Schuljahr passiert, bedeutet den keineswegs einfachen Übergang vom rein arithmetischen Rechnen mit Zahlen zum abstrakten Manipulieren algebraischer Terme und Gleichungen. Die Umformungsregeln sind zwar für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler durchaus nachvollziehbar, sind aber für die leistungsschwächeren oft ein fast unüberwindbares Hindernis auf dem Weg zum Verständnis der höheren Mathematik. Der Schritt vom Rechnen mit Zahlen zum Rechnen mit Buchstaben erfordert von den Lernenden neue Fähigkeiten, die sie bisher nicht benötigt haben.

Wenn weniger begabte Lernende diesen Übergang gemeistert haben, halten sie sich vorsichtigerweise lieber an diejenigen Lösungsschritte, die sie gelernt haben, und die sich somit bewährt haben. Von ihnen Flexibilität beim Vorgehen zu erwarten, ist aus diesem Grund wohl etwas viel verlangt, denn sie sind froh, schon auf einem Weg zum Resultat zu gelangen.

Das Phänomen, dass Lernende einseitig auf einer syntaktischen Ebene agieren und die semantische Ebene vernachlässigen, ist von der Bruchrechnung her bekannt (Padberg, 2002). Das ist aber auch in der Algebra ein Problem. Weiter werden strukturelle Analysen oftmals fehlerhaft durchgeführt, was beispielsweise bei Bruchtermen zum fälschlichen Kürzen in Summen verleitet. Solche didaktischen Tatsachen müssen bei der Untersuchung von Flexibilität im Umgang mit algebraischen Gegebenheiten stets im Auge behalten werden.

In der hier vorgestellten Untersuchung wurden Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr, die das Lösen von einer Gleichung mit einer Unbekannten bereits intensiv geübt hatten, mit der Aufgabe konfrontiert, Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten zu lösen, nachdem sie instruiert worden waren, dass es dafür mindestens drei verschiedene Methoden gibt. Das Thema eignet sich aus verschiedenen Gründen für die Untersuchung der Flexibilität bei der Problemlösung in der Mathematik.

Wie oben erwähnt hat keine der drei Lösungsstrategien die Eigenschaft, dass sie für alle Gleichungssysteme geeigneter ist als die andern, denn für jede der Methoden gibt es Beispiele von Gleichungssystemen, für die sie sich besonders eignet. Somit heisst Flexibilität nicht, ein für alle Mal auf die effizientere Methode umzusteigen, sondern je nach Gleichungssystem die passende Strategie zu wählen. Weiter ist die Eigenschaft, welche Methode die effizienteste ist, eine rein syntaktische Eigenschaft, die somit keine semantischen und damit schwierigeren Betrachtungen verlangt, sondern durch einfache strukturelle Überlegungen entschieden werden kann, mit denen auch leistungsschwache Schülerinnen und Schüler keine Mühe haben. Zudem haben die Lernenden mit den wenig anspruchsvollen Umformungsschritten beim Lösen der Gleichungssysteme kaum Probleme, haben sie doch die weit schwierigeren Bruchtermumformungen bereits behandelt. Daher kann man vermuten, dass nicht nur begabtere Lernende flexibles Vorgehen zeigen, sondern dass auch weniger leistungsstarke Lernende wenigstens manchmal verschiedene Lösungsmethoden benutzen. Dies ist aber nur eine Hypothese, die erst durch die Untersuchung gestützt oder eben falsifiziert werden soll.

2.4. Forschungsfragen

Die drei folgenden Fragen werden untersucht:

1. Benutzen Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr überhaupt flexibel mehrere Strategien, und wenn ja, in welchem Mass?

   Als Lehrperson hört man manchmal von Lernenden auf dieser Altersstufe, dass sie lieber keinen zweiten Lösungsweg sehen möchten, weil sie das nur verwirre, oder dass sie nicht verstehen, weshalb man eine zweite Lösungsmethode betrachtet, wenn man schon eine gefunden hat. Schülerinnen und Schüler sind durch die Anforderungen der Algebra in diesem Alter generell verunsichert, sodass es nicht offensichtlich ist, ob sie überhaupt Flexibilität zeigen können. Weil sie möglicherweise lieber nur eine einzelne Methode kennen zu lernen, diese dafür möglichst intensiv zu üben wünschen, ist es zudem nicht a priori klar, ob sie überhaupt Flexibilität zeigen wollen, selbst wenn sie es könnten.
2. Fallen den Schülerinnen und Schülern alle drei Methoden gleich schwer oder bevorzugen sie gewisse Methoden?

   Für geübte Mathematikerinnen und Mathematiker sind die drei Methoden gleich leicht und gleich offensichtlich, dass sie bei deren Benutzung nur darauf schauen, welche von ihnen bei einem gegebenen Gleichungssystem in ihren Augen am geeignetsten ist. Das muss aber bei Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr nicht ebenso sein, sodass sie diese eine Methode, die ihnen schwieriger vorkommt, tendenziell seltener einsetzen als die anderen Methoden, auch wenn sie in den Augen der Versuchsleitung weniger optimal ist.
3. Betrachten die Schülerinnen und Schüler bei Gleichungssystemen dieselbe Methode als die geeignetste, wie dies geübte Mathematikerinnen und Mathematiker tun?

   Diese Frage ist eng verwandt mit der vorhergehenden. Bei der Planung der Studie ist davon ausgegangen worden, dass es erstens objektive Kriterien gibt, welche Methode zu welchem Gleichungssystem optimal passt, und dass diese Kriterien zweitens für Leute mit langjähriger Übung dieselben sind wie für Leute, die erst kürzlich mit der Algebra in Kontakt gekommen sind. Dass dies so sein muss, ist nicht offensichtlich.

3. Methode

Bei der Untersuchung wurden drei Schulklassen im achten Schuljahr an zwei verschiedenen Langzeitgymnasien in der Schweiz getestet.

3.1. Stichprobe

Die drei Schulklassen, die an der Studie teilgenommen haben, und die im Folgenden mit den Nummern 100, 200 und 900 bezeichnet werden, was den ersten Ziffern für die Identifikationsnummern der Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Klasse entspricht, werden im Folgenden etwas genauer beschrieben. Das Programm *Flextest* wurde in allen drei Klassen in den letzten beiden Wochen vor den Weihnachtsferien 2008 eingesetzt.

Die Klasse 900, eine Klasse an einem privaten Gymnasium im Kanton Zürich bestehend aus 12 Mädchen und 9 Knaben, hat als erste an der Untersuchung teilgenommen. Zwei Mädchen waren am Tag, an dem die Klasse mit dem Programm *Flextest* gearbeitet hat, jedoch krank, und eine weitere Schülerin brach den Test ab, weil sie vorher die ganze Woche, in der die übrigen Schülerinnen und Schüler das Lösen von Gleichungssystemen geübt hatten, krank gewesen war. Somit haben 9 Mädchen und 9 Knaben aus dieser Klasse Daten beigesteuert.

Die Klasse 100, die als zweite an der Untersuchung teilgenommen hat, wird an einem öffentlichen Gymnasium im Kanton Luzern unterrichtet und besteht aus 12 Schülerinnen und 10 Schülern, wobei nur die Daten von 10 Mädchen und 10 Knaben ausgewertet werden konnten.

Die Klasse 200 an demselben öffentlichen Gymnasium im Kanton Luzern wie die Klasse 100 ist die letzte Klasse, die an der Studie teilgenommen hat. Sie besteht aus 11 Schülerinnen und 8 Schülern.

