



Doctoral Thesis

## Sparse finite elements for radiative transfer

**Author(s):**

Widmer, Gisela

**Publication Date:**

2009

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005916456> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 18420

# Sparse Finite Elements for Radiative Transfer

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by  
GISELA WIDMER  
Dipl. Rech. Wiss. ETH Zurich  
born June 16, 1978  
citizen of Schönenwerd and Safenwil, Switzerland

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. R. Hiptmair, examiner  
Prof. Dr. Ch. Schwab, co-examiner  
Prof. Dr. S. Rjasanow, co-examiner

2009

## Zusammenfassung

Diese Doktorarbeit befasst sich mit der Diskretisierung der stationären monochromatischen Strahlentransportgleichung in absorbierenden und emittierenden Medien mit absorbierenden Randbedingungen, sowie mit der Entwicklung und Implementierung von effizienten Lösungsverfahren.

Strahlentransport ist von grosser Bedeutung bei Hochtemperaturanwendungen wie z.B. der Simulation von Lichtbögen in Hochspannungsunterbrechern. Obwohl die betrachtete Gleichung für jede feste Strahlungsrichtung eine einfache Transportgleichung darstellt, ist das effiziente Lösen der Gleichung eine grosse Herausforderung, da es sich wegen der Richtungsabhängigkeit der Strahlungsintensität um ein hochdimensionales Problem handelt und der Rechenaufwand im Verhältnis zur Genauigkeit der Lösung bei der Verwendung von Standardverfahren, wie zum Beispiel der Methode der diskreten Ordinaten, sehr stark anwächst. Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt deshalb auf der Entwicklung von Diskretisierungsstrategien und Lösungsverfahren, welche die Komplexität der Raumwinkeldiskretisierung kompensieren, ohne zu wesentlichen Einbussen bei der Genauigkeit der Lösung zu führen.

Um die Komplexität der Diskretisierung zu reduzieren, verwenden wir eine für den Strahlentransport angepasste Dünngittermethode, welche auf dem Produkt des zwei- oder dreidimensionalen Gebietes, sowie des zweidimensionalen Raumwinkels basiert. Dies ermöglicht es, die Anzahl Freiheitsgrade soweit zu reduzieren, dass sie fast proportional zu einer rein örtlichen Diskretisierung ist.

Spezielle Aufmerksamkeit muss den Randbedingungen geschenkt werden. Da es sich um ein Transportproblem handelt und die Randbedingungen an einem Ortsgitterpunkt richtungsabhängig sind, versagen Standarddünngittermethoden in der Nähe des Randes. Obwohl die Randapproximationseigenschaften der Diskretisierung für Hochspannungsunterbrecher nur eine untergeordnete Rolle spielen, präsentieren wir eine zum Rand hin verfeinerte Diskretisierung - den gradierten Dünngitterraum. Wir beweisen, dass diese Diskretisierung für zweidimensionale Gebiete die Approximationsrate von Standarddünngitterdiskretisierungen in einer etwas schwächeren Norm garantiert, wobei die Anzahl Freiheitsgrade nur um einen logarithmischen Faktor erhöht werden muss.

Ein wichtiger Teil der Arbeit besteht in der Implementierung von Algorithmen, mit welchen die Strahlungsintensität mit einem Rechenaufwand, welcher proportional ist zu der Anzahl verwendeter Freiheitsgrade im Dünngitterraum, berechnet werden kann. Dies ist möglich dank der Anwendung eines iterativen Lösungsverfahrens mit einem effizienten multiplikativen Unterraumvorkonditionierer.

Da bei Strahlungsproblemen oft Unstetigkeiten oder grosse Gradienten in der Lösung vorkommen - insbesondere bei Hochspannungsunterbrechern aufgrund der grossen Temperaturgradienten - kann die Anzahl Freiheitsgrade in der Diskretisierung im Vergleich zur Dünngitterdiskretisierung in vielen Fällen nochmals wesentlich reduziert werden. Dieser Ansatz liegt der adaptiven Dünngitterdiskretisierung zugrunde, bei welcher in einem iterativen Verfahren ein Unterraum des Dünngitterraums aufgebaut wird. Vor allem für Probleme mit isolierten Strahlungsquellen in stark absorbierendem Medium kann die Anzahl Freiheitsgrade auf diese Weise stark reduziert werden, ohne wesentlich an Genauigkeit einzubüssen.

## Abstract

This thesis is concerned with the discretization of the stationary monochromatic radiative transfer equation in absorbing and emitting media with fully absorbing walls, as well as the development and implementation of efficient solution strategies.

Radiative transfer is a very important mode of energy transfer in high temperature applications such as the simulation of light arcs in high-voltage circuit breakers. Although the equation under consideration is for any fixed direction of radiation a simple transport equation, solving the equation efficiently is very challenging, as the problem is high-dimensional due to the direction-dependency of the radiative intensity. This leads to very high computational costs to obtain accurate solutions when standard discretizations, such as discrete ordinates, are used. The work therefore mainly focuses on developing discretization strategies and solution methods that compensate for the complexity of the solid angle discretization without compromising accuracy.

In order to reduce the complexity of the discretization, we use a sparse grid method that has been adapted for the radiative transfer equation and that is based on the product of the two- or three-dimensional physical domain and the two-dimensional solid angle. This makes it possible to reduce the number of degrees of freedom such that it is almost proportional to a discretization in physical space only.

Special care has to be taken with respect to the boundary conditions. As the equation is a transport problem and the boundary conditions at a given point in physical space depend on the direction, standard sparse grid methods will fail near the boundary. Although approximation properties of the discretization near the boundary are of minor importance for high-voltage circuit breaker simulations, we present a discretization that is refined towards the boundary - the graded sparse tensor product space - and prove that this discretization makes it possible to obtain the approximation properties of a standard sparse grid discretization in a slightly weaker norm, while increasing the number of degrees of freedom by a logarithmic factor only.

An important part of the work consists of the implementation of algorithms with which the radiation intensity can be obtained at computational costs that are almost proportional to the number of degrees of freedom in the sparse tensor product space. This is possible thanks to an iterative solution process and an efficient multiplicative subspace preconditioner.

As solutions to a radiative transfer problem often have large gradients or even discontinuities - in particular in circuit breaker simulations due to large temperature gradients - the number of degrees of freedom in the discretization can often be reduced even further compared to a sparse tensor product discretization. This is the underlying idea of the adaptive sparse tensor product approximation, when a subspace of the sparse tensor product space is created in an iterative process. In particular for problems with isolated radiating sources in strongly absorbing media, the number of degrees of freedom can be drastically reduced without compromising accuracy.