

Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung

Working Paper

Author(s):

Carosio, Alessandro

Publication date:

2006

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006057779>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Originally published in:

Bericht / Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie 310-311

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Institut für Geodäsie
und Photogrammetrie

Bericht

311

**Fehlertheorie und
Ausgleichsrechnung
Band 2**

Alessandro Carosio

Januar 2006

Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung

Band 2

Alessandro Carosio

Provisorische Auflage Januar 2006



**Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie**

Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung
Band 2 Provisorische Auflage Januar 2006

Alessandro Carosio

© 2002
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

Alle Rechte vorbehalten

ISBN 3-906467-38-4

Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung

Inhaltsverzeichnis

	Seite
14. Die Kombination von terrestrischen Messungen und Satellitenbeobachtungen in ebenen Netzen	1
14.1 Revolution oder Entwicklung?	1
14.2 Entwicklungsstrategien	2
14.3 Allgemeine Betrachtungen	2
14.4 Die planimetrische Ausgleichung mit LTOP	4
14.5 Das funktionale Modell	5
14.6 Beschreibungssprache für das funktionale Modell	8
14.7 Das stochastische Modell	9
14.8 Die Darstellung der Resultate	10
14.9 Entwicklung und Implementation des Rechenprogrammes	11
15. Die Ausgleichung von Kreismessungen in planimetrischen Netzen	13
15.1 Einsatz von Kreiseltheodoliten	13
15.2 Das stochastische Modell	13
15.3 Das funktionale Modell	14
16. Ordnungsstatistiken	19
16.1 Allgemeines	19
16.2 Definitionen	19
16.3 Verteilung von $\mathbf{X}_{(n)}$	20
16.4 Wahrscheinlichkeitsdichte von $\mathbf{X}_{(n)}$	22
16.5 Mögliche Anwendung: Schätzung von σ	22
16.6 Zweite Anwendung der Ordnungsstatistiken: Analyse einer Reihe normalverteilter Zufallsvariablen mit der NMAX-Verteilung	26
17. A posteriori Varianz-Kovarianz-Schätzung	37
17.1 Problemstellung	37
17.2 Bekannte erwartungstreue Schätzer	37
17.3 Einfache Lösung für die Varianz-Schätzung	38
17.4 Allgemeine Schätzung von Varianz-Komponenten	39
17.5 Weitere Verfahren	42
18. Die Kollokation	45
18.1 Die Kollokation im Umfeld der Ausgleichungsmodelle	45
18.2 Besonderheiten der vermittelnden Ausgleichung	45
18.3 Das Kollokationsmodell	46
18.4 Mathematisches Modell	48
18.4.1 Beobachtungsgleichungen	48
18.4.2 Linearisierte Beobachtungsgleichungen	48
18.4.3 Stochastisches Modell	49

	Seite	
18.5	Ausgleichung	50
18.6	Die Anwendungen der Kollokation	52
	18.6.1 Voraussetzungen für s und n	52
	18.6.2 Voraussetzungen für C_{ss} und C_{mn}	53
	18.6.3 Beispiele für Korrelations- und Kovarianz-Funktionen	54
19.	Multivariate Statistik und Zuverlässigkeit	55
19.1	Problemstellung und Zielsetzungen	55
19.2	Die Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis	55
19.3	Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (einfache Verfahren a posteriori aus der Praxis)	58
	19.3.1 Der F-Test	58
	19.3.2 Der V-Test	58
	19.3.3 Der Test der geometrischen Bedingungen	59
	19.3.4 Der Test der standardisierten Verbesserungen	60
19.4	Verfahren aus der multivariaten Statistik (neue a posteriori Verfahren)	61
	19.4.1 Allgemeines	61
	19.4.2 Graphische Verfahren	61
	19.4.3 Die Hauptachsentransformation	62
	19.4.4 Der Hauptkomponententest	64
	19.4.5 Anwendungen in der Geodäsie	64
	19.4.6 Die Nichteindeutigkeit der Lösung	65
	19.4.7 Rechenbeispiele	65
19.5	Der NMAX-Test	68
	19.5.1 Die Teststatistik	68
	19.5.2 Die NMAX-Verteilung	69
	19.5.3 Rechenbeispiele	69
	19.5.4 Wichtige Eigenschaften des Tests	72
	19.5.5 Geometrische Bedeutung des NMAX-Tests	72
	19.5.6 Die Lokalisierung der groben Fehler	74
19.6	Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme (Verfahren a priori)	76
	19.6.1 Allgemeines	76
	19.6.2 Der Begriff Zuverlässigkeit	77
	19.6.3 Aktuelle Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse	80
19.7	NMAX-Test und Zuverlässigkeit	81
	19.7.1 Einführung	81
	19.7.2 Die Lösung	81
	19.7.3 Anwendung	84
19.8	Schlussfolgerung	84

14. Die Kombination von terrestrischen Messungen und Satellitenbeobachtungen in ebenen Netzen

14.1 Revolution oder Entwicklung ?

Mit der Inbetriebnahme des Systems GPS NAVSTAR Ende der 80er Jahre hat sich die Vermessungstechnik grundlegend verändert. Die meisten Ingenieurbüros sind heute mit GPS-Empfängern ausgerüstet. Diese Veränderungen in unserer Arbeitstechnik bedeuten eine grundlegende technische Entwicklung, vergleichbar mit der Einführung der elektronischen Distanzmessung am Ende der 60er Jahre.

GPS-Messungen werden selten isoliert eingesetzt, sie müssen in die traditionelle Vermessung integriert und mit anderen Messarten kombiniert werden. Diese Voraussetzungen werden sich nicht ändern, vor allem weil:

- GPS-Messungen nur im freien Gelände möglich sind, also nicht überall, wo Punkte verlangt sind.
- Anschlüsse, unzugängliche Hochpunkte, Detailpunkte und Messungen zwischen Gebäuden durch Richtungen und Distanzen aufgenommen werden.
- grosse Punktmengen aus einer Station tachymetrisch günstig aufgenommen werden können.
- die Präzision von GPS-Messungen nur relativ ist. Auch in Zukunft werden Netze benötigt, die die zu bestimmenden Punkte verbinden.

Man unterscheidet dreidimensional berechnete Modelle und Modelle mit getrennter Lage- und Höhenbestimmung. Die Wahl muss folgenden Gesichtspunkten Rechnung tragen:

- Das GPS-System ist dreidimensional. Die Höhenbestimmung ist weniger präzise als die Lagebestimmung.
- Die anderen Messungen können normalerweise in ebene Netze und Höhenbestimmung aufgeteilt werden.
- Der dreidimensionale Ausgleich ist in jenen Netzen gerechtfertigt, die in alle drei Dimensionen ausgedehnt sind. Er benötigt jedoch mehr Messungen, um eine genügende Zuverlässigkeit zu erhalten.

- Die Zuverlässigkeit der Resultate muss mathematisch analysiert werden. Dies ganz besonders bei dreidimensionalen Modellen.

Für die Bedürfnisse der schweizerischen Landesvermessung wurde nach Abwägen der Vorteile und Nachteile die Methode gewählt, die gemäss der klassischen Konzeption die Berechnung in Lage- und Höhenbestimmung trennt.

14.2 Entwicklungsstrategien

In den vergangenen Jahren wurden Rechenprogramme für die Verarbeitung geodätischer Messungen entwickelt (Ausgleichung von Netzen, statistischen Analysen, die Zuverlässigkeit usw.). Die heute verwendeten Rechenprogramme sind umfangreich und behandeln die meisten Probleme, die in der Praxis vorkommen.

Die Handhabung der GPS-Komponente wurde in die bestehenden Programme integriert. So erweiterte das Bundesamt für Landestopographie das Triangulationsprogramm LTOP mit der Verarbeitung von GPS-Messungen. Dieses Rechenprogramm ist in der Praxis weit verbreitet und wird in vielen Ingenieurunternehmen eingesetzt. Die folgenden Ausführungen beschreiben das mathematische Modell, das für die Ausgleichung verwendet wird.

14.3 Allgemeine Betrachtungen

Die GPS-Messungen werden vorerst durch das Rechenprogramm der Satellitenempfänger verarbeitet und ergeben dreidimensionale geozentrische Koordinaten. Die relative Genauigkeit ist gross, jedoch unter der Bedingung, dass die Punkte in derselben Session gemessen wurden, d.h. dass die Empfänger zur gleichen Zeit in Funktion waren und die Signale von den gleichen Satelliten erhielten. Mit weiterentwickelten Rechenprogrammen können auch Messungen aus verschiedenen Sessions zusammengefügt und als simultan betrachtet werden.

Die erhaltenen Koordinaten sind im System WGS 84. Sie lassen sich in genäherte Landeskoordinaten transformieren, wobei eine systematische Abweichung von einigen Metern zum Fixpunktnetz entstehen kann. Messungen aus derselben Session haben praktisch identische Abweichungen.

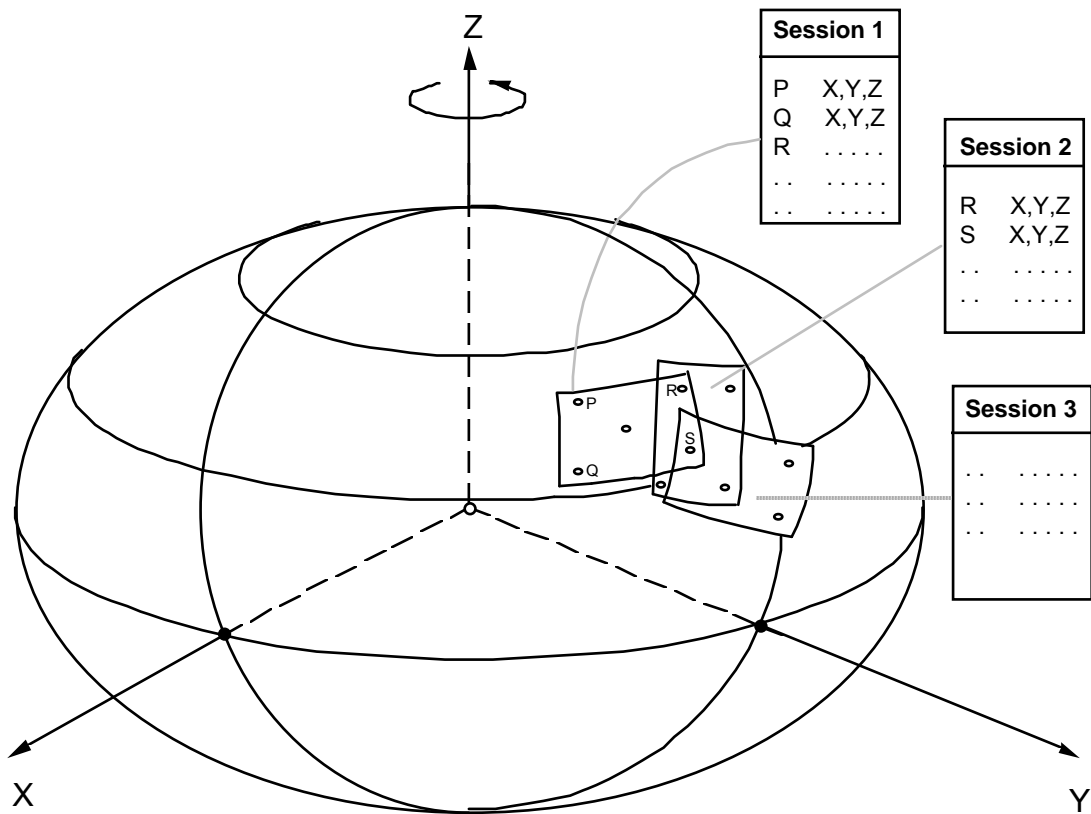


Fig. 1: Aus jeder Session entsteht ein Koordinatensatz geozentrischer Koordinaten

Die Koordinaten aus einer Session verhalten sich daher so, wie wenn sie in einem unabhängigen System von geozentrischen Koordinaten (lokales System) bestimmt worden wären. Die Koordinaten aus einer anderen Session erscheinen in einem anderen lokalen System. Die verschiedenen lokalen Systeme sind sehr nahe zueinander (einige Meter oder Zentimeter, je nach Berechnungsart), die genauen Beziehungen zueinander sind jedoch nicht bekannt.

Wenn die dreidimensionalen geozentrischen Koordinaten einer Session in das Projektions-system transformiert werden, erhält man Koordinaten mit einer grossen relativen Genauigkeit, die gegenüber den Landeskoordinaten des Fixpunktnetzes leicht verschoben sind (lokales System). Diese Verschiebungen unterscheiden sich von Session zu Session. Die Beziehung zwischen einem lokalen System und dem Schweizer Koordinatensystem ist definiert durch Transformationsparameter, die zusammen mit den anderen Unbekannten durch eine Gesamtausgleichung aller Messungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

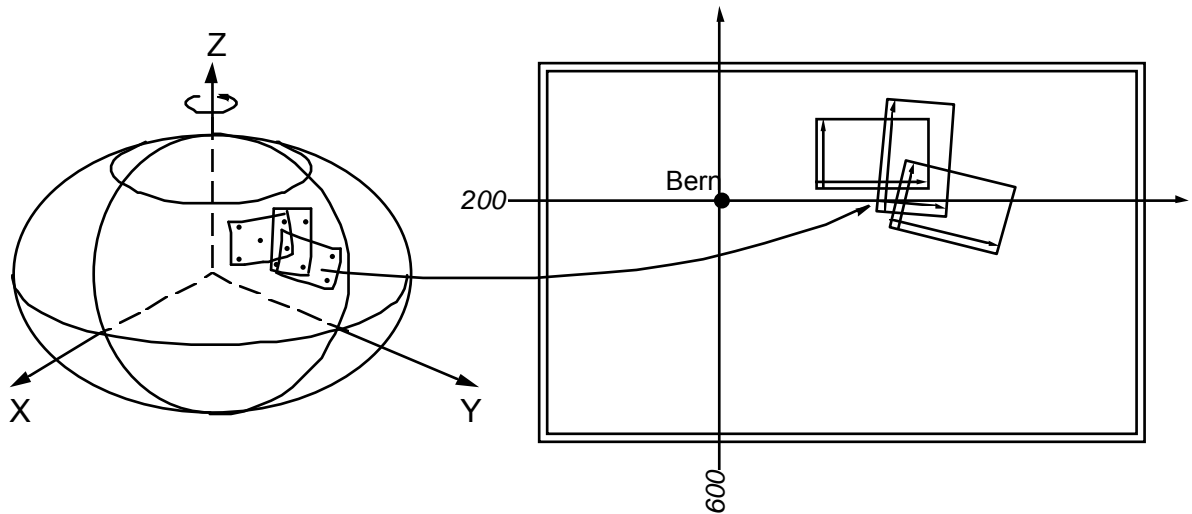


Fig. 2: Die geozentrischen 3D-Koordinaten jeder Session können in lokale Projektions-Koordinaten transformiert werden.