3.2. Materialien

Bei der Untersuchung wurden folgende Materialien benutzt, die in den Anhängen genauer eingesehen werden können:

1. Instruktionen für den Versuchsleiter zur Vorbereitung des Versuchs:
   Die Versuchsleiter werden aufgefordert, vorgängig das Programm *Flextest* zu installieren, die Testbüchlein und das Zusatzblatt ‚*Löse folgendes Gleichungssystem auf drei verschiedene Arten*' zu kopieren und die VP Nummern einzutragen.
2. Das Programm *Flextest*:
   Auf einem Eingangsmenu geben die Schülerinnen und Schüler ihre Daten ein, bevor das Programm ihnen die zu lösenden Gleichungssysteme in zufälliger Reihenfolge präsentiert.
3. Text ‚*Lineare Gleichungssysteme*':
   Mit diesem Lerntext haben die Schülerinnen und Schüler nach einer einführenden Lektion die drei Lösungsverfahren Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additions-

methode für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten gelernt. Dabei haben sie die drei Verfahren als gleichberechtigt nebeneinander stehend kennen gelernt.

4. Instruktionen für den Versuchsleiter zur Durchführung des Versuchs:
   Damit sich die Ergebnisse verschiedener Testsitzungen möglichst gut miteinander vergleichen lassen, wird der Ablauf durch Instruktionen genau festgelegt: Begrüssung, Vorlesen der Instruktion, Verteilen der Testbüchlein, Eintragen der persönlichen Angaben, Beantworten allfälliger Fragen, Eingeben der persönlichen Angaben am Computer, Test, Beenden des Tests mit Verteilen des Zusatzblattes, Verabschiedung.
5. Instruktionen für die Versuchspersonen:
   Die Instruktionen, die der Versuchsleiter vorliest, erklärt den Schülerinnen und Schülern, wie das Programm *Flextest* funktioniert, wie sie die Aufgaben bearbeiten sollen, wann sie die Ergebnisse eingeben sollen, und dass sie nicht länger als zehn Minuten für eine Aufgabe aufwenden sollen.
6. Testbüchlein:
   Im Testbüchlein schreiben die Versuchspersonen die Zwischenschritte beim Lösen der Aufgaben auf, damit bestimmt werden kann, nach welchem Verfahren sie bei jeder Aufgabe vorgegangen sind.
7. Zusatzblatt:
   Mit dem Zusatzblatt ‚*Löse folgendes Gleichungssystem auf drei verschiedene Arten*‘ wird sichergestellt, dass die Versuchsperson überhaupt drei verschiedene Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten kennt.

Sämtliche Materialien mit Ausnahme des Textes ‚*Lineare Gleichungssysteme*‘, der von den Autoren der vorliegenden Studie geschrieben wurde, sind vom Institut für Lehr- und Lernforschung an der ETH Zürich zur Verfügung gestellt worden.

3.3. Versuchsdesign

Es wurde in dieser Versuchsanordnung versucht, sämtliche Versuchspersonen demselben Unterricht auszusetzen, damit alle möglichst gleiche Ausgangsvoraussetzungen haben. Es gibt also weder mehrere Gruppen mit unterschiedlicher Instruktion noch eine Kontrollgruppe.

3.4. Versuchsdurchführung

Die Schülerinnen und Schüler der drei Klassen kannten das Lösen einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten. In einer Lektion wurden sie auf das Problem sensibilisiert, mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen, indem man eine Unbekannte eliminiert und dadurch die Anzahl Gleichungen reduziert. Anschliessend bekamen sie den in den Anhängen ersichtlichen Text ‚*Lineare Gleichungssysteme*' mit dem Auftrag, ihn selbstständig durchzuarbeiten, sowie ein Blatt mit Aufgaben und Lösungen. Für das Bearbeiten des Lerntextes und der Aufgaben standen ihnen vier Lektionen sowie die Zeit für die Hausaufgaben einer Woche zur Verfügung.

Anschliessend arbeiteten sie nach Instruktion (siehe Anhänge) eine Doppellektion lang mit dem Programm *Flextest* und den verteilten Testbüchlein. Sie wussten nicht, dass es bei dieser Studie um die Flexibilität ging, und schlossen dies vermutlich auch nicht aus dem Namen des Programmes. Sie waren hingegen darüber informiert, dass mit diesem Test keine notenwirksame Leistungsbewertung verbunden war. Das Programm *Flextest* ist so entwickelt worden, dass es die Aufgaben zufällig geordnet präsentiert. Damit sollte es für eine Testperson so aussehen, als bekomme sie andere Aufgaben vorgelegt als die Versuchspersonen links und rechts nebenan, falls die Schülerinnen und Schüler so nahe beisammen sitzen, dass sie sich gegenseitig auf den Bildschirm oder in die Testbüchlein sehen können. (Die Randomisierung hat beim ersten Versuch jedoch noch nicht richtig funktioniert, was das Resultat, wie unten diskutiert wird, möglicherweise beeinflusst hat.)

Die Studie basiert auf der Annahme, dass es für lineare Gleichungssysteme objektive, rein syntaktische Merkmale dafür gibt, welche der drei Methoden Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsmethode sich zur Lösung am besten eignet. Wenn die beiden Gleichungen beide schon nach der gleichen Variablen (wie im Beispiel $y = 2x + 3$ und $y = -x + 1$) aufgelöst sind, so führt die Gleichsetzungsmethode am schnellsten zum Ziel. Ist aber nur eine nach einer der Variablen aufgelöst (wie in $y = 2x + 3$ und $2y - 5x = 1$ oder wie im Aufgabenbeispiel 111 des Programms *Flextest* im Anhang), so eignet sich die Einsetzungsmethode am besten. In allen übrigen Fällen ist die Additionsmethode die passendste Wahl. Auf diese Weise kann zu jedem gegebenen Gleichungssystem ein *Problemtyp* bestimmt und mit dem *gewählten Verfahren* verglichen werden. (Die syntaktischen Merkmale und die Problemtypen wurden jedoch mit den Versuchspersonen nicht besprochen.)

4. Ergebnisse

Wir diskutieren die Studie qualitativ. Die Auswertung und die Tabellen in diesem Kapitel stammen von Matthias Lüthi vom Institut für Lehr- und Lernforschung der ETH Zürich. In Rot steht jeweils der Idealfall, bei dem der Problemtyp und das gewählte Verfahren übereinstimmen.

4.1. Daten der Logfiles

4.1.1. Wahl der Lösungsstrategie

Tabelle 1: Prozentuale Verteilung der Lösungsstrategien in Abhängigkeit vom Problemtyp gemittelt über Personen (Standardabweichung in der Klammer)

Problemtyp	Gewähltes Verfahren				Gesamt
	Addition	Einsetzen	Gleichsetzen	Rest	
Addition	65 (43)	12 (25)	14 (33)	9 (20)	100 (0)
Einsetzen	15 (31)	60 (39)	16 (33)	9 (18)	100 (0)
Gleichsetzen	18 (37)	5 (17)	74 (42)	4 (16)	100 (0)
Gesamt					100 (0)

Die obige Tabelle zeigt, dass über 60% der Schülerinnen und Schüler die richtige Strategie gewählt haben, wobei die Gleichsetzungsmethode mit 74% deutlich besser abschneidet als die beiden anderen Methoden. Die nicht optimal gewählten Methoden liegen etwa gleichverteilt um 15%. Weiter scheinen jeweils weniger als 10% der Schülerinnen und Schüler nicht gewusst zu haben, wie sie die Aufgabe lösen sollen.

