

Multivariate Hawkes processes

Doctoral Thesis

Author(s):

Liniger, Thomas Josef

Publication date:

2009

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006037599>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Multivariate Hawkes Processes

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
THOMAS JOSEF LINIGER

Dipl. Math. ETH
born 9. November 1978
citizen of Luzern, LU

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Paul Embrechts, examiner
Prof. Dr. Alexander McNeil, co-examiner
Prof. Dr. Pierre Brémaud, co-examiner

Abstract

This thesis addresses theoretical and practical questions arising in connection with multivariate, marked, linear Hawkes processes.

On the theoretical side, the following two main topics are discussed: the calculation of moment measures; and the existence and uniqueness of stationary solutions. Two different representations of Hawkes processes are used to answer these problems. First, a Hawkes process is constructed as a recursive Poisson cluster process. This reveals the underlying treelike structure and is used to derive the moment measures. Second, a Hawkes process is defined as the solution to a thinning problem and the associated minimal solution is introduced. Afterwards continuations are defined and their coupling properties are analyzed. These results serve as a basis for answering the questions of existence and uniqueness of the aforementioned thinning problem.

The formulation and proof of these statements requires several results from point process theory, some of which have to be extended first. Notable related topics that are discussed are: translation-invariant measures and their corresponding reduced versions; an extended notion of delta-functions and their usefulness in proving decompositions of moment measures; a concise construction of Poisson cluster fields and the proof of associated moment measure formulas; the formulation of the self-similarity structure of Hawkes processes; a general definition of strong solutions; and finally a general notion of hazard rates and its relation to intrinsic intensity functions.

On the practical side, issues that come up during the implementation of parameter estimation and simulation algorithms are addressed: the parameterization of a reasonably large family of Hawkes processes which is suitable for numerical calculations; the derivation of algorithms which perform the calculations in a numerically efficient way; concrete examples of Hawkes processes; and an illustrative financial case study.

Kurzfassung

Die vorliegende Doktorarbeit beschäftigt sich mit theoretischen und praktischen Fragen, die im Zusammenhang mit multivariaten, markierten Hawkes Prozessen auftauchen.

Auf der theoretischen Seite werden die folgenden zwei Themen behandelt: Die Berechnung der Momentenmasse sowie die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von stationären Lösungen. Zu diesem Zweck werden zwei verschiedene Repräsentationen eines Hawkesprozesses verwendet: Einerseits wird erläutert, wie ein Hawkesprozess als rekursiver Poissonclusterprozess konstruiert werden kann. Diese Vorgehensweise verdeutlicht die zu Grunde liegende Baumstruktur von Hawkesprozessen und führt schliesslich zur Berechnung der Momentenmasse. Andererseits wird ein Hawkesprozess als Lösung eines bestimmten Verdünnungsproblems charakterisiert. Entsprechend wird eine zugehörige minimale Lösung dieses Problems definiert, sowie sogenannte Fortsetzungslösungen eingeführt. Desweiteren werden die Koppelungseigenschaften zweier Fortsetzungslösungen untersucht. Schliesslich werden diese Resultate verwendet, um die oben erwähnte Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit zu beantworten.

Die Formulierung all dieser Aussagen und deren Beweise basiert auf verschiedenen Resultaten aus der Punktprozessstheorie, welche für den gegebenen Zweck angepasst und erweitert werden. Dies trifft insbesondere auf folgende Resultate zu: Translationsinvariante Masse und deren reduzierte Versionen; eine Erweiterung von Kronecker's Delta-Funktion und deren Nutzen in der Herleitung von Zerlegungen von Momentenmassen; eine kompakte Definition von Poissonclusterfeldern und zugehörige Formeln für die Momentenmasse; die Selbstähnlichkeitsstruktur von Hawkesprozessen; eine allgemeingültige Definition von starken Lösungen und schliesslich eine erweiterte Definition einer Hazardrate und der Zusammenhang mit intrinsischen Intensitätsfunktionen.

Auf der angewandten Seite werden folgende Themen betrachtet, welche bei der Implementation von Parameterschätz- und Simulationsalgorithmen von Relevanz sind: Die Auswahl einer angemessen umfassenden Teilfamilie von Hawkesprozessen, welche geeignet ist für numerische Berechnungen; die Herleitung von numerisch effizienten Algorithmen; sowie ein Fallbeispiel aus dem Finanzmarkt zur Illustration.