Diese Idee ist vergleichbar mit der üblichen Methode, mit welcher Richtungssätze ausgeglichen werden: Jede beobachtete Richtung wird wie eine Richtungsmessung in einem lokalen System behandelt (Horizontalkreis im Theodolit). Diese unterscheiden sich für alle Richtungsmessungen bekanntlich nur durch eine Orientierungsunbekannte vom CH-Koordinatensystem.

14.4 Die planimetrische Ausgleichung mit LTOP

Das nach den obigen Grundsätzen entwickelte Triangulationsprogramm LTOP des Bundesamtes für Landestopographie stellt diese Methode der Praxis zur Verfügung und enthält Funktionen, die der Verarbeitung von Messungen aller Art zu unterschiedlichster Nutzung dienen.

LTOP verfügt ebenfalls über analytische Hilfsmittel (statistische Tests, Fehlertheorie, Schätzung der Varianz von Gruppenmessungen etc.).

Das mathematische Modell der Koordinatensätze für die Ausgleichung von GPS-Messungen ist wenig empfindlich auf Korrelationen, da alle Koordinaten einer Session gleich verarbeitet werden, ohne willkürliche Wahl von fiktiven Referenzpunkten oder Basislinien. Man kann also auf Korrelationsmatrizen verzichten, die so oder so nur einen Teil der Eigenschaften berücksichtigt hätten (mathematische Korrelationen ohne physikalische Komponente).

Die bis heute gemachten Erfahrungen bestätigen die Vorteile der Methode.

14.5 Das funktionale Modell

Wie die ebenen lokalen Koordinaten (aus jeder GPS-Session) ins nationale Koordinatensystem transformiert werden, muss der verantwortliche Ingenieur entscheiden. Er kann zwischen den 3 folgenden Transformationen wählen:

- Ähnlichkeitstransformation (Helmert, 4 Parameter)
- Rotation und Translation (3 Parameter)
- Translation (2 Parameter)

Da die Orientierung und der Massstab von Koordinatensystemen, die sich auf zeitlich aufeinanderfolgende GPS-Sessions beziehen, nahezu identisch sind, ist es möglich, die gleichen Rotations- und/oder Massstabsunbekannten für mehrere aufeinanderfolgende Sessions zu verwenden. Der Entscheid muss auf Grund der Umstände vom auswertenden Ingenieur getroffen werden.

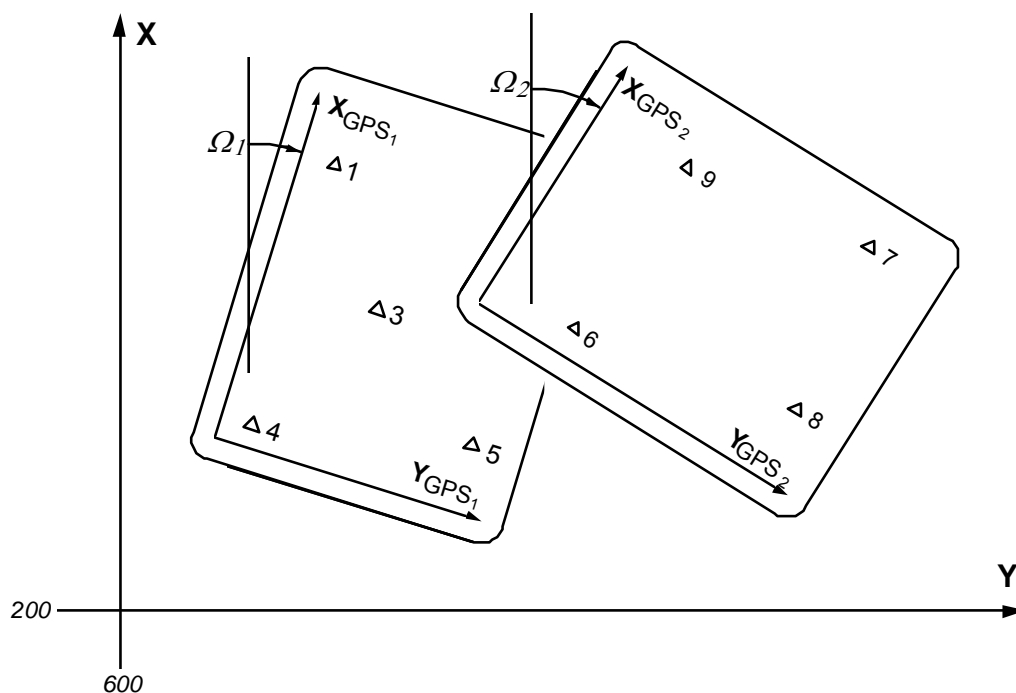


Fig. 3: Transformationen der Lokalkoordinaten ins Landeskoordinatensystem

Die Transformationsfunktionen sind bekannt und können in der Form von Beobachtungsgleichungen einer vermittelnden Ausgleichung formuliert werden.

$$Y_{GPS_i} + V_{iy} = \Delta Y_* + M_* \cos \Omega_* \cdot Y - M_* \sin \Omega_* \cdot X$$

$$X_{GPS_i} + V_{ix} = \Delta X_* + M_* \sin \Omega_* \cdot Y + M_* \cos \Omega_* \cdot X$$

X_{GPS_i} und Y_{GPS_i}	GPS-Beobachtungen (i-te Messung) auf dem betrachteten Punkt (Y, X), bestmöglichst reduziert ins Projektionssystem der Schweiz. (Die gemessenen Koordinaten sind in einem lokalen System, das dem nationalen Koordinatensystem nahe ist.)
V_{ix} und V_{iy}	Verbesserungen
Y, X	Landeskoordinaten der GPS-Station. Sie sind entweder Unbekannte der Ausgleichung oder Konstanten (Fixpunkte).
ΔY_*, ΔX_*	Translationsparameter
Ω_* und M_*	Rotationsparameter und Massstabsfaktor

Als Index * steht die Zahl der entsprechenden Unbekannten in der Ausgleichung. Auszugleichen sind viele GPS-Koordinatenpaare, die in mehreren Sessionen aufgeteilt sind. In der Regel hat man 2 Translationsunbekannten pro GPS-Session, alle Messungen der 1. Session haben die Translationparameter $\Delta Y_1, \Delta X_1$, die Messungen der 2. Session die Parameter $\Delta Y_2, \Delta X_2$ usw. Für die Rotationen und die Massstäbe wird eine entsprechende Nummerierung angewandt, wobei berücksichtigt wird, dass die Unbekannten oft für verschiedene GPS-Sessionen gleich sind.

Aus numerischen Gründen werden die Koordinatensysteme vorgängig verschoben, um die Ursprünge in die Nähe des Schwerpunktes des Koordinatensatzes zu bringen. Dies wird sowohl für lokale (**GPS**) als auch globale (Landes-) Koordinaten gemacht. $Y_{GPS_s}, X_{GPS_s}, Y_s, X_s$ sind Werte, die nahe zum Schwerpunkt der entsprechenden Koordinatenreihe liegen.

Nach der Linearisierung können die Beobachtungsgleichungen in Verbesserungsgleichungen transformiert werden [Burnand 1990].

$$V_{iy} = \Delta Y_* + \cos \Omega_0 \eta - \sin \Omega_0 \cdot \xi + \frac{B}{1000} m_* - \frac{A}{\rho^{cc}} \omega_* - f_{iy}$$

$$V_{ix} = \Delta X_* + \sin \Omega_0 \eta + \cos \Omega_0 \cdot \xi + \frac{A}{1000} m_* + \frac{B}{\rho^{cc}} \omega_* - f_{ix}$$

$$\text{mit } A = Y_0 \sin \Omega_0 + X_0 \cos \Omega_0$$

$$B = Y_0 \cos \Omega_0 - X_0 \sin \Omega_0$$

Ω_0, X_0, Y_0	sind die genäherten Rotation und Koordinaten
ξ, η, ω	sind die reduzierten Unbekannten (in mm / cc)
m	ist die Massstabskorrektur (in mm / km)
$\Delta X, \Delta Y$	sind die unbekanntes Verschiebungen des Ursprungs in mm
ρ^{cc}	ist der Transformationsfaktor $\frac{2000000}{\pi}$ von Bogenmass in Sekunden (cc)
f_{ix}, f_{iy}	sind die Absolutglieder der Fehlergleichungen (Differenz zwischen den gemessenen GPS-Koordinaten und den Funktionswerten der Beobachtungsgleichungen, in welchen die Näherungswerte der Unbekannten eingesetzt wurden)

Diese Verbesserungsgleichungen, die für die GPS-Messungen gebildet werden, kann man beliebig mit Verbesserungsgleichungen aus anderen Beobachtungen (Distanzen, Richtungen usw.) kombinieren. Die Gesamtheit dieser Gleichungen ergibt die Matrix des Verbesserungsgleichungssystems, mit welcher man weiter rechnen kann.

14.6 Beschreibungssprache für das funktionale Modell

Die dreidimensionalen, geozentrischen und lokalen Koordinaten werden geordnet nach Sessionen ins Messungsfile geschrieben. Sie müssen jedoch vorgängig ins Projektionssystem transformiert werden (z.B. mit dem Programm VEKTRA [Plazibat, Schaub 1991]).

Jede Koordinate der Session entspricht einer Eintragung (Zeile) im Messungsfile mit folgenden Informationen:

- Datentyp (**LY** oder **LX**, d.h. lokal **X** oder lokal **Y**)
- Punktidentifikation (Name oder Nummer)
- Wert der gemessenen GPS-Koordinate
- evtl. Standardabweichung der GPS-Koordinate

Es ist vorgesehen, in einer nächsten Phase das direkte Einlesen von geozentrischen Koordinaten ins System WGS 84 zu ermöglichen. Für diese Eingaben sind die Typenbezeichnungen **GX**, **GY**, **GZ** vorgesehen.

Der Beginn eines Satzes (GPS-Sessionen) muss vor der ersten Koordinateneingabe durch eine **SL-Zeile** (Lokalkoordinatensatz) gekennzeichnet sein. An dieser Stelle wählt der Operator auch die Unbekannten für die Transformationsparameter, indem er einen Code mit vier Zeichen im vorgesehenen Feld einfügt. Dies kann auf drei verschiedene Arten geschehen. Die folgende Reihenfolge dient der Parameterwahl:

1. Translation in **Y** (**ΔY**)
2. Translation in **X** (**ΔX**)
3. Rotation (**ω**)
4. Massstab (**m**)

a) Direkte Eingabe

Die zum Koordinatensatz gehörenden Transformationsparameter werden durch die interne Nummerierung des Programms identifiziert.

Der Operator kann beispielsweise '3350' eintippen, um zu sagen, dass die Transformation den dritten **ΔY** , den dritten **ΔX** , den fünften **ω** -Parameter verwendet, und dass die Transformation keinen Massstab hat.

Diese Methode wird nur für Testzwecke angewandt.

b) Relative Eingabe

Mit Hilfe des folgenden Codes entscheidet der Operator für jeden Parameter: Einführen einer neuen Unbekannten für die beobachtete Session, Verwendung der Unbekannten der vorhergehenden Session oder keine Unbekannte. Der Code besteht aus 4 Zeichen, die man aus +, =, 0, – zusammensetzt.

Zum Beispiel "++==" bedeutet: ΔY , ΔX sind neue Parameter und werden der Liste der Unbekannten hinzugefügt (+). Rotation und Massstab bleiben gleich (=) wie in der vorhergehenden Session. Mit "0" oder "–" wird die Abwesenheit der entsprechenden Unbekannten angezeigt.

c) Indirekte Eingabe

Die codierten Indikationen, die sich in jeder Session wiederholen, können in die Optionen von LTOP vordefiniert und benannt werden: Man definiert ein Gruppenname mit vier Buchstaben oder Zahlen, der die entsprechenden Codes gemäss den Regeln a) oder b) bedeuten soll.

Zum Beispiel kann man vorgeben, dass:

ABC die Bedeutung++++ erhält und

DDD die Bedeutung++= erhält

ABCD die Bedeutung+++ 0 erhält

Der Gruppenname kann in der Folge in die SL-Zeile geschrieben werden und hat die gleiche Bedeutung wie der entsprechende Code.

14.7 Das stochastische Modell

Wenn man eine einfache Methode für die Ausgleichung von GPS-Messungen in gemischten Netzen verwendet, und Raum- oder ebene Vektoren (Koordinatendifferenzen) als fiktive Beobachtungen betrachtet, müssen die mathematischen Korrelationen zwischen den Vektoren beachtet werden. Diese Korrelationen sind die Folge der willkürlichen Wahl des Ursprungs.