4.1.2. Korrekt gelöste Aufgaben

Tabelle 2: Prozentsatz korrekt gelöster Aufgaben gemittelt über Personen (Standardabweichung in der Klammer)

Problemtyp	Gewähltes Verfahren				Gesamt
	Addition	Einsetzen	Gleichsetzen	Rest	
Addition	52 (25)	28 (36)	42 (26)	16 (36)	44 (26)
Einsetzen	50 (36)	54 (34)	49 (40)	5 (13)	48 (28)
Gleichsetzen	47 (33)	22 (40)	77 (25)	17 (41)	68 (30)
Gesamt	*51 (26)*	*48 (33)*	*71 (28)*	*11 (25)*	

Auch hier schneidet die Gleichsetzungsmethode mit 77% klar am besten ab. Die beiden anderen Methoden liegen etwas über 50%. Bei der ungünstigen Methodenwahl zeigen sich jedoch grosse Unterschiede. Bei der Additionsmethode liegt die Lösungsrate bei 50%, bei der Gleichsetzungsmethode etwas tiefer, aber bei der Einsetzungsmethode nur bei etwa 25%.

4.1.3. Effizienz der Lösungen

Tabelle 3: Lösungszeiten in Sekunden gemittelt über Personen (Standardabweichung in der Klammer)

Problemtyp	Gewähltes Verfahren				Gesamt
	Addition	Einsetzen	Gleichsetzen	Rest	
Addition	212 (83)	303 (153)	254 (131)	184 (117)	224 (86)
Einsetzen	216 (95)	226 (107)	200 (79)	191 (154)	215 (85)
Gleichsetzen	211 (90)	219 (129)	114 (41)	93 (76)	129 (57)
Gesamt	216 (83)	245 (105)	141 (61)	174 (109)	

Bei der Additionsmethode benötigten die Schülerinnen und Schüler unabhängig vom jeweiligen Problemtyp um die 215 Sekunden. Bei der Gleichsetzungsmethode ist die Zeit aber abgestuft nach Rechenaufwand, sodass die Zeit für den Problemtyp Addition am grössten, für den Problemtyp Einsetzen kleiner und für den Problemtyp Gleichsetzen – also bei der optimal gewählten Methode – am kleinsten war. Die Einsetzungsmethode ist jedoch für alle Problemtypen – auch bei der geeignetsten Methode – am langsamsten. Sie ist beim Problemtyp Addition sogar noch langsamer als die Gleichsetzungsmethode, obwohl dort mehr Rechenschritte benötigt werden.

4.2. Auswertung der Testbüchlein

4.2.1. Rechenschritte bis zur Lösung

Tabelle 4: Anzahl benötigter Zeilen bis zur Lösung gemittelt über Personen (Standardabweichung in der Klammer)
Daten nur von der Klasse 200!

Problemtyp	Gewähltes Verfahren				Gesamt
	Addition	Einsetzen	Gleichsetzen	Rest	
Addition	5.8 (1.6)	6.1 (1.5)	7.9 (2.4)	1.3 (1.7)	5.0 (2.3)
Einsetzen	4.4 (2.0)	4.8 (1.0)	6.8 (2.4)	1.4 (1.9)	4.3 (1.6)
Gleichsetzen	4.6 (1.4)	6.0 (2.7)	3.9 (0.6)	1.3 (1.5)	3.9 (0.7)
Gesamt	5.6 (1.4)	5.4 (1.0)	4.9 (1.9)	1.3 (1.4)	

Interessanterweise benötigten die Schülerinnen und Schüler bei der Additionsmethode für den Problemtyp Addition im Durchschnitt mehr Zeilen (d.h. Rechenschritte) als bei den andern beiden Problemtypen. Bei der Einsetzungsmethode brauchten sie erwartungsgemäss für den passenden Typ von Gleichungssystemen weniger Schritte als für die anderen Typen. Dies gilt auch für die Gleichsetzungsmethode, wobei sich hier eine klare Abstufung nach Rechenaufwand zeigt, die auch mit den Lösungszeiten korreliert.

4.2.2. Anzahl benutzte Methoden

Die Testbüchlein der Klassen 100 und 200, die vom gleichen Mathematiklehrer unterrichtet werden, sind daraufhin untersucht worden, wie viele Methoden eine Schülerin oder ein Schüler eingesetzt hat. Von den Testpersonen dieser beiden Klassen haben 37.5% nur eine Methode, 32.5% zwei und 30% drei Methoden verwendet. Bei denen, die nur eine Methode benutzt haben, haben 60% die Gleichsetzungs- und 40% die Additionsmethode gewählt. Bei denen, die zwei Methoden benutzt haben, ist zu 92% die Gleichsetzungsmethode, zu 61% die Einsetzungsmethode und zu 46% die Additionsmethode eingesetzt worden. Bei denen, die alle drei Methoden benutzt haben, sind die drei Methoden etwa gleichverteilt zum Einsatz gekommen.

5. Diskussion

Wir diskutieren qualitativ und nicht quantitativ, was man aus der Studie herauslesen kann, wo die methodischen Grenzen liegen, und welche weiteren Aspekte bei der Interpretation der Resultate zu beachten sind.

5.1. Forschungsfragen

5.1.1. Frage nach der Flexibilität im achten Schuljahr

Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr sind etwa 14 Jahre alt und somit längst noch nicht ausgewachsen. So stellt sich die Frage, ob Jugendliche auf dieser Entwicklungsstufe überhaupt in der Lage sind, für die Lösung einer Kategorie von Aufgaben – hier lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten – mehrere Lösungsstrategien anzuwenden. Nach Hasselhorn und Gold (2006) entwickelt sich beispielsweise die Fähigkeit, irrelevante Information auszublenden, erst ab dem zwölften Lebensjahr, und nach Ormrod (1990) geschieht im menschlichen Hirn in der Pubertät und im frühen Erwachsenenalter sehr viel wie das Reduzieren von nicht gebrauchten Synapsen (engl. *synaptic pruning*), was einen Einfluss darauf haben könnte, ob die Jugendlichen in diesem Alter überhaupt zu Flexibilität der hier betrachteten Art fähig sind.

Die Resultate der Studie zeigen, dass dies möglich ist, denn eine Mehrheit der getesteten Schülerinnen und Schüler haben zwei oder drei Methoden benutzt. (In den Klassen 100 und 200 sind es grob gerechnet je ein Drittel der Versuchspersonen, die eine, zwei oder drei Methoden eingesetzt haben, wie die Untersuchung der Testbüchlein gezeigt hat.) Auch wenn bei einzelnen Jugendlichen dieser Altersstufe gewisse Abneigungen gegen multiple Lösungsstrategien festgestellt werden können, scheint die Mehrheit von ihnen – wenigstens auf gymnasialem Niveau – keine fundamentalen Widerstände dagegen zu haben.

5.1.2. Frage nach der bevorzugten Lösungsmethode

Die Gleichsetzungsmethode ist offensichtlich das beliebteste Lösungsverfahren und die Einsetzungsmethode das unbeliebteste. Die Resultate der Studie zeigen zudem, dass es sich bei der Additions- und Gleichsetzungsmethode auszahlt, die dem Problemtyp entsprechende und damit als optimal betrachtete Methode zu wählen, dass dies aber für die Einsetzungsmethode nicht im gleichen Masse zutrifft.

Das kann daran liegen, dass das, was in den Augen geübter Mathematiker die passende Methode ist, dies nicht unbedingt auch in den Augen der Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr zu sein braucht, weil sie mit gewissen Lösungsschritten grössere Schwierigkeiten haben als mit anderen. (Aus diesem Grund sind die Zahlen in der Tabelle 4 im Abschnitt 4.2.1 mit Vorsicht zu geniessen, denn eigentlich müsste man die Zeit pro Zeile einzeln messen, um so feststellen zu können, mit welchen Rechenschritten die Jugendlichen dieser Altersstufe mehr oder weniger Mühe haben.)