Das Modell der Koordinatensätze hat ganz andere Eigenschaften. Wenn die Anzahl Punkte pro Satz ≤ 5 ist, ist es immer möglich, die Kovarianzmatrix in Diagonalform zu reduzieren. Dies geschieht durch eine Ähnlichkeits-Transformation, ohne dass die Werte im Satz geändert werden. Für grössere Sätze kann eine äquivalente Kovarianzmatrix gerechnet werden, in welchen die Summe der Quadrate der nicht diagonalen Elemente minimal ist. Dies ist eine Verallgemeinerung des Äquivalenzprinzips von HELMERT [nach Höpcke, 1969]. Es ist somit gerechtfertigt, auf die Berechnung der Kovarianzen für die beobachteten GPS-Koordinaten zu verzichten. Die Varianzen (Diagonalelemente) können aufgrund der Erfahrung oder aus Angaben der Hersteller geschätzt werden.

Die Einführung des stochastischen Modells in LTOP erfolgt nach dem gleichen Schema wie für die übrigen Messungen. Individuelle oder allgemeine Standardabweichungen können mit folgenden Prioritäten eingegeben werden:

- 1) individuelle Angabe der Standardabweichung für jede GPS-Koordinate, wenn nötig
- 2) Angabe der Standardabweichung für einen ganzen Satz von GPS-Koordinaten (solange keine individuellen Angaben vorhanden sind)
- 3) Angabe der allgemeingültigen Standardabweichung für alle anderen beobachteten GPS-Koordinaten (die keine individuelle oder Satzangaben haben)

14.8 Die Darstellung der Resultate

Die Resultate der Ausgleichung von heterogenen Messungen werden von **LTOP** in der üblichen Weise präsentiert: Abriss, Koordinatenliste und allgemeine Angaben.

Die ausgeglichenen Werte der Transformations-Parameter (ΔY , ΔX , ω , m) stehen im Abriss vor jedes gemessenen GPS-Koordinatensatzes, ebenfalls die Translationen zu den entsprechenden genäherten Schwerpunkte (Y_s , X_s , $YGPS_s$, $XGPS_s$).

$$\begin{aligned} \left(\overline{YGPS} - YGPS_s \right) &= \Delta Y + (1 + m) \cos \Omega \cdot (Y - Y_s) - (1 + m) \sin \Omega \cdot (X - X_s) \\ \left(\overline{XGPS} - XGPS_s \right) &= \Delta X + (1 + m) \sin \Omega \cdot (Y - Y_s) + (1 + m) \cos \Omega \cdot (X - X_s) \end{aligned}$$

Diese Parameter werden in die Beobachtungsgleichungen eingeführt und liefern die ausgeglichenen GPS Messungen: Mit den selben Parametern ist es möglich, die umgekehrte Transformation von gemessenen Koordinaten zu Landeskoordinaten zu berechnen. Dies erlaubt die Transformation von Punkten, die in der Ausgleichung evtl. nicht verarbeitet wurden.

$$\begin{aligned} (Y - Y_s) &= \frac{1}{1 + m} \cos(-\Omega) \cdot (\overline{YGPS} - YGPS_s - \Delta Y) - \frac{1}{1 + m} \sin(-\Omega) \cdot (\overline{XGPS} - XGPS_s - \Delta X) \\ (X - X_s) &= \frac{1}{1 + m} \sin(-\Omega) \cdot (\overline{YGPS} - YGPS_s - \Delta Y) + \frac{1}{1 + m} \cos(-\Omega) \cdot (\overline{XGPS} - XGPS_s - \Delta X) \end{aligned}$$

A GPS-KOORD										

TRANSF. PARAMETER: DY = 5.8 +/- 52.4 MM (1)										
GRUPPE = (anf.) DX = .7 +/- 52.4 MM (1)										
DREH = 9999.877 +/- 2.015 CC (1)										
MST = -.481 +/- 3.165 PPM (1)										
SCHWERPUNKTE: ----- LOKAL ----- ----- GLOBAL -----										
Y = 27081.0300 M Y = 27251.3223 M										
X = 11054.4717 M X = 10627.7376 M										
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	VERB. CC/M	MF CC/M	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM
	A									
1	LY		12283.7000		.0	5.0	0**			
2	LX		17920.4700		.0	5.0	0**			
	B	N								
3	LY		10584.6400		.0	5.0	0**			
4	LX		5284.5000		.0	5.0	0**			
	C	N								
5	LY		40883.2300		.0	5.0	0**			
6	LX		20801.9500		.0	5.0	0**			
	D									
7	LY		43131.0000		.0	5.0	0**			
8	LX		6088.2800		.0	5.0	0**			
	E	N								
9	LY		25164.3600		.0	5.0	0**			
10	LX		9597.8200		.0	5.0	0**			
	F	N								
11	LY		30439.2500		.0	5.0	0**			
12	LX		6633.8100		.0	5.0	0**			

Fig. 4: Abriss-Tabelle in LTOP

14.9 Entwicklung und Implementation des Rechenprogrammes

Die Analyse, die Programmierung und die Einführung wurde in enger Zusammenarbeit zwischen dem Bundesamt für Landestopographie (L+T) und dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ mit Unterstützung des VBS (Departement der Verteidigung, Bevölkerungsschutz und Sport) ausgeführt. Die Arbeit basiert auf einem Konzept, das 1989 H. Chablais und der Autor dieses Kapitels entwickelt haben.

Die mathematischen Grundlagen dieser Methode wurden am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ von dipl. Ing. Thierry Burnand erarbeitet und in LTOP implementiert.

Literaturverzeichnis

- T. Burnand: LTOP-GPS, Dokumentation der Programmierung, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETHZ 1990, nicht veröffentlichte Manuskripte.
- A. Carosio: Intégration des mesures GPS dans les réseaux terrestres avec LTOP. Cours sur la méthode GPS, EPFL, März 1990.
- A. Carosio: La combinaison de mesures terrestres et par satellite dans les réseaux planimétriques, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 10/1992.
- W. Grossmann: Grundzüge der Ausgleichsrechnung, Springer 1969.
- W. Höpcke: Einige Ergänzungen zur Theorie der Richtungsmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 3/69.
- M. Plazibat, E. Schaub: VEKTRA, Programmanleitung, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETHZ 1991.

15. Die Ausgleichung von Kreiselmessungen in planimetrischen Netzen

15.1 Einsatz von Kreiseltheodoliten

Die genaue Lagebestimmung von Punkten in einem Koordinatensystem findet in der Regel mit Hilfe von Satellitenbeobachtungen (GPS oder ähnliche Systeme), Richtungen oder Distanzmessungen statt.

An ungünstigen Orten, z.B. im Tunnelinneren oder in geschlossenen Umgebungen, wo Satellitensignale nicht zu empfangen sind und wo keine hinreichend genaue Orientierungsrichtung verfügbar ist, werden Kreiseltheodolite eingesetzt, um das Azimut einer Strecke mit Hilfe der Erdrotation zu bestimmen.

15.2 Das stochastische Modell

Kreiseltheodolitbeobachtungen enthalten einen zufälligen Fehleranteil, der vom Gerätehersteller angegeben wird. Für Kreiseltheodolite höchster Präzision wie der DMT Gyromat 2000 werden Standardabweichungen von 7^{cc} - 10^{cc} erreicht.

Neben den zufälligen Fehlern gibt es auch systematische Einflüsse, die rechnerisch während der Datenaufbereitung korrigiert werden müssen. Die wichtigsten sind der Einfluss der Lotabweichung (West-Ost-Komponente) und die Meridiankonvergenz. Diese Fehlerinflüsse sind vor der Ausgleichung zu berechnen und zu subtrahieren.

Da sich während einer Messkampagne die Umgebungs- und Gerätetemperatur ändert, sind Veränderungen in den Beziehungen zwischen Kreiselnorthrichtung und Theodolit-Nullrichtung zu erwarten. Man kann annehmen, dass ein Funktionalzusammenhang zwischen Umgebungstemperatur und Kreiselazimut besteht (Korrekturfunktion). Für Instrumente höherer Genauigkeit (σ von wenigen **mGon** oder besser) ist periodisch eine Neubestimmung der Kalibrierkurve erforderlich.

Die Temperaturkorrektur (Instrumenteneigenschaft) wird im Gyromat 2000 automatisch vom Gerät angebracht. Falls die Kalibrierung des Herstellers noch aktuell ist, sind für die Temperatur keine zusätzlichen Korrekturen notwendig.

Da im Kreiselmessgerät eine in der Regel nicht bekannte konstante Differenz zwischen Kreiselmesswert und astronomischem Azimut und zwischen der X-Achse des lokalen Koordinatensystems und der theoretischen Nordrichtung des Koordinatensystems besteht, wird im funktionalen Modell die Summe dieser Größen als unbekannte Orientierung eingeführt. Sie muss daher nicht vorgängig eliminiert oder im stochastischen Modell berücksichtigt werden.

15.3 Das funktionale Modell

Die reduzierte Ablesung des Kreiselmessgeräts ist, abgesehen von der erwähnten konstanten Orientierungsunbekannte, das Azimut zwischen zwei bekannten oder unbekanntem Punkten im Gelände. Falls das Azimut zwischen $P_i (Y_i, X_i)$ und $P_k (Y_k, X_k)$ gemessen wurde, können ähnlich wie bei Richtungsmessungen die Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen gebildet werden:

Die mathematische Beziehung zwischen beobachteten Kreiselmesswerten und unbekanntem Parametern der vermittelnden Ausgleichung kann wie folgt dargestellt werden:

$$\bar{Az}_{ik} + Z_j = \text{Azimut}(P_i P_k) = \text{arctg} \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i} + n \cdot 200^G \quad (n = 1 \text{ oder } 0)$$

\bar{Az}_{ik} ist das ausgeglichene Kreiselmesswert von P_i nach P_k . Z_j ist die Orientierungsunbekannte des Kreiselmessgeräts bezüglich der Richtung der X-Achse des Koordinatensystems. Sie bleibt normalerweise während einer Messkampagne konstant (gleiche Unbekannte für alle Kreiselmessungen). Der Zusatzfaktor n dient für die Wahl des Quadranten und ist für jede Beobachtung eindeutig bestimmt.

Man kann daher die Beobachtungsgleichung

$$\bar{Az}_{ik} = \text{arctg} \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i} - Z_j + n \cdot 200^G$$

schreiben.

Verbesserungsgleichungen

Die Beobachtungsgleichung muss zuerst linearisiert werden. Man bestimmt daher Näherungswerte der Unbekannten, so dass:

$$\begin{aligned} Z_j &= Z_{oj} + z_j \\ Y_i &= Y_{oi} + y_i \\ X_i &= X_{oi} + x_i \\ Y_k &= Y_{ok} + y_k \\ X_k &= X_{ok} + x_k \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\bar{Az}_{ik} = \arctg \frac{Y_{ok} + y_k - (Y_{oi} + y_i)}{X_{ok} + x_k - (X_{oi} + x_i)} - (Z_{oj} + z_j)$$

Die Linearisierung nach Taylor führt zur Verbesserungsgleichung:

$$v_{ik} = -z_j + ax_i + by_i + cx_k + dy_k - f_{ik}$$

wobei

$$a = \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{D_o^2} \cdot \rho = \frac{\sin Az_o}{D_o} \cdot \rho$$

$$b = - \frac{X_{ok} - X_{oi}}{D_o^2} \cdot \rho = - \frac{\cos Az_o}{D_o} \cdot \rho$$

$$c = -a$$

$$d = -b$$

$$f_{ik} = Az_{ik} + Z_{oj} - \arctg \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{X_{ok} - X_{oi}}$$

$$D_o^2 = (X_{ok} - X_{oi})^2 + (Y_{ok} - Y_{oi})^2$$

Az_o = Azimut ($P_i P_k$) aus Näherungskoodinaten

Az_{ik} = das gemessene Kreiselaзимut

Die Längeneinheiten (Näherungskordinaten, Distanz, Unbekannte, Koordinatenänderungen) müssen in der gleichen Einheit (z.B. mm) ausgedrückt werden. Da die Ableitungsformel nur für Winkel im Bogenmass gilt, müssen die Koeffizienten mal ρ^{cc} multipliziert werden, wenn die Verbesserung, Richtung und Orientierung in cc ausgedrückt werden.

$$\rho^{\text{cc}} = \frac{2000000}{\pi} \cong 636619.8$$

Die Koeffizienten **a, b, c, d** geben die Änderung des ausgeglichenen Kreiselazimuts an, wenn die dazugehörige Unbekannte um eine Einheit geändert wird.

Es ist zu beachten, dass anders als bei den Richtungsmessungen die Orientierungsunbekannte nicht nur für eine Stationierung gilt. Sie gilt für alle Messungen, die mit dem gleichen Kreiseltheodolit während einer begrenzten Zeitperiode gemessen wurden.

Aus den Erfahrungen, die mit dem Gyromat 2000 gemacht wurden, kann man erwarten, dass die Orientierungsunbekannte während einer Messkampagne (1 Woche, 1 Monat) unverändert bleibt. Dies muss aber laufend überprüft werden (Wiederholung der Messung auf einer gewählten Strecke, da als Folge eines Stosses oder anderer externer Einwirkungen Änderungen stattfinden können).

Literatur

- Zanini, M.: Hochpräzise Azimutbestimmung mit Vermessungskreiseln. IGP-Bericht Nr. 209, Dezember 1992.
- Zanini, M., Stengele, R., Plazibat, M.: Kreiselazimute in Tunnelnetzen unter Einfluss des Erdschwerefeldes. IGP-Bericht Nr. 214, März 1993.
- A. Carosio, Reis, O.: Méthodes géodésiques et modèles mathématiques pour l'implantation des nouvelles transversales alpines. XYZ Nr. 62, März 1995 und VPK 4/95, S. 199.

- A. Carosio, Reis, O.: Geodetic Methods and Mathematical Models for the Establishment of new Trans-Alpine Transportation Routes. IGP-Bericht Nr. 260, Oktober 1996.
- Carosio, A., Kanani, E.: Geodetical Methods, Mathematical Models and Quality Indicators for Underground Network Adjustment. Proceedings FIG, Kopenhagen Juni 1997.
- Desiderio, A., Koch, R.: Der Einfluss der Temperatur auf Kreisellazimute hoher Präzision. IGP-Bericht Nr. 281, September 1998.
- Reis, O.: Calculs de simulation pour la ligne de base du St-Gotthard. IGP-Bericht Nr. 231, Januar 1994.
- Reis, O.: Die Überprüfung des Gotthardbasisnetzes. IGP-Bericht Nr. 224, Juni 1993.
- Korritke, N., Wunderlich, T.: Le gyromat, un gyrothéodolite de grande précision et son emploi dans l'Eurotunnel. Revue XYZ Nr. 40, Juli 1989.

16. Ordnungsstatistiken

16.1 Allgemeines

Im Vermessungswesen wird tagtäglich mit normalverteilten Beobachtungen gearbeitet. Ihre Eigenschaften sind gut bekannt und man kennt die Methoden, um sie zu testen, Konfidenzintervalle zu bilden usw.

Man arbeitet aber in der Regel mit Reihen von Beobachtungen und mit Reihen normalverteilter Beobachtungsfehler. Interessiert man sich für einen besonderen Messfehler der Reihe z.B. für den betragsgrössten oder –kleinsten, dann sollte man merken, dass diese speziell ausgewählte Grösse nicht mehr normalverteilt ist. Durch die Auswahlmethode erhalten die möglichen Werte der Zufallsvariable eine andere Wahrscheinlichkeit.

Die Theorie der Ordnungsstatistiken liefert die Verfahren, mit welchen Problemstellungen dieser Art bearbeitet werden können. Sie ist auch die mathematische Grundlage von Verfahren, die wir im praktischen Leben intuitiv einsetzen.

Man hat mit Ordnungsstatistiken zu tun, wenn Reihen von unabhängigen Zufallsvariablen analysiert und in der Analyse die Reihenfolge der erhaltenen Zahlenwerte berücksichtigt werden.

16.2 Definitionen

Gegeben seien n unabhängige Zufallsvariablen, mit gleicher Verteilung:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \dots, X_n$$

Wenn man vorsieht, sie nach ihrem Wert zu ordnen, erhält man eine neue Reihe von Zufallsvariablen,

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

die besondere Eigenschaften aufweist.

Definition

- $X_{(i)}$ ist die i-te Ordnungsstatistik
- $W = X_{(n)} - X_{(1)}$ ist die Ausdehnung der Stichprobe

Ordnungsstatistiken werden für verschiedene Anwendungen eingesetzt:

- Qualitätskontrollen
- Ausreissertest
- Robuste Schätzer

Bemerkung

Für die Ordnungsstatistiken gelten folgende Eigenschaften:

- Die Ordnungsstatistiken sind Zufallsvariablen
- Die Ordnungsstatistiken sind unter sich korreliert
- Die Verteilung der Ordnungsstatistiken ist nicht diejenige der Ausgangsvariablen

16.3 Verteilung von $X_{(n)}$

Man kann die Verteilung H_n von $X_{(n)}$ (der grössten X_i aus einer Reihe von n unabhängigen Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung) bestimmen, wenn die Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen der Reihe bekannt ist.

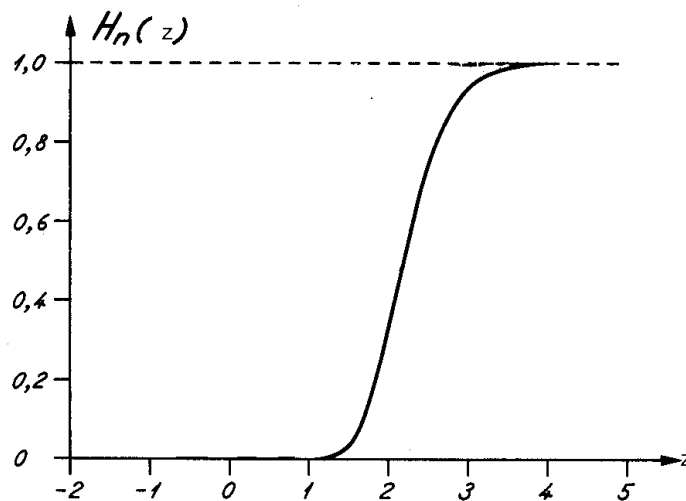


Fig. 1 Verteilung von $H_n(z) = P(X_{(n)} < z)$

Lösung:

$$P(X_{(n)} < z) \equiv P(x_1 < z, x_2 < z, x_3 < z \dots)$$

$$P(x_i < z) = F(z) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

wobei $F(z)$ die Verteilung von X_i ist.

Da die x_i unabhängig sind:

$$P(x_1 < z \text{ und } x_2 < z \text{ und } \dots \text{ und } x_n < z) = P(x_1 < z) \cdot \dots \cdot P(x_n < z) = (F(z))^n$$

Die Verteilung von $X_{(n)}$ ist daher:

$$H_n(z) = P(X_{(n)} < z) = (F(z))^n$$

Gegeben $F(z)$, ist $H_n(z)$ bestimmbar.

Verteilung $H_n(v)$ des grössten Wertes in einer Stichprobe für die Standard-Normalverteilung $N(0;1)$

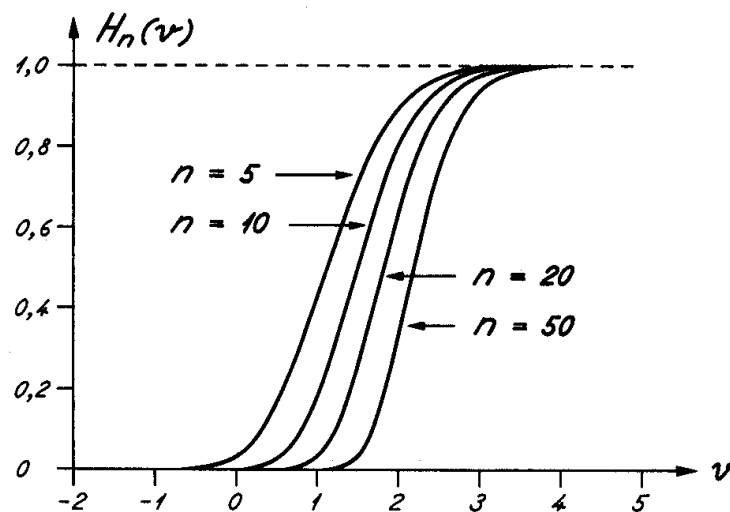


Fig. 2 Verteilungsfunktion der grössten Ordnungsstatistik einer Reihe normalverteilter Zufallsvariablen

In Anbetracht, dass für irgendeine Verteilung $0 \leq F(v) \leq 1$ ist, folgt dass für einen festen Wert von v die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X_{(n)} < v$ kleiner wird, wenn die Stichprobe grösser wird.

16.4 Wahrscheinlichkeitsdichte von $X_{(n)}$

$$h_n(z) = \frac{d}{dz} H_n(z)$$

$$h_n(z) = \frac{d}{dz} (F(z))^n = n \cdot (F(z))^{n-1} \cdot f(z)$$

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \text{Dichtefunktion der } x_i$$

Dichte des grössten Wertes in einer Stichprobe für die Standard-Normalverteilung

Die Abbildung zeigt die graphische Darstellung der $h_n(v)$ der n-ten Ordnungsstatistik für die Standard-Normalverteilung $N(0;1)$

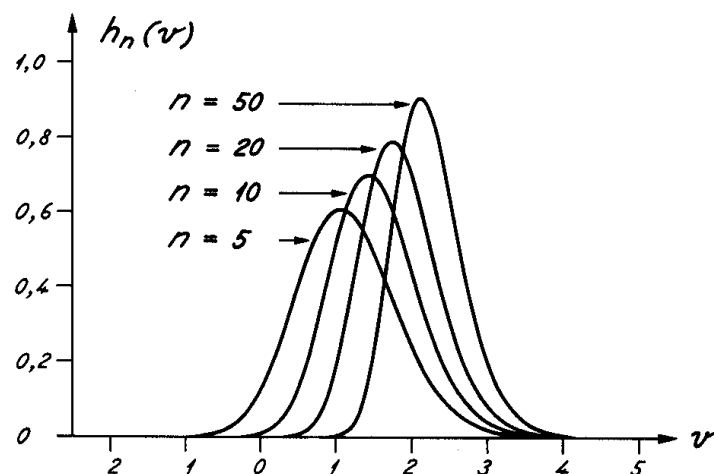


Fig. 3 Dichtefunktionen $h_n(v)$

16.5 Mögliche Anwendung: Schätzung von σ

Mit Hilfe der Ordnungsstatistiken kann man schnelle Verfahren entwickeln, um die Standardabweichung oder die Varianz zu schätzen.

Mit Hilfe der Stichprobeausdehnung $(X_{(n)} - X_{(1)})$ kann man z.B. die Varianz erwartungstreu schätzen.

Definition

$W = \frac{1}{\sigma} w = \frac{1}{\sigma} (X_{(n)} - X_{(1)})$ nennt man reduzierte Stichprobeausdehnung.

Satz 1 (ohne Beweis)

Wenn $f(x)$ die Dichtefunktion der einzelnen Zufallsvariablen X_i ist, kann die Verteilung der Stichprobeausdehnung $P(W)$ wie folgt berechnet werden:

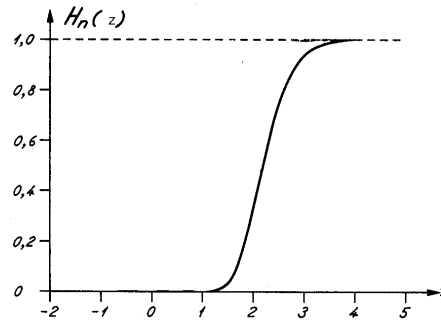


Fig. 4 Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X_n

$$P(W) = n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_x^{x+w} f(u) du \right]^{n-1} dx$$

Satz 2 (ohne Beweis)

Sei X_1, X_2, \dots, X_n eine Stichprobe mit n normalverteilten ($N(\mu, \sigma^2)$) Elementen.

Man kann σ mit der folgenden Formel erwartungstreu schätzen

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{d_n} (X_{(n)} - X_{(1)})$$

d_n ist der Erwartungswert von W (reduzierte Stichprobeausdehnung) und kann aus statistischen Tabellen entnommen werden.

n	$\frac{1}{d_n}$	n	$\frac{1}{d_n}$
1	-	11	0,3152
2	0,8862	12	0,3069
3	0,5908	13	0,2998
4	0,4857	14	0,2935
5	0,4299	15	0,2880
6	0,3946	16	0,2831
7	0,3698	17	0,2787
8	0,3512	18	0,2747
9	0,3367	19	0,2711
10	0,3240	20	0,2677

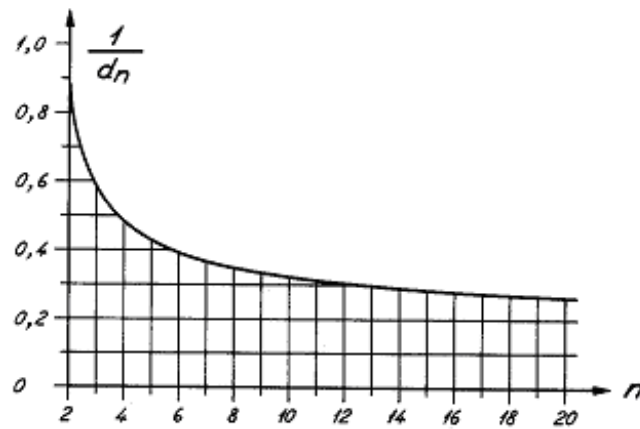


Fig. 5 Die Reziproke des Erwartungswertes der reduzierten Stichprobeausdehnung

Für grössere Stichproben siehe „Biometrika Tables for Statisticians“, Vol. 1, von Pearson & Hartley, Ed. 3, Tabelle 27

Beispiel:

In einer Stichprobe mit 8 Elementen ist die Stichprobeausdehnung **W** gleich 20.

$$\mathbf{n} = 8$$

$$\mathbf{w} = 20$$

daraus folgt

$$\frac{1}{\mathbf{d}_n} = 0,3512$$

und die Schätzung für die Standardabweichung

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\mathbf{d}_n} \mathbf{W} = 7.02$$

Empirische Versuche

Mittels Versuchen kann die Qualität dieser Schätzung gegenüber der bisher bekannten ($[pvv]/(n-u)$) untersucht werden /Bachmann 1973/.

N° = Nummer der Stichprobe

n = Grösse der Stichprobe (Anzahl Elemente)

$\hat{\sigma}$ = Klassische Schätzung von σ ($s_0 = [pvv]/(n-u)$), in $^{\circ}$

$\hat{\hat{\sigma}}$ = Schätzung basiert auf der Stichprobeausdehnung, in $^{\circ}$

$\frac{|\hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}}|}{\hat{\sigma}} \cdot 100$ = Abweichung in % zwischen beiden Schätzungen

No	n	$\frac{ \hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}} }{\hat{\sigma}} \cdot 100$	No	n	$\frac{ \hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}} }{\hat{\sigma}} \cdot 100$
1	6	3,76	21	6	12,38
2	8	3,54	22	8	13,30
3	6	16,61	23	9	16,54
4	8	19,25	24	7	6,20
5	8	14,08	25	8	6,15
6	9	7,76	26	8	2,93
7	8	17,84	27	8	13,30
8	7	16,03	28	8	16,19
9	8	11,43	29	8	3,95
10	9	27,99	30	8	19,21
11	9	4,44	31	7	4,94
12	8	6,96	32	8	2,12
13	8	6,33	33	8	10,31
14	8	0,00	34	8	4,69
15	8	8,00	35	9	7,47
16	8	7,03	36	9	14,88
17	8	4,09	37	10	13,90
18	8	1,93	38	8	0,00
19	8	3,95	39	8	1,74
20	8	12,06	40	8	6,36

Bei diesem Versuch erhält man aus der Stichprobeausdehnung Werte für σ , die durchschnittlich nur 10% von s_0 abweichen.

$$\left| \frac{|\hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}}|}{\hat{\sigma}} \cdot 100 \right| \quad \text{Mittel} = 9,24 \%$$

16.6 Zweite Anwendung der Ordnungsstatistiken: Analyse einer Reihe normalverteilter Zufallsvariablen mit der NMAX-Verteilung

Im Vermessungswesen sind normalverteilte Beobachtungen der Normalfall. Die Beobachtungen eines Triangulationsnetzes bilden einen Vektor von normalverteilten Zufallsvariablen ebenso wie die Verbesserungen, die aus der Ausgleichung entstehen.