Die Einsetzungsmethode verlangt einen Ausmultiplikationsschritt, also eine Anwendung des Distributivgesetzes, sowie das Zusammenfassen der Terme, in denen die gleiche Variable vorkommt. Das Einsetzen führt in der Aufgabe 111 mit den beiden Gleichungen $9x - 2y = 4$ und $y = (-11x) + 29$, die im Anhang als Aufgabenbeispiel des Programms *Flextest* gezeigt ist, zur Gleichung $9x - 2((-11x) + 29) = 4$, die nicht ganz einfach ist, weil die Schülerinnen und Schüler in diesem Alter nach wie vor Mühe mit negativen Zahlen haben. Ausmultiplizieren führt zu $9x + 22x - 58 = 4$, und Zusammenfassen der Terme zu $31x - 58 = 4$. Verglichen mit der Additionsmethode, bei der die zweite Gleichung erst zu $2y = (-22x) + 58$ verdoppelt wird und die beiden Gleichungen anschliessend zu $9x = (-22x) + 58 + 4$ addiert werden, ist zumindest fraglich, welche der beiden Methoden für Jugendliche dieses Alters einfacher ist. Die

Einsetzungsmethode führt hier mit dem Minuszeichen, das auf einen komplexen Term wirkt, aber eindeutig zu einer unübersichtlicheren Gleichung als die Additionsmethode.

5.1.3. Frage nach der optimalen Lösungsmethode

Gerade bei diesem Beispiel kann man sich deshalb berechtigterweise fragen, ob die Additionsmethode – zumindest für weniger geübte Rechner – nicht generell besser zu diesem Gleichungssystem passen würde, und ob somit das einfache, rein syntaktische Unterscheidungsmerkmal, mit dem der Problemtyp bestimmt wird, zu kurz greift. Die Lösungszeiten in der Tabelle 3 im Abschnitt 4.1.3 lassen solche Vermutungen zu, denn die Verfahren Gleichsetzen und Addition schneiden beim Problemtyp Einsetzen besser ab als das als optimal betrachtete Verfahren Einsetzen.

Bevor man davon sprechen kann, welche Methode für einen Problemtyp optimal ist, muss man erst klären, was optimiert werden soll. Beobachtungen in der Klasse 900 haben gezeigt, dass mindestens ein Teil der Schülerinnen und Schüler die Qualität ihrer Lösungen als wichtiger betrachtet hat als die Effizienz. Entsprechend haben sie vermutlich diejenige Strategie gewählt, die in Bezug auf Korrektheit des Resultats optimal erschien, und nicht diejenige, die in Bezug auf Effizienz optimal gewesen wäre. Andere – vor allem leistungsstarke – Schülerinnen und Schüler haben sich möglicherweise auch noch von weiteren beispielsweise ästhetischen Optimierungskriterien leiten lassen, denn gewisse Lösungswege werden als mathematisch elegant, andere jedoch als Murks empfunden. Es ist somit durchaus denkbar, dass sich einzelne Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe 111 vom Programm *Flextest* deshalb für die Additions- und nicht die Einsetzungsmethode entschieden haben, weil ihnen die dabei entstehende Gleichung $9x = (-22x) + 58 + 4$ besser gefallen hat als $9x - 2((-11x) + 29) = 4$.

5.2. Zusammenfassende Betrachtungen zu den Resultaten

Die Ergebnisse im letzten Kapitel haben so nicht erwartete Aspekte gezeigt, die sich folgendermassen zusammenfassen lassen:

1. Die Gleichsetzungsmethode hat eindeutig am besten abgeschnitten. Sie scheint den Schülerinnen und Schülern in diesem Alter besser zu liegen als die anderen Methoden. Auch bei grösserem Rechenaufwand finden sich immer noch viele korrekte Antworten. Wir nehmen an, dass die Schülerinnen und Schüler in diesem Alter sie intuitiv am verständlichsten empfinden.
2. Die Einsetzungsmethode auf der anderen Seite schneidet schlecht ab. Nur beim passenden Problemtyp liefert sie vergleichbar gute Resultate. Obwohl sie eine für

mathematisch geschulte Personen simple Verallgemeinerung der Gleichsetzungsmethode ist, scheint sie den Schülerinnen und Schülern nicht zu liegen. Eine mögliche Erklärung ist, dass der Lerntext zum Selbststudium die Gleichsetzungsmethode als erste behandelte und so indirekt zum Standard machte. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Einsetzungsmethode (wie oben besprochen) zu einer Anwendung des Distributivgesetzes führt und deshalb als schwieriger empfunden wird.

3. Die Additionsmethode wurde von den Schülerinnen und Schülern als Alternative zur Gleichsetzungsmethode erkannt, was sich an der konstanten Prozentzahl der korrekt gelösten Aufgaben und den Lösungszeiten unabhängig von der Wahl der Methode zeigt. Die Additionsmethode ist sehr schematisch, was zu einer starken Automatisierung führen kann. Wie unten erwähnt ist zudem während der Einführung ins Lösen von linearen Gleichungssystemen bei der Klasse 900 die Additionsmethode als erste gefunden worden, was möglicherweise zu einer Bevorzugung dieser Methode in dieser Klasse geführt hat.
4. Die Resultate lassen die Vermutung zu, dass das Vorgehen bei der Gleichsetzungs- und Additionsmethode für die Schülerinnen und Schüler klarer ist als bei der Einsetzungsmethode. Das passt auch zur Beobachtung bei der Sichtung der Testbüchlein, dass sich gut ein Drittel der Schülerinnen und Schüler in den Klassen 100 und 200 auf nur eine Methode und etwa ein weiterer Drittel auf nur zwei Methoden festgelegt hatte.

5.3. Technische Probleme bei der Durchführung der Studie

Versuchsanordnungen dieser Art können nicht so objektiv durchgeführt werden, wie man es theoretisch gerne hätte, denn zwei verschiedene Versuchsleiter mit ihren Eigenheiten und drei verschiedene Klassen ebenfalls mit ihren Eigenheiten führen zwangsläufig auch bei noch so grosser Sorgfalt zu unterschiedlichen Voraussetzungen. Aspekte dieser Art werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

Die Klasse mit der Nummer 900 ist am 12. Dezember 2008 als erste der drei Klassen getestet worden. Bei der vorangehenden Einführung ins Thema „Lineare Gleichungssysteme“ ist dabei unerwarteterweise die Additionsmethode, obwohl sie für das besprochene Gleichungssystem nicht sonderlich geeignet war, von einem Schüler als erste vorgeschlagen worden, sodass die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse die Additionsmethode als erste Strategie zur Lösung von linearen Gleichungssystemen kennen lernten und deshalb später möglicherweise bevorzugt einsetzt haben.