Wenn die Realisierung einer Reihe stochastischer Grössen vorliegt und die Eigenschaften (Verteilung, Erwartungswert, Varianz ...) der dazugehörigen Zufallsvariablen bekannt sind, besteht die natürliche Tendenz, bei der Analyse die Aufmerksamkeit auf die betragsgrössten Komponenten zu lenken. Diese "auffallende Komponente" ist ebenfalls eine Zufallsvariable und ihre Eigenschaften können mit den Methoden der Ordnungsstatistiken beschrieben werden.

Es seien

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_f$$

f unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$E(\underline{x}_i) = 0 \text{ und Varianz } (\underline{x}_i) = 1 \text{ für } i = 1, 2, \dots, f.$$

Man betrachte dann die Zufallsvariable \underline{x}_{\max} , mit welcher die betragsgrösste \underline{x}_i ($i = 1, 2, \dots, f$) bezeichnet wird.

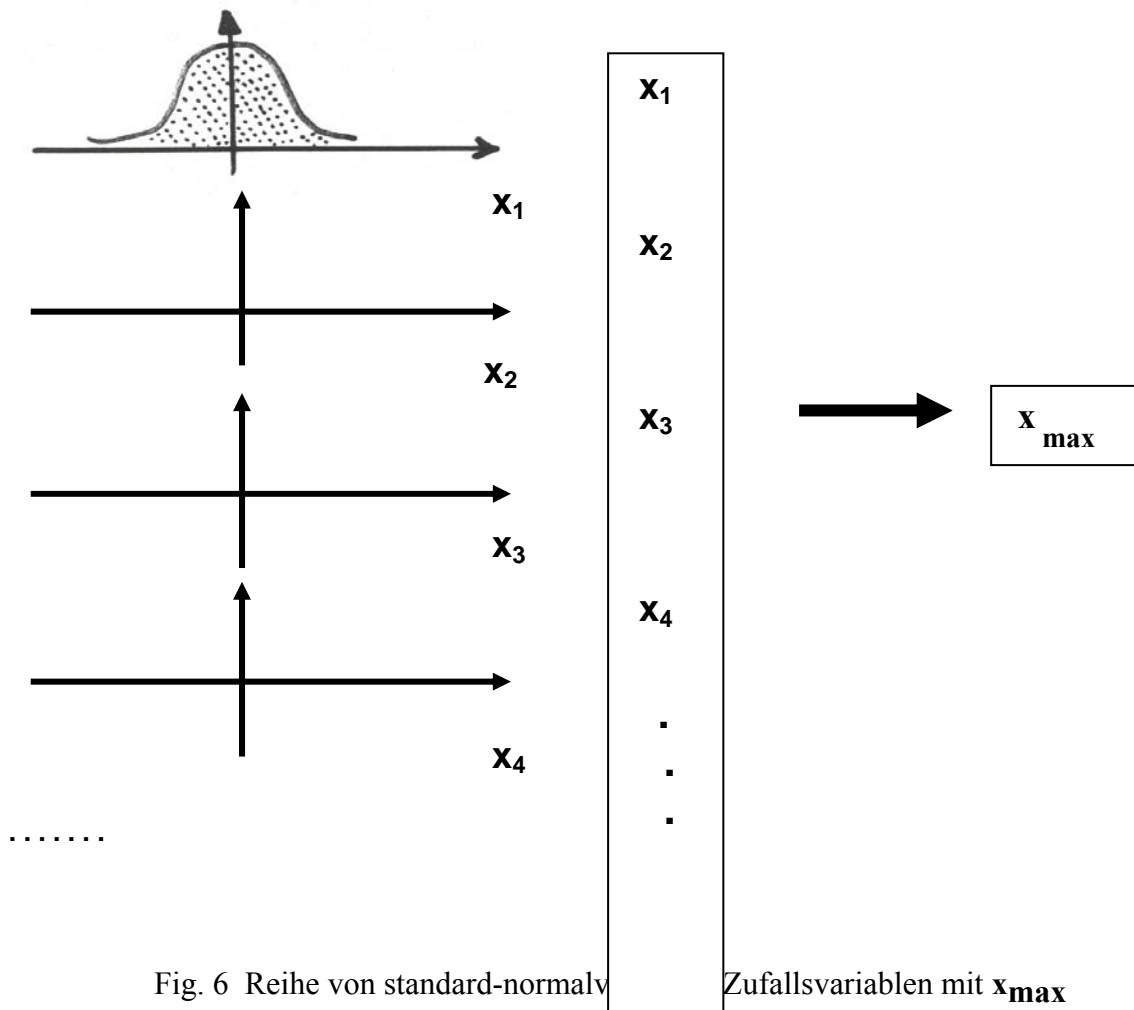


Fig. 6 Reihe von standard-normalen Zufallsvariablen mit x_{\max}

Die Wahrscheinlichkeit w , dass x_{\max} kleiner ist als eine vorgegebene Schranke k kann berechnet werden, wenn man berücksichtigt, dass

$$w = P(|x_{\max}| < k)$$

identisch ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$w = P(\text{alle } |x_i| < k) \quad i = 1, 2, \dots, f$$

Da die Variablen \underline{x}_i stochastisch unabhängig sind, wenn

$$w_i = P (|x_i| < k)$$

folgt

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_f$$

das heisst

$$w = P (|x_1| < k) \cdot P (|x_2| < k) \dots P (|x_f| < k) .$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind der eindimensionalen Normalverteilungsfunktion zu entnehmen.

Die inverse Berechnung ist ebenfalls leicht durchführbar: ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit α gegeben, kann die Schranke $k(\alpha)$ berechnet werden, für welche

$$P (\text{alle } |x_i| < k(\alpha)) = 1 - \alpha \quad i = 1, 2, \dots, f$$

ist.

Aufgrund des so berechneten Signifikanzintervalls kann ein mehrdimensionaler Test unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller Testvariablen der betrachteten Reihe durchgeführt werden.

Wenn man hingegen unter den x_i das betragsgrösste Element \underline{x}_{\max} betrachtet, kann der mehrdimensionale Test auf den äquivalenten eindimensionalen Test der Zufallsvariable \underline{x}_{\max} zurückgeführt werden.

Berechnung der NMAX-Verteilung

Definition:

Wir bezeichnen mit "NMAX-Verteilung" die Verteilung des betragsgrössten Elementes in einer Reihe normalverteilter Zufallsvariablen.

Die Normalverteilungsfunktion $F(z)$ bildet die Grundlage für die Berechnung der gesuchten Verteilung. Es ist:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz$$

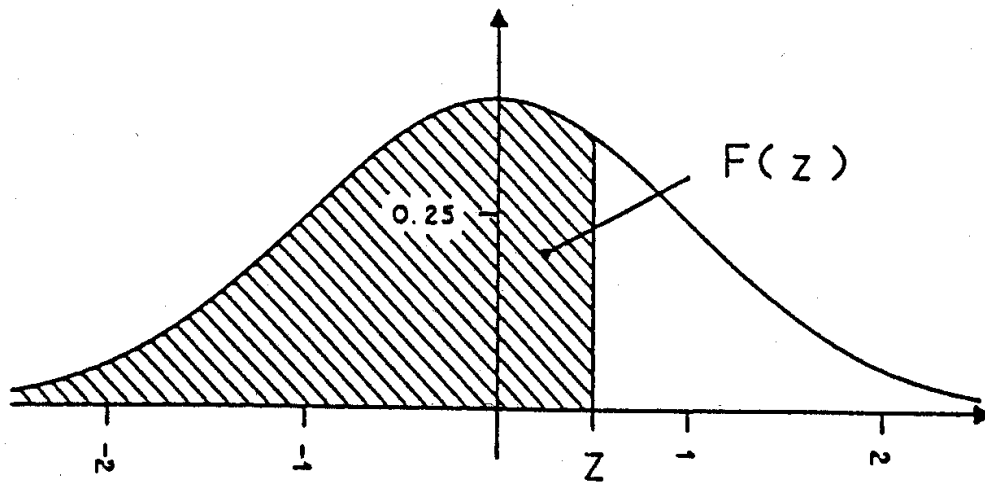


Fig. 7 Die Dichte der Normalverteilung

Für eine einzelne normalverteilte Zufallsvariable \underline{x} ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von \underline{x} die Bedingung $(-z < x < z)$ erfüllt, wie bekannt

$$P(-z < x < z) = F(z) - F(-z).$$

Für eine Reihe von f stochastisch unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen \underline{x}_i ($i = 1, 2, \dots, f$) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedingung

$$-z < x_i < z \quad (i = 1, 2, \dots, f)$$

für die ganze Reihe erfüllt ist, ebenfalls einfach zu berechnen. Es gilt

$$P(-z < x_i < z, \quad i = 1, 2, \dots, f) = (F(z) - F(-z))^f$$

als Produkt der Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Zufallsvariable.

Dazu ist für $z \geq 0$

$$P(|x_{\max}| < z) = P(-z < x_{\max} < z),$$

und da x_{\max} das betragsgrösste Element unter den x_i bezeichnet, ist

$$P(|x_{\max}| < z) = P(-z < x_i < z, i = 1, 2, \dots, f)$$

und daher auch

$$P(|x_{\max}| < z) = (F(z) - F(-z))^f,$$

welche die Grundgleichung für die Berechnung der **NMAX**-Verteilung darstellt.

Aus der Symmetrie der Normalverteilung folgt ebenfalls

$$\begin{aligned} F(-z) &= 1 - F(z) \\ F(z) - F(-z) &= 2F(z) - 1 \end{aligned}$$

und da auch die **NMAX**-Verteilung symmetrisch ist

$$P(x_{\max} < 0) = 0.5.$$

Daraus kann die **NMAX**-Verteilungsfunktion hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \text{NMAX}(Z) &= 0.5 + 0.5 (2F(z) - 1)^f && \text{für } z \geq 0 \\ &= 0.5 - 0.5 (2F(-z) - 1)^f && \text{für } z < 0 \end{aligned}$$

wo $F(Z)$ die Normalverteilung ist.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der NMAX-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für \underline{x}_{\max} ist dann die erste Ableitung der Verteilungsfunktion

NMAX (z). Das heisst:

$$\begin{aligned} \frac{dNMAX}{dz} &= f(2F(z)-1)^{f-1} \cdot F'(z) && \text{für } z \geq 0 \\ &= f(2F(-z)-1)^{f-1} \cdot F'(-z) && \text{für } z < 0 \end{aligned}$$

wobei $F'(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung ist:

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}$$

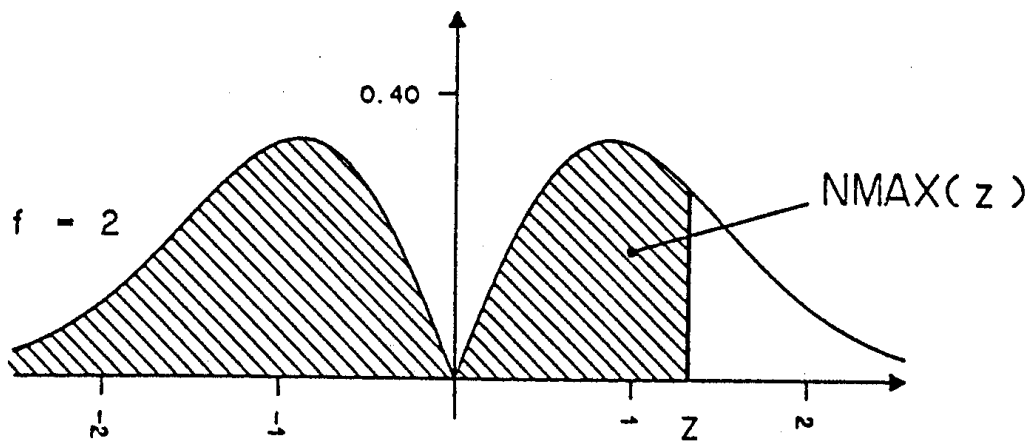


Fig. 8 Die Wahrscheinlichkeitsdichte der NMAX-Verteilung für $f = 2$

Die folgenden Zahlentafeln enthalten die Werte der Verteilungsfunktion für zwei verschiedene Anwendungsvarianten der NMAX-Verteilung sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte.

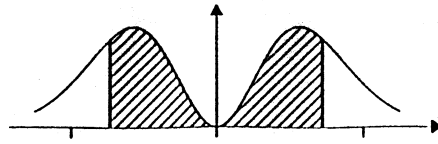
Literatur

Bachmann, W.K.: Estimation stochastique de la précision des mesures, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Zürich, 4-1973.

David, H. A.: Order statistics, New York, Wiley Verlag, 2nd edition 1981.

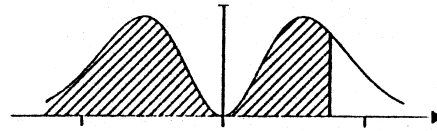
Carosio, A.: Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme, IGP-Mitteilungen Nr. 35, Juli 1983.

Nmax (-Z, +Z)



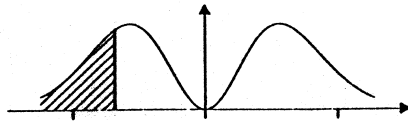
Z/F	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0797	0.0063	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	0.1585	0.0251	0.0040	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.30	0.2358	0.0556	0.0131	0.0031	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.40	0.3108	0.0966	0.0300	0.0093	0.0029	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.50	0.3829	0.1466	0.0561	0.0215	0.0082	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.60	0.4515	0.2038	0.0920	0.0416	0.0188	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.70	0.5161	0.2663	0.1374	0.0709	0.0366	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.80	0.5763	0.3321	0.1914	0.1103	0.0636	0.0040	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.90	0.6319	0.3993	0.2523	0.1594	0.1007	0.0101	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	0.6827	0.4661	0.3182	0.2172	0.1483	0.0220	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	0.7287	0.5310	0.3869	0.2819	0.2054	0.0422	0.0018	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.20	0.7699	0.5927	0.4563	0.3513	0.2704	0.0731	0.0053	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.30	0.8064	0.6503	0.5244	0.4229	0.3410	0.1163	0.0135	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.40	0.8385	0.7031	0.5895	0.4943	0.4145	0.1718	0.0295	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.50	0.8664	0.7506	0.6503	0.5634	0.4882	0.2383	0.0568	0.0135	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.60	0.8904	0.7928	0.7059	0.6286	0.5597	0.3132	0.0981	0.0307	0.0096	0.0030	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.70	0.9109	0.8297	0.7557	0.6884	0.6270	0.3932	0.1546	0.0606	0.0239	0.0094	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.80	0.9281	0.8614	0.7995	0.7421	0.6884	0.4744	0.2250	0.1068	0.0506	0.0240	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.90	0.9426	0.8884	0.8374	0.7893	0.7440	0.5535	0.3064	0.1696	0.0939	0.0520	0.0027	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.00	0.9545	0.9111	0.8696	0.8300	0.7923	0.6277	0.3940	0.2473	0.1552	0.0975	0.0095	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2.10	0.9643	0.9298	0.8966	0.8646	0.8337	0.6950	0.4830	0.3357	0.2333	0.1622	0.0263	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000
2.20	0.9722	0.9452	0.9189	0.8933	0.8685	0.7543	0.5689	0.4291	0.3237	0.2441	0.0596	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000
2.30	0.9786	0.9576	0.9370	0.9169	0.8973	0.8051	0.6481	0.5218	0.4201	0.3382	0.1144	0.0131	0.0015	0.0002	0.0000
2.40	0.9836	0.9675	0.9516	0.9360	0.9207	0.8476	0.7185	0.6090	0.5162	0.4375	0.1914	0.0367	0.0070	0.0013	0.0003
2.50	0.9876	0.9753	0.9632	0.9512	0.9394	0.8825	0.7788	0.6873	0.6066	0.5353	0.2866	0.0821	0.0235	0.0067	0.0019
2.60	0.9907	0.9814	0.9723	0.9632	0.9542	0.9106	0.8292	0.7550	0.6875	0.6260	0.3919	0.1536	0.0602	0.0236	0.0092
2.70	0.9931	0.9862	0.9793	0.9725	0.9658	0.9328	0.8701	0.8116	0.7570	0.7062	0.4986	0.2486	0.1240	0.0618	0.0308
2.80	0.9949	0.9898	0.9847	0.9797	0.9747	0.9501	0.9026	0.8575	0.8147	0.7740	0.5991	0.3589	0.2150	0.1288	0.0772
2.90	0.9963	0.9925	0.9881	0.9852	0.9815	0.9633	0.9279	0.8939	0.8611	0.8295	0.6880	0.4734	0.3257	0.2241	0.1542
3.00	0.9973	0.9946	0.9919	0.9892	0.9866	0.9733	0.9474	0.9221	0.8975	0.8735	0.7631	0.5823	0.4443	0.3391	0.2587
3.10	0.9981	0.9961	0.9942	0.9923	0.9904	0.9808	0.9620	0.9435	0.9254	0.9077	0.6239	0.6781	0.5592	0.4607	0.3796
3.20	0.9986	0.9973	0.9959	0.9945	0.9931	0.9863	0.9729	0.9596	0.9465	0.9335	0.8715	0.7595	0.6619	0.5768	0.5027
3.30	0.9990	0.9981	0.9971	0.9961	0.9952	0.9904	0.9808	0.9714	0.9620	0.9528	0.9078	0.8240	0.7480	0.6790	0.6164
3.40	0.9993	0.9987	0.9980	0.9973	0.9966	0.9933	0.9866	0.9800	0.9734	0.9668	0.9348	0.8738	0.8168	0.7636	0.7138
3.50	0.9995	0.9991	0.9986	0.9981	0.9977	0.9954	0.9907	0.9861	0.9815	0.9770	0.9545	0.9111	0.8696	0.8301	0.7923
3.60	0.9997	0.9994	0.9990	0.9997	0.9984	0.9968	0.9936	0.9905	0.9073	0.9842	0.9667	0.9393	0.9089	0.8804	0.8528
3.70	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9989	0.9978	0.9957	0.9935	0.9914	0.9893	0.9786	0.9578	0.9373	0.9173	0.8977
3.80	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9993	0.9986	0.9971	0.9957	0.9942	0.9928	0.9856	0.9714	0.9575	0.9437	0.9301
3.90	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9990	0.9981	0.9971	0.9962	0.9952	0.9904	0.9809	0.9715	0.9622	0.9530
4.00	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9997	0.9994	0.9987	0.9981	0.9975	0.9968	0.9937	0.9874	0.9811	0.9749	0.9688
4.10	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9992	0.9988	0.9983	0.9979	0.9959	0.9918	0.9877	0.9836	0.9795
4.20	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9989	0.9987	0.9973	0.9947	0.9920	0.9894	0.9867
4.30	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9191	0.9983	0.9966	0.9949	0.9932	0.9915
4.40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9989	0.9978	0.9967	0.9957	0.9946
4.50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9997	0.9993	0.9986	0.9980	0.9973	0.9966
4.60	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9992	0.9987	0.9983	0.9979
4.70	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9990	0.9987
4.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9992
4.90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995
5.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997

NMAX (Z)



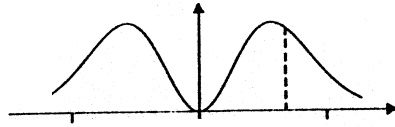
Z/F	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500
0.00	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.10	0.5398	0.5032	0.5003	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.20	0.5793	0.5126	0.5020	0.5003	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.30	0.6179	0.5278	0.5066	0.5015	0.5004	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.40	0.6554	0.5483	0.5150	0.5047	0.5015	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.50	0.6915	0.5733	0.5281	0.5108	0.5041	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.60	0.7257	0.6019	0.5460	0.5208	0.5094	0.5002	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.70	0.7580	0.6332	0.5687	0.5355	0.5183	0.5007	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.80	0.7881	0.6661	0.5957	0.5551	0.5318	0.5020	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.90	0.8159	0.6996	0.6261	0.5797	0.5504	0.5051	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.00	0.8413	0.7330	0.6591	0.6086	0.5741	0.5110	0.5002	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.10	0.8643	0.7655	0.6934	0.6410	0.6027	0.5211	0.5009	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.20	0.8849	0.7963	0.7281	0.6756	0.6352	0.5366	0.5027	0.5002	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.30	0.9032	0.8251	0.7622	0.7114	0.6705	0.5581	0.5068	0.5008	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.40	0.9192	0.8515	0.7948	0.7471	0.7072	0.5859	0.5148	0.5025	0.5004	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.50	0.9332	0.8753	0.8252	0.7817	0.7441	0.6191	0.5284	0.5068	0.5016	0.5004	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.60	0.9452	0.8964	0.8530	0.8143	0.7798	0.6566	0.5491	0.5154	0.5048	0.5015	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.70	0.9554	0.9148	0.8779	0.8442	0.8135	0.6966	0.5773	0.5304	0.5119	0.5047	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.80	0.9641	0.9307	0.8998	0.8710	0.8444	0.7372	0.6125	0.5534	0.5253	0.5120	0.5003	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.90	0.9713	0.9442	0.9187	0.8947	0.8720	0.7768	0.6532	0.5848	0.5469	0.5260	0.5013	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
2.00	0.9772	0.9555	0.9348	0.9150	0.8961	0.8139	0.6970	0.6237	0.5776	0.5487	0.5047	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
2.10	0.9821	0.9649	0.9483	0.9323	0.9168	0.8475	0.7415	0.6679	0.6167	0.5811	0.5131	0.5003	0.5000	0.5000	0.5000
2.20	0.9861	0.9726	0.9594	0.9467	0.9342	0.8771	0.7845	0.7146	0.6618	0.6221	0.5298	0.5018	0.5001	0.5000	0.5000
2.30	0.9893	0.9788	0.9685	0.9585	0.9486	0.9025	0.8241	0.7609	0.7100	0.6691	0.5572	0.5065	0.5007	0.5001	0.5000
2.40	0.9918	0.9837	0.9758	0.9680	0.9603	0.9238	0.8592	0.8045	0.7581	0.7188	0.5957	0.5183	0.5035	0.5007	0.5001
2.50	0.9938	0.9877	0.9816	0.9756	0.9697	0.9413	0.8894	0.8437	0.8033	0.7677	0.6433	0.5411	0.5118	0.5034	0.5010
2.60	0.9953	0.9907	0.9861	0.9816	0.9771	0.9553	0.9146	0.8775	0.8438	0.8130	0.6960	0.5768	0.5301	0.5118	0.5046
2.70	0.9965	0.9931	0.9897	0.9863	0.9829	0.9664	0.9350	0.9058	0.8785	0.8531	0.7493	0.6243	0.5620	0.5309	0.5154
2.80	0.9974	0.9949	0.9924	0.9899	0.9874	0.9750	0.9513	0.9288	0.9073	0.8870	0.7995	0.6794	0.6075	0.5644	0.5386
2.90	0.9981	0.9963	0.9944	0.9926	0.9907	0.9816	0.9640	0.9469	0.9305	0.9147	0.8440	0.7367	0.6629	0.6121	0.5771
3.00	0.9986	0.9973	0.9960	0.9946	0.9933	0.9867	0.9737	0.9610	0.9487	0.9368	0.8815	0.7911	0.7222	0.6695	0.6294
3.10	0.9990	0.9981	0.9971	0.9961	0.9952	0.9904	0.9010	0.9718	0.9627	0.9538	0.9119	0.8394	0.7796	0.7304	0.6898
3.20	0.9993	0.9986	0.9979	0.9973	0.9966	0.9932	0.9864	0.9790	0.9732	0.9668	0.9357	0.8797	0.8309	0.7884	0.7513
3.30	0.9995	0.9990	0.9986	0.9981	0.9976	0.9952	0.9904	0.9857	0.9810	0.9764	0.9539	0.9120	0.8740	0.8395	0.8082
3.40	0.9997	0.9993	0.9990	0.9987	0.9983	0.9966	0.9933	0.9900	0.9867	0.9834	0.9674	0.9369	0.9084	0.8818	0.8569
3.50	0.9998	0.9995	0.9993	0.9991	0.999M	0.9977	0.9954	0.9931	0.9908	0.9885	0.9773	0.9555	0.9348	0.9150	0.8961
3.60	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9992	0.9984	0.9968	0.9952	0.9937	0.9921	0.9843	0.9691	0.9544	0.9402	0.9264
3.70	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9989	0.9978	0.9968	0.9957	0.9946	0.9893	0.9789	0.9687	0.9586	0.9489
3.80	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9993	0.9986	0.9978	0.9971	0.9964	0.9928	0.9857	0.9787	0.9718	0.9651
3.90	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9995	0.9990	0.9986	0.9981	0.9976	0.9952	0.9905	0.9858	0.9811	0.9765
4.00	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9987	0.9984	0.9968	0.9937	0.9906	0.9875	0.9844
4.10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9992	0.9990	0.9979	0.9959	0.9938	0.9919	0.9898
4.20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9987	0.9973	0.9960	0.9947	0.9934
4.30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9997	0.9997	0.9996	0.9991	0.9983	0.9974	0.9966	0.9957
4.40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9989	0.9984	0.9978	0.9973
4.50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9993	0.9990	0.9986	0.9983
4.60	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
4.70	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993
4.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996
4.90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
5.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NMAX (Z)