Das Programm *Flextest* hat bei dieser Klasse – anders, als in den Instruktionen behauptet – allen Versuchspersonen die Gleichungssysteme in derselben Reihenfolge präsentiert, sodass nicht ausgeschlossen werden kann, dass sich die Schülerinnen und Schüler, die im Computerraum recht nahe beieinander sassen, gegenseitig abgeschrieben haben, denn sie hatten grosse Angst, Fehler zu machen, obwohl sie wussten, dass der Test anonym und ohne Wirkung auf ihre Note ablief. Das zeigte sich auch darin, dass sie lieber mehr Zeit brauchten, um die richtige Lösung zu finden, als das Ergebnis schnell einzugeben. Sie hatten auch manchmal bereits das richtige Resultat eingegeben, beschäftigten sich aber weiter mit der Aufgabe und vergassen, die Ok-Taste zu drücken, oder drückten die Weiter-Taste für die nächste Aufgabe bereits, obwohl sie noch mit der vorhergehenden Aufgabe beschäftigt waren. Für sie war eindeutig die Korrektheit ihrer Lösung wichtiger als die Zeit. Sie schienen die Zeitmessung völlig zu ignorieren. Zudem wussten nicht alle Schülerinnen und Schüler, wo auf der Tastatur Minuszeichen und Schrägstrich für Brüche zu finden waren, was die Zeitmessung zusätzlich verfälschte. So dauerte es eine ganze Weile, bis die Klasse einen ruhigen, konzentrierten und effizienten Arbeitsrhythmus fand, wie er für diese Studie von Anfang an erwünscht gewesen wäre. Das lag sicher teilweise daran, dass der Mathematiklehrer mit dieser Klasse vorher noch nie am Computer gearbeitet hatte.

Das Problem, dass in *Flextest* die Randomisierung nicht funktionierte, wurde sofort behoben, sodass die Klasse 100 am 22. Dezember 2008 bereits mit der korrigierten Version arbeiten konnte. Die Durchführung in dieser Klasse verlief weitgehend reibungslos. Ein Schüler kam jedoch zufällig auf die ESC-Taste, worauf *Flextest* abgebrochen wurde und er nochmals von vorne beginnen musste, und bei zwei Schülerinnen waren die Logfiles nach der Durchführung nicht mehr vorhanden, vermutlich weil sie sie selber gelöscht hatten. Zudem stand im Testbüchlein des Schülers, der mit der ESC-Taste das Programm abgebrochen hatte, kaum etwas Brauchbares, sodass es nicht verwendet werden konnte.

Bei der Klasse 200 verlief die Durchführung am 24. Dezember 2008 nicht so problemlos, was vom Versuchsleiter, der die Klasse als Mathematiklehrer kennt, nicht anders erwartet worden war, weil die Schülerinnen und Schüler wenig motiviert waren, da sie wussten, dass ihre Leistung keinen Einfluss auf ihre Note hat. Sie gaben – vor allem gegen Schluss des Tests – viele Fragezeichen ein, lösten die Aufgaben schlecht oder gaben irgendwelche Werte ein ohne zu protokollieren, wie sie zu diesen Ergebnissen gekommen waren. Entsprechend gross waren die Diskrepanzen zwischen den Testbüchlein und den Logfiles. Verglichen mit der Klasse 100 arbeitete die Klasse 200 weniger seriös und konzentriert. Weil es für sie um nichts ging, waren sie halbherzig bei der Sache und gaben sich nur wenig Mühe.

5.4. Methodische Grenzen der Studie

Bedingt durch den limitierten Zeitaufwand und die kleine Erfahrung mit der Durchführung solcher Studien geben unsere Ergebnisse nur sehr beschränkt Einblick in die Flexibilität der Schülerinnen und Schüler beim Lösen von linearen Gleichungssystemen, und bedingt durch die Tatsache, dass alle Versuchspersonen annähernd den gleichen Lernbedingungen ausgesetzt waren, und dass es somit weder Vergleichs- noch Kontrollgruppen gab, lassen sich bei dieser Studie keine Vergleiche anstellen, um Effekte unterschiedlicher Instruktion zu messen.

5.5. Offene Fragen

Die Studie an den drei Gymnasiumklassen im achten Schuljahr hat gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler auf dieser Altersstufe grundsätzlich zur Flexibilität bei der Wahl geeigneter Lösungsstrategien fähig sind. Offen geblieben ist aber die Frage, aus welchen Gründen sie flexibel aus verschiedenen Strategien wählen. Einzelne Versuchspersonen haben die Richtigkeit ihrer Lösungen optimiert und nicht die Schnelligkeit, mit denen sie ihr Resultat gefunden haben. Sie waren intrinsisch motiviert, korrekte Antworten abzugeben, während die Geschwindigkeit für sie weniger wichtig war. Schliesslich durften sie weder früher ins Wochenende, noch wurden sie für diese Form von Effizienz belohnt, wenn sie schneller fertig waren. Vielleicht hat die Anonymität der Untersuchung auch verhindert, dass eine kompetitive Stimmung aufkommen konnte, die den Ehrgeiz angestachelt hätte. Wenn also sichergestellt werden soll, dass die Versuchspersonen Effizienz in Bezug auf die Lösungsgeschwindigkeit optimieren, müsste dies beispielsweise durch extrinsische Motivation schmackhaft gemacht werden, indem Schnelligkeit belohnt wird. Andererseits wäre es interessant herauszufinden, nach welchen Kriterien Jugendliche auf gymnasialer Stufe in diesem Alter ihren Lösungsweg optimieren, wenn es nicht die Effizienz ist.

Diese Frage ist speziell auch im Lichte der Studie von Star und Rittle-Johnson (2007) zu betrachten, denn die Benutzung verschiedener Strategien und die Benutzung effizienter Strategien dürfen weder verwechselt noch vermischt werden. Das liegt nicht nur daran, dass Schülerinnen und Schüler nach anderen Kriterien als Effizienz optimieren können, sondern auch am Unterricht, der je nachdem die Benutzung verschiedener oder aber die Benutzung effizienter Strategien in den Vordergrund stellen kann.

Die oben beschriebene Untersuchung der drei Klassen hat weiter gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler die Gleichsetzungsmethode bevorzugen, mit der Additionsmethode auch klar kommen, mit der Einsetzungsmethode aber Mühe haben, hat jedoch keinerlei Hinweis darauf gegeben, woher das kommt. Es ist oben diskutiert worden, dass dies daran liegen könnte, dass die Einsetzungsmethode zu komplexen Gleichungen führt, die ein als schwierig empfundenes Ausmultiplizieren erfordern. Diese Betrachtungen sind jedoch nur als erste vage Vermutungen zu betrachten, und genauere Abklärungen müssten erst zeigen, woran das wirklich liegt. Das Zählen der Lösungsschritte genügt möglicherweise nicht, um die Komplexität eines Lösungsweges zu untersuchen. Mindestens die für die einzelnen Schritte benötigte zeitliche Dauer müsste allenfalls auch aufgezeichnet werden.

Die Ergebnisse der Studie haben Hinweise darauf geliefert, dass die einfache, aber rein syntaktische Unterscheidung der Problemtypen von linearen Gleichungssystemen so nicht von den Schülerinnen und Schülern geteilt wird. In gewissen Fällen kann die Additions- oder die Gleichsetzungsmethode leichter zum richtigen Ergebnis führen, als es die theoretisch optimale Einsetzungsmethode könnte. Die Frage ist somit noch nicht abschliessend beantwortet worden, ob diese Einteilung in Problemtypen – wenigstens für die betrachtete Altersstufe achtes Schuljahr – wirklich die optimale Kategorisierung liefert.

Literaturverzeichnis

Deák, G.O. (2000). The Growth of Flexible Problem Solving: Preschool Children Use Changing Verbal Cues to Infer Multiple Word Meanings. *Journal of Cognition and Development, 1(2),* 157-191.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik.* Zürich: Bibliographisches Institut.

Hasselhorn, M. & Gold A. (2006). *Pädagogische Psychologie*. Stuttgart: W. Kohlhammer.

Klauer, K.J. & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen*. Weinheim: Beltz.

Ormrod, J.E. (1990). *Human Learning*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.

Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Rittle-Johnson, B., & Star, J.R. (2007). Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations. *Journal of Educational Psychology, 99(3),* 561-574.

Silver, E.A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29(3),* 75-80.