Z/F	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500
0.00	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.10	0.4602	0.4968	0.4997	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.20	0.4207	0.4874	0.4980	0.4997	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.9000
-0.30	0.3821	0.4722	0.4934	0.4985	0.4996	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.40	0.3446	0.4517	0.4850	0.4953	0.4985	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.50	0.3095	0.4267	0.4719	0.4892	0.4959	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.60	0.2743	0.3981	0.4540	0.4792	0.4906	0.4998	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.70	0.2420	0.3668	0.4313	0.4645	0.4817	0.4993	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.80	0.2119	0.3339	0.4043	0.4449	0.4682	0.4980	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-0.90	0.1841	0.3004	0.3739	0.4203	0.4496	0.4949	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.00	0.1587	0.2670	0.3409	0.3914	0.4259	0.4890	0.4998	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.10	0.1357	0.2345	0.3066	0.3590	0.3973	0.4789	0.4991	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.20	0.1151	0.2037	0.2719	0.3244	0.3646	0.4634	0.4973	0.4998	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.30	0.0968	0.1749	0.2378	0.2886	0.3295	0.4419	0.4932	0.4992	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.40	0.0808	0.1485	0.2052	0.2529	0.2928	0.4141	0.4652	0.4975	0.4996	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.50	0.0668	0.1247	0.1748	0.2183	0.2559	0.3809	0.4716	0.4932	0.4984	0.4996	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.60	0.0548	0.1036	0.1470	0.1857	0.2202	0.3434	0.4509	0.4846	0.4952	0.4985	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.70	0.0446	0.0852	0.1221	0.1559	0.1865	0.3034	0.4227	0.4696	0.4881	0.4953	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.80	0.0359	0.0693	0.1002	0.1290	0.1556	0.2628	0.3875	0.4466	0.4747	0.4880	0.4997	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-1.90	0.0287	0.0558	0.0813	0.1053	0.1280	0.2232	0.3468	0.4152	0.4531	0.4740	0.4987	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-2.00	0.0228	0.0445	0.0652	0.0850	0.1039	0.1861	0.3030	0.3763	0.4224	0.4513	0.4953	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
-2.10	0.0179	0.0351	0.0517	0.0677	0.0832	0.1525	0.2585	0.3321	0.3833	0.4189	0.4869	0.4997	0.5000	0.5000	0.5000
-2.20	0.0139	0.0274	0.0406	0.0533	0.0658	0.1229	0.2155	0.2854	0.3382	0.3779	0.4702	0.4982	0.4999	0.5000	0.5000
-2.30	0.0107	0.0212	0.0315	0.0415	0.0514	0.0975	0.1759	0.2391	0.2900	0.3309	0.4428	0.4935	0.4993	0.4999	0.5000
-2.40	0.0082	0.0163	0.0242	0.0320	0.0397	0.0762	0.1408	0.1955	0.2419	0.2812	0.4043	0.4817	0.4965	0.4993	0.4999
-2.50	0.0062	0.0123	0.0184	0.0244	0.0303	0.0567	0.1106	0.1563	0.1967	0.2323	0.3567	0.4589	0.4882	0.4966	0.4990
-2.60	0.0047	0.0093	0.0139	0.0184	0.0229	0.0447	0.0854	0.1225	0.1562	0.1870	0.3040	0.4232	0.4699	0.4882	0.4954
-2.70	0.0035	0.0069	0.0103	0.0137	0.0171	0.0336	0.0650	0.0942	0.1215	0.1469	0.2507	0.3757	0.4300	0.4691	0.4846
-2.80	0.0026	0.0051	0.0076	0.0101	0.0126	0.0250	0.0487	0.0712	0.0927	0.1130	0.2005	0.3206	0.3925	0.4356	0.4614
-2.90	0.0019	0.0037	0.0056	0.0074	0.0093	0.0184	0.0360	0.0531	0.0695	0.0853	0.1560	0.2633	0.3371	0.3879	0.4229
-3.00	0.0014	0.0027	0.0040	0.0054	0.0067	0.0133	0.0263	0.0390	0.0513	0.0632	0.1185	0.2089	0.2778	0.3305	0.3706
-3.10	0.0010	0.0019	0.0029	0.0039	0.0048	0.0096	0.0190	0.0282	0.0373	0.0462	0.0881	0.1606	0.2204	0.2696	0.3102
-3.20	0.0007	0.0014	0.0021	0.0027	0.0034	0.0068	0.0136	0.0202	0.0266	0.0332	0.0643	0.1203	0.1691	0.2116	0.2487
-3.30	0.0005	0.0010	0.0014	0.0019	0.0024	0.0048	0.0096	0.0143	0.0190	0.0236	0.0461	0.0800	0.1260	0.1605	0.1918
-3.40	0.0003	0.0007	0.0010	0.0013	0.0017	0.0034	0.0067	0.0100	0.0133	0.0166	0.0326	0.0631	0.0916	0.1182	0.1431
-3.50	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0023	0.0046	0.0069	0.0092	0.0115	0.0227	0.0445	0.0652	0.0650	0.1039
-3.60	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0016	0.0032	0.0048	0.0063	0.0079	0.0157	0.0309	0.0456	0.0598	0.0736
-3.70	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0011	0.0022	0.0032	0.0043	0.0054	0.0107	0.0211	0.0313	0.0414	0.0511
-3.80	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0007	0.0014	0.0022	0.0029	0.0036	0.0072	0.0143	0.0213	0.0282	0.0349
-3.90	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0005	0.0010	0.0014	0.0019	0.0024	0.0048	0.0095	0.0142	0.0189	0.0235
-4.00	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006	0.0010	0.0013	0.0016	0.0032	0.0063	0.0094	0.0125	0.0156
-4.10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0006	0.0010	0.0021	0.0041	0.0062	0.0082	0.0102
-4.20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0013	0.0027	0.0040	0.0053	0.0066
-4.30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0009	0.0017	0.0026	0.0034	0.0043
-4.40	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0011	0.0016	0.0022	0.0027
-4.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0010	0.0014	0.0017
-4.60	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011
-4.70	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007
-4.80	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004
-4.90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
-5.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

**Wahrscheinlichkeitsdichte
DNMAX (Z) dZ**



Z/F	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500
0.00	0.3989	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.3970	0.0632	0.0076	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	0.3910	0.1240	0.0295	0.0062	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.30	0.3814	0.1799	0.0636	0.0200	0.0059	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.40	0.3683	0.2289	0.1068	0.0442	0.0172	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.50	0.3521	0.2696	0.1549	0.0791	0.0378	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.60	0.3332	0.3009	0.2038	0.1227	0.0692	0.0026	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.70	0.3123	0.3223	0.2495	0.1717	0.1107	0.0081	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.80	0.2897	0.3339	0.2886	0.2218	0.1598	0.0203	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.90	0.2661	0.3363	0.3187	0.2685	0.2121	0.0427	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	0.2420	0.3304	0.3383	0.3080	0.2628	0.0779	0.0034	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	0.2179	0.3175	0.3470	0.3371	0.3071	0.1262	0.0106	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.20	0.1942	0.2990	0.3453	0.3544	0.3411	0.1845	0.0270	0.0030	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.30	0.1714	0.2764	0.3343	0.3595	0.3623	0.2471	0.0575	0.0100	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.40	0.1497	0.2511	0.3158	0.3531	0.3700	0.3067	0.1054	0.0272	0.0062	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.50	0.1295	0.2244	0.2917	0.3369	0.3649	0.3562	0.1698	0.0607	0.0193	0.0057	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.60	0.1109	0.1975	0.2638	0.3132	0.3486	0.3902	0.2444	0.1148	0.0480	0.0188	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.70	0.0940	0.1713	0.2341	0.2843	0.3237	0.4059	0.3192	0.1882	0.0987	0.0485	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.80	0.0790	0.1466	0.2040	0.2525	0.2929	0.4035	0.3829	0.2724	0.1723	0.1022	0.0049	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.90	0.0656	0.1237	0.1749	0.2198	0.2590	0.3853	0.4265	0.3541	0.2614	0.1808	0.0188	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2.00	0.0540	0.1031	0.1476	0.1878	0.2241	0.3551	0.4457	0.4197	0.3513	0.2756	0.0537	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
2.10	0.0440	0.0848	0.1227	0.1577	0.1901	0.3170	0.4407	0.4594	0.4257	0.3698	0.1200	0.0063	0.0002	0.0000	0.0000
2.20	0.0355	0.0690	0.1006	0.1304	0.1585	0.2752	0.4152	0.4697	0.4724	0.4454	0.2175	0.0259	0.0023	0.0002	0.0000
2.30	0.0283	0.0554	0.0814	0.1062	0.1299	0.2331	0.3753	0.4532	0.4864	0.4895	0.3311	0.0758	0.0130	0.0020	0.0003
2.40	0.0224	0.0441	0.0650	0.0852	0.1048	0.1930	0.3272	0.4160	0.4701	0.4981	0.4359	0.1669	0.0479	0.0122	0.0029
2.50	0.0175	0.0346	0.0513	0.0675	0.0834	0.1566	0.2765	0.3660	0.4306	0.4751	0.5086	0.2915	0.1253	0.0479	0.0172
2.60	0.0136	0.0269	0.0400	0.0528	0.0654	0.1248	0.2274	0.3106	0.3771	0.4292	0.5374	0.4212	0.2476	0.1294	0.0634
2.70	0.0104	0.0207	0.0308	0.0408	0.0507	0.0979	0.1826	0.2555	0.3178	0.3705	0.5233	0.5219	0.3903	0.2595	0.1618
2.80	0.0079	0.0157	0.0235	0.0312	0.0388	0.0756	0.1436	0.2047	0.2593	0.3079	0.4766	0.5711	0.5132	0.4099	0.3069
2.90	0.0060	0.0119	0.0177	0.0235	0.0293	0.0576	0.1109	0.1602	0.2058	0.2478	0.4111	0.5657	0.5838	0.5356	0.4606
3.00	0.0044	0.0088	0.0132	0.0176	0.0219	0.0433	0.0842	0.1229	0.1595	0.1941	0.3391	0.5175	0.5924	0.6027	0.5749
3.10	0.0033	0.0065	0.0098	0.0130	0.0162	0.0321	0.0630	0.0926	0.1212	0.1485	0.2697	0.4443	0.5491	0.6032	0.6212
3.20	0.0024	0.0048	0.0071	0.0095	0.0119	0.0235	0.0465	0.0687	0.0904	0.1114	0.2081	0.3626	0.4740	0.5508	0.6000
3.30	0.0017	0.0034	0.0052	0.0069	0.0086	0.0171	0.0338	0.0502	0.0664	0.0821	0.1565	0.2842	0.3869	0.4683	0.5314
3.40	0.0012	0.0025	0.0037	0.0049	0.0061	0.0122	0.0243	0.0363	0.0480	0.0596	0.1153	0.2155	0.3022	0.3766	0.4401
3.50	0.0009	0.0017	0.0026	0.0035	0.0044	0.0087	0.0173	0.0258	0.0343	0.0426	0.0833	0.1591	0.2278	0.2899	0.3459
3.60	0.0006	0.0012	0.0018	0.0024	0.0031	0.0061	0.0122	0.0182	0.0242	0.0301	0.0593	0.1149	0.1669	0.2155	0.2610
3.70	0.0004	0.0008	0.0013	0.0017	0.0021	0.0042	0.0085	0.0127	0.0168	0.0210	0.0416	0.0814	0.1195	0.1559	0.1907
3.80	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0288	0.0567	0.0839	0.1102	0.1358
3.90	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0010	0.0020	0.0040	0.0059	0.0079	0.0099	0.0197	0.0390	0.0579	0.076-5	0.0947
4.00	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0013	0.0027	0.0040	0.0053	0.0067	0.0133	0.0264	0.0394	0.0522	0.0648
4.10	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004	0.0009	0.0018	0.0027	0.0036	0.0045	0.0089	0.0177	0.0264	10.0351	0.0437
4.20	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0006	0.0012	0.0018	0.0024	0.0029	0.0059	0.0117	0.0175	0.0233	0.0291
4.30	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0008	0.0012	0.0015	0.0019	0.0038	0.0077	0.0115	0.0153	0.0191
4.40	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0007	0.0010	0.0012	0.0025	0.0050	0.0075	0.0099	0.0124
4.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0016	0.0032	0.0048	0.0064	0.0080
4.60	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0010	0.0020	0.0030	0.0040	0.0051
4.70	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0006	0.0013	0.0019	0.0025	0.0032
4.80	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0009	0.0012	0.0016	0.0020
4.90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0007	0.0010	0.0012
5.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007

17. A posteriori Varianz-Kovarianz-Schätzung

17.1 Problemstellung

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfordert Informationen über die Kovarianzmatrix der Beobachtungen (Matrix \mathbf{P} , Kofaktorenmatrix \mathbf{Q} der Kovarianzmatrix).

In der Praxis kommen folgende Fälle vor:

a) Die Beobachtungen haben bekannte σ_i

σ_0 wird gewählt, $\mathbf{Q}_{\ell\ell}$ oder \mathbf{P} werden gebildet und nach der Ausgleichung wird \mathbf{s}_0 berechnet.

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{s}_0^2}{\sigma_0^2} \text{ wird dann getestet.}$$

b) Nur die Quotienten zwischen den Standardabweichungen der Beobachtung sind bekannt (σ_i unbekannt). $\mathbf{Q}_{\ell\ell}$ wird gebildet, $\mathbf{s}_0^2 = \sum \mathbf{p}v^2 / (\mathbf{n} - \mathbf{u})$ wird nach der Ausgleichung berechnet und als Schätzung für σ_0^2 gebraucht.

So können die Varianzen für die einzelnen Beobachtungen ebenfalls geschätzt werden: $\mathbf{s}_i^2 = \mathbf{s}_0^2 \cdot \mathbf{q}_{\ell\ell}^{(ii)}$.

c) Die Quotienten zwischen den Standardabweichungen der Beobachtungen sind nur innerhalb von Beobachtungsgruppen bekannt. In diesem Fall verwendet man die im Folgenden beschriebene Methode der Varianz-Schätzung.

17.2 Bekannte erwartungstreue Schätzer

Die folgende Beziehung wurde bereits hergeleitet (Kap. 5.11):

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}) = \sigma_0^2 \mathbf{sp}(\mathbf{P} \mathbf{Q}_{\ell\ell}) = \mathbf{sp}(\mathbf{P} \mathbf{K}_{\ell\ell})$$

wobei

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}; \text{ (Abkürzung: } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} \text{)}; \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \left| \sigma_{ik} / \sigma_0^2 \right|; \sigma_i^2 = \sigma_{ik} \text{ für } i = k.$$

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}(\mathbf{E} - \mathbf{P} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)$$

Daraus folgt (Kap. 5.11):

$$\text{sp}(\mathbf{PQ}_{vv}) = \text{sp}\left(\mathbf{E} - \mathbf{P}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right) = \mathbf{n} - \mathbf{u}$$

und man kann dann beweisen, dass

$$\mathbf{s}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}}{\text{sp}(\mathbf{PQ}_{vv})} = \frac{\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}}{\mathbf{n} - \mathbf{u}}$$

eine erwartungstreue Schätzung für σ_0^2 ist. Diese Schätzung wird als Testvariable im Fall der bekannten Standardabweichungen (a) oder für die Schätzung der Standardabweichung der Beobachtungen verwendet, wenn man ihre Proportionalitätsfaktoren (b) kennt.