Silver, J.A., Hughes, J.D., Bornstein, R.A., & Beversdorf, D.Q. (2004). Effect of Anxiolytics on Cognitive Flexibility in Problem Solving. *Cog Behav Neurol, 17(2),* 93-97.

Star, J.R., & Rittle-Johnson, B. (2007). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18(6),* 565-579.

Anhänge

Instruktionen für Testleiter und Versuchspersonen

Die Person, die den Test leitet, ist vom Institut für Lehr- und Lernforschung der ETH mit folgenden Instruktionen ausgestattet worden. Vor dem Test sollen folgende Punkte ausgeführt werden: Installieren des Programms *Flextest* auf allen Computern, die für den Test benötigt werden, kopieren des Testbüchleins sowie des Zusatzblattes ‚*Löse folgendes Gleichungssystem auf drei verschiedene Arten*' und eintragen der VP Nummer.

Auch der Ablauf des Testes ist durch Instruktionen festgelegt, damit sich die Ergebnisse verschiedener Testsitzungen möglichst gut miteinander vergleichen lassen:

1. Begrüssung
2. Vorlesen der Instruktion
3. Verteilen der Testbüchlein
4. Schülerinnen und Schüler auffordern, persönliche Angaben zu schreiben
5. Allfällige Fragen beantworten
6. Versuchsteilnehmende auffordern, VP Daten am Computer einzugeben
7. Mit dem Test beginnen
8. Während dem Test werden nur formale, nicht inhaltliche Fragen beantwortet
9. Ungefähr 8 Minuten vor Schluss Test beenden und Zusatzblatt verteilen
10. Verabschiedung

Die Person, die den Test leitet, liest (siehe Punkt 2. Vorlesen der Instruktion) folgenden Text vor:

1. Die Aufgaben werden dir am Computer präsentiert. Du hast eine andere Aufgabenreihenfolge als deine Nachbarn.
2. Schreibe die Aufgabe ab und löse sie auf dem Papier. Benutze für jede Aufgabe eine neue Seite. Schreibe oben links in das Feld die Aufgabennummer.
3. Schreibe alle Zwischenschritte und Ausrechnungen auf. Bitte schreibe leserlich. Dies ist wichtig, wir möchten nachher genau sehen, was du gerechnet hast.
4. Gib die Lösung für x oder y sobald Du sie gefunden hast in den Computer ein. Gebe nicht erst am Schluss beide Lösungen gleichzeitig ein.
5. Wir schauen für jede Aufgabe, ob die Lösung stimmt und wie lange du für die Rechnung brauchst. Es ist also wichtig, dass du die Aufgaben richtig und zügig löst.
6. Du kannst im Test vielleicht nur wenige Aufgaben lösen. Vor allem, wenn du das Thema Gleichungssysteme noch nicht in der Schule behandelt hast. Dies macht nichts, probiere aber dein Bestes zu geben.
7. Findest du die Antwort nicht, so gebe ein Fragezeichen ein.

8. Als Lösung kannst du positive und negative ganze Zahlen, Brüche (Eingabe mit Schrägstrich, z.B. 5/8) oder Dezimalzahlen (Eingabe mit Komma, z.B. 7,3) eingeben.
9. Für jede Aufgabe solltest du nicht länger als 10 Minuten aufwenden. Wenn du kurz vor dem Fertiglösen stehst, kannst du die Aufgabe noch beenden. Ansonsten gibst du Fragezeichen ein.
10. Wenn etwas nicht klappt, strecke auf und frage die Versuchsleiter!

Viel Erfolg!

Auf dem Zusatzblatt sollen die Versuchspersonen das folgende Gleichungssystem auf drei verschiedene Arten lösen, um zu zeigen, dass sie überhaupt verschiedene Methoden kennen und ein Test auf Flexibilität sinnvoll ist:

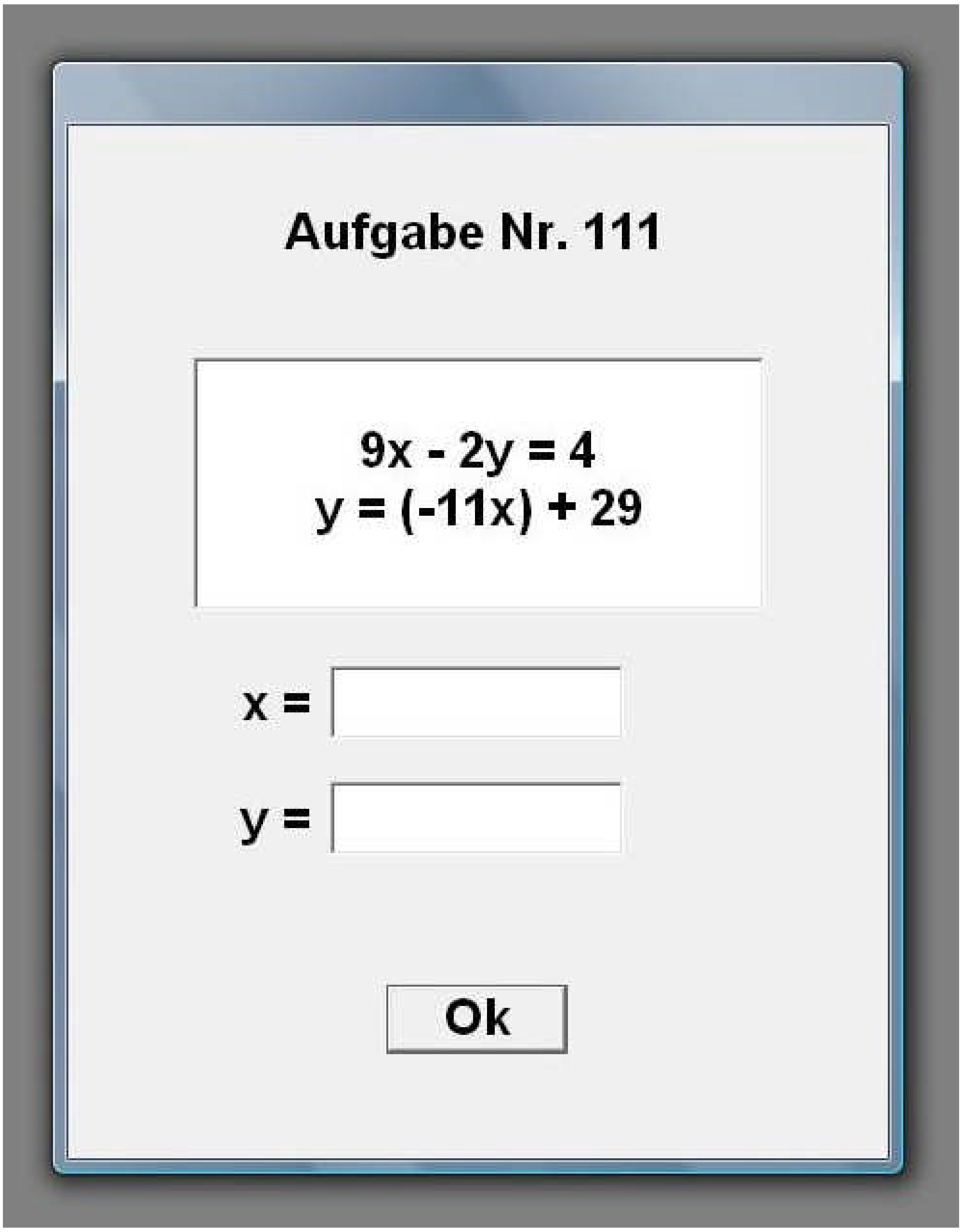
$$4x - y = 27$$
$$2x + y = 21$$

Beschreibung des Computerprogramms *Flextest*

Beim Starten des Programms *Flextest* kommt erst ein Menu zum Eingeben persönlicher Angaben und anschliessend werden die Aufgaben präsentiert:

- Eingangsmenu:

Aufgabenbeispiel:



Geeignete Textaufgaben

Um die drei verschiedenen Lösungsmethoden zu illustrieren, eignen sich Aufgaben, die natürlicherweise zu einem Gleichungssystem führen, zu der eine der Methoden besonders gut passt. Wenn man in den drei folgenden Textaufgaben das, was im Text vorgegeben ist, direkt in zwei Gleichungen übersetzt, so entstehen Gleichungssysteme, für die jeweils eine der hier vorgestellten Methoden besonders geeignet ist, und die recht einfach sind, sodass sie für eine Einführung ins Thema lineare Gleichungssysteme in Betracht gezogen werden können.

Aufgabe 1: Schwarze und weisse Kugeln
In einem Sack befinden sich schwarze und weisse Kugeln. Wären 21 weisse Kugeln weniger im Sack, gäbe es halb so viele schwarze wie weisse Kugeln. Wären aber 105 weisse Kugeln mehr im Sack, gäbe es einen Drittel so viele schwarze wie weisse Kugeln. Wie viele schwarze und weisse Kugeln sind im Sack?

> s: Anzahl schwarze Kugeln, w: Anzahl weisse Kugeln
> $s = 1/2 (w - 21)$
> $s = 1/3 (w + 105)$
> Hier eignet sich die Gleichsetzungsmethode, weil beide Gleichungen bereits nach der Variablen s aufgelöst sind.

Lösung:
Es sind 126 schwarze und 273 weisse Kugeln im Sack.

Aufgabe 2: Zwei Türme
In einer Stadt stehen zwei Türme mit verschiedenen Höhen. Der kleinere Turm misst fünf Sechstel des grösseren Turms. Wäre er 100 Meter weniger hoch, wäre er nur halb so hoch wie der grössere Turm. Wie hoch sind beide Türme?

> k: Höhe des kleineren Turms, g: Höhe des grösseren Turmes (beide in Meter)
> $k = 5/6\ g$
> $k - 100 = 1/2\ g$
> Hier eignet sich die Einsetzungsmethode, weil eine der beiden Gleichungen nach der Variablen k aufgelöst ist.

Lösung:
Der Türme sind 300 Meter beziehungsweise 250 Meter hoch.

Aufgabe 3: Abstimmung
Bei einer Abstimmung in einer Gemeinde sind (ohne leere Stimmen) 8508 gültige Stimmen eingegangen. Davon entfallen 1314 Stimmen mehr auf Ja als auf Nein. Wie viele Ja- und Nein-Stimmen sind eingegangen?

> j: Anzahl Ja-Stimmen, n: Anzahl Nein-Stimmen
> $j + n = 8508$
> $j - n = 1314$
> Hier eignet sich die Additionsmethode, weil beim Addieren der beiden Gleichungen die Variable n verschwindet.

Lösung:
Es sind 4911 Ja- und 3597 Nein-Stimmen eingegangen.

Einführung für die Lernenden

Nach einer kurzen Einführung in die Problemstellung haben die Schülerinnen und Schüler selbstständig den folgenden Text durchgearbeitet und anschliessend das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten geübt. Dazu ist in allen drei Klassen ein Blatt mit denselben linearen Gleichungssystemen sowie deren Lösungen verteilt worden, sodass die Schülerinnen und Schüler selbstständig daran arbeiten konnten.

Lineare Gleichungssysteme

a) Einleitung

Wir betrachten zunächst folgende Aufgabe:

In einem Stall hat es Hühner und Kanichen. Beide zusammen haben 36 Köpfe und 118 Beine. Wieviele Hühner und Kaninchen sind in diesem Stall?

Hier werden gleichzeitig *zwei* Grössen gesucht, nämlich die Anzahl Hühner und Kaninchen. Um diese zwei Grössen zu bestimmen, haben wir aber auch mehr Informationen (über die Köpfe und die Beine) zur Verfügung. Bisher haben wir solche Aufgaben mit einer Unbekannten (Variable) gelöst. Wir bezeichnen mit x die Anzahl Hühner und haben dann $36 - x$ für die Anzahl Kaninchen. Dies führt auf die Gleichung

$$2x + 4(36 - x) = 118$$

(Wir nehmen an, dass es sich um „normale" Hühner und Kaninchen handelt: jedes Huhn hat genau einen Kopf und genau 2 Beine; jedes Kaninchen hat auch genau einen Kopf und genau 4 Beine.)

Diese Gleichung können wir nach x auflösen und erhalten $x = 13$ (Hühner) und damit $y = 36 - x = 23$ (Kaninchen).

Wenn wir aber schon *zwei* gesuchte Grössen haben, warum führen wir nicht auch *zwei* Unbekannte ein?

Wir bezeichnen mit x die Anzahl Hühner und mit y die Anzahl Kaninchen. Dann erhalten wir für die Köpfe die Gleichung

$$x + y = 36$$

Für die Beine erhalten wir die Gleichung:

$$2x + 4y = 118$$

Die beiden Gleichungen gehören zusammen. Beide beschreiben etwas über die gleiche Anzahl Hühner bzw. Kaninchen. Wir schreiben dann diese beiden Gleichungen in der Form

$$\left| \begin{array}{rcr} x + y &=& 36 \\ 2x + 4y &=& 118 \end{array} \right|$$

Wir sprechen hier von einem *Gleichungssystem*. Die beiden Längsstriche zeigen an, dass die beiden Gleichungen zusammen gehören. Wir müssen nun aus diesen beiden Gleichungen das x und das y bestimmen.

Wir werden im folgenden drei Verfahren kennenlernen, wie wir aus den beiden Gleichungen x und y bestimmen können.

b) Gleichsetzungsmethode

Wir wollen drei Beispiele machen, um diese Lösungsmethode kennenzulernen. Im letzten Beispiel kommen wir zu den Hühnern und Kaninchen zurück.

1. Wir haben das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{vmatrix} y = 2x - 2 \\ y = x + 4 \end{vmatrix}$$

Dieses wollen wir nach x und y auflösen.
Lösung:
Da es sich jeweils um das *gleiche* y handelt, können wir die rechten Seiten der Gleichungen gleichsetzen. Wir bekommen dann eine Gleichung mit einer Unbekannten, die wir gewohnt nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= x + 4 \quad &&| - x \\ x - 2 &= 4 &&| + 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Wir haben jetzt schon x bestimmt. Das y erhalten wir, wenn wir $x = 6$ in eine der beiden Gleichungen einsetzen und y ausrechnen:

$$y = 2x - 2 = 2 \cdot 6 - 2 = 10$$

Damit haben wir die Lösung $x = 6$ und $y = 10$ für unser Gleichungssystem erhalten.
Wir können x auch in die andere Gleichung einsetzen und wir bekommen dasselbe Resultat:

$$y = x + 4 = 6 + 4 = 10$$

2. Das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 3y = 6x \\ 4x + 2y = 16 \end{vmatrix}$$

wollen wir nach x und y auflösen.
Lösung:
Um die Gleichsetzungsmethode benützen zu können, müssen wir zuerst beide Gleichungen nach y auflösen (rechne nach!)

$$\begin{vmatrix} y = 2x \\ y = -2x + 8 \end{vmatrix}$$

Wir können jetzt wieder die rechten Seiten gleichsetzen und x berechnen

$$\begin{aligned} 2x &= -2x + 8 \quad &&| + 2x \\ 4x &= 8 &&| : 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Diesen Wert setzen wir wieder in eine der Gleichungen ein und berechnen

$$y = 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

Die Lösung ist also $x = 2$ und $y = 4$.

3. Wir wollen jetzt noch unser „Kaninchen und Hühner"-Beispiel lösen:

$$\begin{vmatrix} x + y = 36 \\ 2x + 4y = 118 \end{vmatrix}$$

Auch hier wollen wir dieses Gleichungssystem nach x und y auflösen.
Lösung:
Anstatt beide Gleichungen nach y aufzulösen, können wir sie auch nach x auflösen (rechne nach!)

$$\begin{vmatrix} x = -y + 36 \\ x = -2y + 59 \end{vmatrix}$$

Wir setzen jetzt die beiden rechten Seiten wieder gleich

$$\begin{aligned} -y + 36 &= -2y + 59 \quad | + 2y - 36 \\ y &= 23 \end{aligned}$$

Diesen Wert können wir wieder in eine der Gleichungen einsetzen und jetzt x berechnen:

$$x = -y + 36 = -23 + 36 = 13$$

Es sind also 13 Hühner und 23 Kaninchen im Stall.

c) Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)

Hier werden nicht beide Gleichungen nach y aufgelöst, sondern nur eine. Diese nach einer Variable aufgelöste Gleichung setzen wir dann in die andere Gleichung ein.

Wir machen wieder drei Beispiele:

1. Im Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 2x + 3y = \phantom{x+{}}13 \\ y = x + 1 \end{vmatrix}$$

wollen wir wieder x und y bestimmen.
Lösung:
Die zweite Gleichung ist hier schon nach y aufgelöst. Anstatt die 1. Gleichungen noch nach y aufzulösen und gleichzusetzen, können wir gleich die rechte Seite der 2. Gleichung für y in die 1. Gleichung einsetzen. Wir bekommen dann wieder eine Gleichung in einer Unbekannten, die wir wie gewohnt nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 2x + 3(x + 1) &= 13 \\ 2x + 3x + 3 &= 13 \quad | - 3 \\ 5x &= 10 \quad | : 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Diesen Wert können wir wieder in die 2. Gleichung einsetzen und y berechnen:

$$y = x + 1 = 2 + 1 = 3$$

Wir haben also die Lösung $x = 2$ und $y = 3$.

2. Hier noch ein etwas komplizierteres Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 4y = \ \ 1 \end{array}\right|$$

Lösung: (rechne jeweils die einzelnen Schritte nach):

1) Löse die 1. Gleichung nach y auf:

$$y = \tfrac{2}{3}x - 4$$

2) y in die 2. Gleichung einsetzen:

$$3x + 4\left(\tfrac{2}{3}x - 4\right) = 1$$

3) Gleichung nach x auflösen:

$$x = 3$$

4) x in eine der Gleichungen einsetzen und nach y auflösen (am einfachsten in die unter 1) aufgelöste Gleichung):

$$y = -2$$

Die Lösung ist somit $x = 3$ und $y = -2$.

3. Wir wollen die „Hühner und Kaninchen"-Aufgabe auch mit dieser Methode lösen. Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ 36 \\ 2x + 4y = 118 \end{array}\right|$$

wollen wir wieder nach x und y auflösen.

Lösung:

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf:

$$y = 36 - x \qquad (*)$$

und setzen sie in die zweite Gleichung ein und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} 2x + 4(36 - x) &= 118 \\ 2x + 144 - 4x &= 118 \quad \mid -144 \\ -2x &= -26 \quad \mid :(-2) \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Diesen Wert können wir in $(*)$ einsetzen und y berechnen:

$$y = 36 - x = 36 - 13 = 23$$

Damit haben wir die Lösung $x = 13$ und $y = 23$.

Bemerkungen:

– Man kann natürlich auch im 1. Schritt die 1. Gleichung nach x auflösen und entsprechend fortfahren.

– Auch ist es möglich mit der 2. Gleichung zu beginnen, nach einer Variable auflösen, sie in die 1. Gleichung einsetzen und entsprechend fortfahren.
WICHTIG: Die nach einer Variable aufgelöste Gleichung *muss* in die *andere* Gleichung eingesetzt werden.

d) Additionsmethode

Eine weitere Methode zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen ist die sogenannte *Additionsmethode*. Auch diese Methode wollen wir an drei Beispielen genauer untersuchen.

1. Bestimme x und y:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 44 \\ 7x + 3y = 71 \end{array} \right|$$

Lösung:

1) Multipliziere die einzelnen Gleichungen so, dass die Koeffizienten von x entgegengesetzte Zahlen sind. Dies machen wir am einfachsten, wenn wir die 1. Gleichung mit dem x-Koeffizienten der 2. Gleichung (hier 7) multipliziert und die 2. Gleichung mit dem entgegengesetzten Koeffizienten der 1. Gleichung (hier -3) multipliziert:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 44 \\ 7x + 3y = 71 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot(-3) \end{array} \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 21x + 28y = 308 \\ -21x - 9y = -213 \end{array} \right|$$

2) Addiere nun jeweils die linken bzw. die rechten Seiten der Gleichungen und löse nach y auf (die x fallen dann weg):

$$\begin{aligned} 21x + 28y - 21x - 9x &= 308 - 213 \\ 19y &= 95 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

3) y in eine der Gleichungen einsetzen und nach x auflösen:

$$x = 8$$

Es ist also $x = 8$ und $y = 5$.

2. Löse das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} 2y = 8 - 3x \\ 5x + 31 = 3y \end{array} \right|$$

nach x und y auf.
Lösung:
Wir müssen das Gleichungssystem erst auf die Form wie in Beispiel 1 bringen, damit wir das Additionsverfahren anwenden können:

$$\left| \begin{array}{r} 2y = 8 - 3x \\ 5x + 31 = 3y \end{array} \right| \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{rl} 3x + 2y = & 8 \\ 5x - 3y = & -31 \end{array} \right|$$

Dann geht die Auflösung wie in Beispiel 1:

$$\left| \begin{array}{rr} 3x + 2y = & 8 \\ 5x - 3y = & -31 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{array} \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 15x + 10y = 40 \\ -15x + \ \ 9y = 93 \end{array} \right| \quad \xrightarrow{+} \quad 19y = 133 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Dieser Wert wird in eine (hier 1.) Gleichung eingesetzt:

$$3x + 2 \cdot 7 = 8 \quad \rightarrow \quad 3x = -6 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Wir haben also die Lösung $x = -2$ und $y = 7$ erhalten.

3. Auch mit dieser Methode wollen wir die „Hühner und Kaninchen"-Aufgabe lösen. Wir müssen also wieder das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ 36 \\ 2x + 4y = 118 \end{array} \right|$$

nach x und y auflösen.
Lösung:

$$\left| \begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ 36 \\ 2x + 4y = 118 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array} \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{rr} 2x + 2y = & 72 \\ -2x - 4y = & -118 \end{array} \right| \quad \xrightarrow{+} \quad -2y = -46 \quad \rightarrow \quad y = 23$$

Diesen Wert in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$x + 23 = 36 \quad \rightarrow \quad x = 13$$

Die Lösung ist also wieder $x = 13$ und $y = 23$.

Bemerkungen:

– Die ersten beiden Schritte, wo die Variable x wegfällt, heisst *Elimination von* x. Auch hier kann man natürlich zuerst die Variable y eliminieren.

e) Schlussbemerkungen/Zusammenfassung

Alle drei Methoden sorgen in einem ersten Schritt dafür, dass wir nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten haben, die wir lösen können.

Weil wir dann wissen, welchen Wert diese Unbekannte hat, können wir ihn in die Gleichungen einsetzen und bekommen so eine Gleichung für die andere Variable.