17.3 Einfache Lösung für die Varianz-Schätzung

Falls man die Beobachtungen in Gruppen unterteilen kann und die Proportionalitätsfaktoren nur innerhalb einer Gruppe bekannt sind, ist eine Lösung des Ausgleichungsproblems mit den bisherigen Kenntnissen in Spezialfällen möglich.

Wenn sich die einzelnen Beobachtungsgruppen, z.B. Richtungen und Distanzen getrennt für sich ausgleichen lassen, kann man sie auch getrennt behandeln und für jede Gruppe eine Ausgleichung berechnen. Die bekannte Schätzung $\mathbf{s}_0^2 = \sum \mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{v} / (\mathbf{n} - \mathbf{u})$ wird die gewünschten Informationen zu den Beobachtungsgruppen liefern.

Für ein Richtungs-Distanznetz, das sich in zwei Teilnetze trennen lässt, berechnet man zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{0R}^2 &= \mathbf{V}_R^T \mathbf{P}_R \mathbf{V}_R / (\mathbf{n}_R - \mathbf{u}_R) \\ \mathbf{s}_{0D}^2 &= \mathbf{V}_D^T \mathbf{P}_D \mathbf{V}_D / (\mathbf{n}_D - \mathbf{u}_D) \end{aligned} \tag{1}$$

Die Teilung des Netzes bewirkt nicht nur eine Unterteilung der Messungen. Sie hat eine Anpassung der Anzahl Unbekannten zur Folge.

17.4 Allgemeine Schätzung von Varianz-Komponenten

Wenn hingegen eine Trennung in Teilnetze nicht möglich ist, bietet die Methode der Varianzkomponentenschätzung eine Lösung.

Man gliedert die Beobachtungen der Ausgleichung in Gruppen und nimmt an, dass sie unabhängig voneinander sind, d.h. zum Beispiel im oben erwähnten Fall, dass die Richtungsbeobachtungen von den Distanzbeobachtungen unabhängig sind.

Gruppen können auf Grund der verwendeten Messgeräte gebildet werden. Aber auch andere Gruppierungen, z.B. örtlich gleichartige Beobachtungen oder die Ausscheidung von Einzelbeobachtungen sind möglich.

Solche Gruppen nennt man Komponenten.

Es wird auf die Schätzung von Kovarianzen verzichtet, um nur die Varianzen zu betrachten. Die Beziehungen werden für die vermittelnde Ausgleichung hergeleitet.

Die i -te Gruppe ($i = 1 \dots m$) habe die Kovarianzmatrix \mathbf{K}_{ii} .

Die Gesamt-Kovarianzmatrix ist daher:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}_{mm} \end{vmatrix}$$

und man kann die Kovarianzmatrix jeder Beobachtungsgruppe wie folgt schreiben:

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$n \cdot n$

Damit:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \mathbf{K}_{ii}$$

Die Verbesserungen der i-ten Beobachtungsgruppe (Anzahl Beobachtungen: n_i) können dann für eine vermittelnde Ausgleichung wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{F}_i \\ \mathbf{X} &= \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \\ \mathbf{V}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{F} - \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (2)$$

Falls man z.B. die Beobachtungen in zwei Gruppen unterteilt hat ($m=2$), erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{n_{1.1}} &= \mathbf{A}_{n_{1.u}} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{F}_{n.1} - \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{V}_{n_{2.1}} &= \mathbf{A}_{n_{2.u}} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{F}_{n.1} - \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} &= \left| \begin{array}{cc|c} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{V}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{V}_2 \end{array} \right| \\ &= \mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}) = \mathbf{E}(\mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1) + \mathbf{E}(\mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2) \quad (5)$$

Früheren Entwicklungen entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}) &= \text{sp}(\mathbf{P} \mathbf{K}_{vv}) \\ &= \text{sp}(\mathbf{P}_1 \mathbf{K}_{v_1 v_1}) + \text{sp}(\mathbf{P}_2 \mathbf{K}_{v_2 v_2}) \end{aligned} \quad (6)$$

Man kann annehmen, dass bei Netzen, die innerhalb der Gruppe genügend überbestimmt sind, die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i) \cong \mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{K}_{vivi}) = \sigma_{oi}^2 \mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi}) \quad (7)$$

so dass man in dieser Art σ_{oi} aus den Verbesserungen einer einzelnen Gruppe schätzen kann.

für unabhängige Beobachtungen:

$$s_{oi}^2 = \hat{\sigma}_{oi}^2 = \frac{\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i}{\mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi})} \quad (8)$$

$\sum p_{vv}$ der Gruppe
 $\sum \underbrace{\frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{\ell\ell}^{(ii)}}}_{z_i}$ der Gruppe

Wenn Formel (7) gilt, ist

$$\sigma_{oi}^2 = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i)}{\mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi})}$$

Die ermittelten s_{oi}^2 sind eine praktisch erwartungstreue Schätzung für σ_{oi}^2 einer Beobachtungsgruppe und erlauben danach eine Schätzung der Standardabweichungen der einzelnen Beobachtungen der Gruppe der

$$\mathbf{E}(s_{oi}^2) = \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i}{\mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi})}\right) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i)}{\mathbf{sp}(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi})} = \sigma_{oi}^2 \quad (9)$$

Zu beachten ist die Tatsache, dass \mathbf{V}_i und \mathbf{Q}_{vivi} auch von den anderen σ_{ok} ($k = 1, \dots, m$) der berechneten Ausgleichung abhängig sind. Wenn man die erhaltenen s_{oi} für eine neue Festlegung der Gewichte verwendet, erhält man ein anderes Ausgleichungsergebnis. Daher operiert man iterativ. Mit den erhaltenen s_{oi} wird eine neue Gewichtsmatrix bestimmt und eine neue Ausgleichung berechnet, bis $s_{oi} \cong \sigma_o$ für alle Gruppen ist.

In der Software LTOP wird die Varianzschätzung für die verschiedenen Messverfahren und für die gewählten Messgruppen berechnet. Die Ergebnisse erscheinen in Tabellenform in der Ausgabe (.prn) als Quotienten zwischen eingegebenen und geschätzten Standardabweichungen mit der a posteriori Varianzschätzung.

MITTLERE FEHLER DER BEOBACHTUNGSGRUPPEN :	Anzahl	A Priori	Schluss	Quot.	Redund.
DISTANZEN (MF FÜR 1 KM) :					
MST-KORR IN PPM ADD-KORR IN MM					
GR MST KORR MF ADD KORR MF					
4	9	5.1 MM	6.8 MM	1.33	4.575
5	6	10.0 MM	9.8 MM	0.97	4.236
RICHTUNGEN (MF : 1 KM) :	19	5.0 CC	7.4 CC	1.46	10.189
AZIMUTE (MF: 1 KM) :	1	2.1 CC	NICHT BESTIMMBAR		.000
HÖHENDIFFERENZ (MF : 1 KM HOR) :	16	12.3 MM	17.3 MM	1.40	10.000

Tabelle der Varianz-Komponenten-Schätzung in der Software LTOP

17.5 Weitere Verfahren

Das vorgeschlagene Verfahren ist einfach und wurde deshalb in den gebräuchlichen Software-Lösungen implementiert.

In der Literatur findet man aber auch andere Verfahren, die ebenfalls zu einer Lösung des Varianz-Schätzungsproblems führen könnten.

Man kann z.B. eine gleichwertige Alternative für die Schätzung der s_{oi} der einzelnen Gruppen aus der folgenden Beziehung bilden:

$$E \left(\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i \right) = \sigma_{oi}^2 \mathbf{sp} \left(\mathbf{P}_i \mathbf{Q}_{vivi} \right)$$

Da in der oben erwähnten Beziehung die Matrix \mathbf{P}_i und \mathbf{Q}_{vivi} von den $\sigma_{oi}, \sigma_{o2}, \dots, \sigma_{om}$ abhängig sind, kann man diese Abhängigkeit mindestens teilweise explizit darstellen. Es entsteht so ein Gleichungssystem mit m Gleichungen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1) = \mathbf{f}_1(\sigma_{o1}, \sigma_{o2}, \dots, \sigma_{ok})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2) = \mathbf{f}_2(\dots)$$

$$=$$

$$\vdots$$

Wenn die erhaltenen Werte $\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i$ als Schätzung für die $\mathbf{E}(\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i)$ eingesetzt werden, liefert die Lösung des Gleichungssystems in den unbekanntem s_{oi} eine Schätzung für die gesuchten σ_{oi} der Gruppen. Da die Verbesserungen von den σ_i abhängig sind, ist auch mit diesem Verfahren ein iterativer Prozess erforderlich, bis die erhaltenen s_i zu keinen Änderungen mehr in der Ausgleichung führen.

18. Die Kollokation

18.1 Die Kollokation im Umfeld der Ausgleichungsmodelle

Die Kollokation nach der Methode der kleinsten Quadrate ist eine Erweiterung der üblichen Ausgleichungsmodelle und bietet die Möglichkeit, funktionale Transformation und stochastische Prädiktion in einem Ansatz zu kombinieren.

Die Unterschiede zwischen Vermittelnder Ausgleichung und Kollokation werden in der Folge dargestellt.

18.2 Besonderheiten der vermittelnden Ausgleichung

Die Funktion der Beobachtungsgleichungen

$$\tilde{l}_i = l_i + \tilde{\varepsilon}_i = F_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots) \quad (1)$$

gelten als genau bekannt und es wird vorausgesetzt, dass die „wahren Werte“ der Beobachtungen

$$\tilde{l}_i \quad \text{oder} \quad l_i + \tilde{\varepsilon}_i \quad (2)$$

und die „wahren Werte“ der unbekannt Parameter die Gleichungen erfüllen würden.

Die Parameter x, y, \dots und die ausgeglichenen Beobachtungen werden dann so geschätzt, dass sie die Beobachtungsgleichung erfüllen. Das heißt:

$$\bar{l}_i = l_i + v_i = F_i(x, y, \dots) \quad (3)$$

und die gewichtete Summe der Quadrate der Verbesserungen minimal wird

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \sum p v v = \text{Min} \quad (4)$$

Zu beachten sind die Funktionen F_i , die in der vermittelnden Ausgleichung als genau bekannt vorausgesetzt werden.

18.3 Das Kollokationsmodell

Im Kollokationsmodell wird nicht mehr vorausgesetzt, dass die funktionalen Zusammenhänge genau bekannt sind, sie gelten als nur näherungsweise bekannt, so dass sogar die „wahren Werte“ die Beobachtungsgleichungen nicht genau erfüllen würden.

$$\tilde{l}_i \approx \mathbf{F}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \dots) \quad (5)$$

$$\tilde{l}_i = l_i + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \tilde{\mathbf{s}}_i + \mathbf{F}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \dots) \quad (6)$$

Man nimmt daher an, dass neben den zufälligen Messfehlern auch eine systematische Abweichung der Modellfunktion vorhanden sein wird. Die Schätzung der Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate wird so durchgeführt, dass

$$l_i = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_i + \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots) \quad (7)$$

erfüllt sind und

$$\mathbf{n}^T \mathbf{P}_{nn} \mathbf{n} + \mathbf{s}^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{s} = \text{Min} \quad (8)$$

n: zufälliger Anteil (Noise, Rauschen)

s: unregelmässiger systematischer Anteil (Signal)

Die Kollokation ermöglicht folgende Operationen:

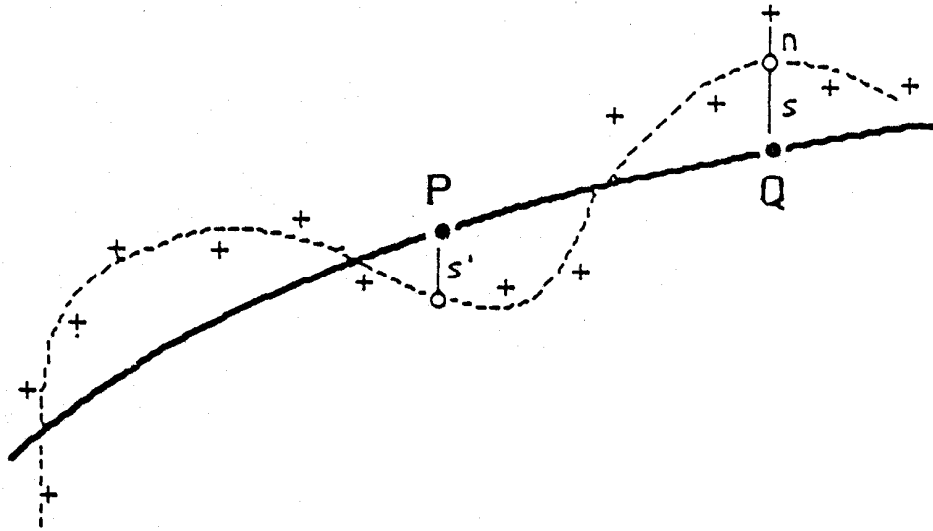
Filterung: Messdaten werden vom Rauschen befreit, oder Trendwerte werden um das Signal verbessert

Prädiktion: Interpolation zwischen den gefilterten Werten: Modellwerte plus Signalwert

In der Praxis wird die Kollokation in vielen Bereichen eingesetzt:

- Gravimetermessungen auf Raster umrechnen
- Periodische Instrumentenfehler (Kreisteilung, Verzeichnung) bestimmen
- Restfehler bei Netztransformationen ausgleichen
- Digitales Geländemodell interpolieren
- etc.

Das Kollokationsproblem kann z.B. mit der folgenden Figur dargestellt werden.



Legende:	Q bzw. P	Quell-(Mess-) bzw. Aufpunkt
	+	Gemessene Werte (Stützwerte)
	—————	Funktionales Modell (Trendfunktion)
	•	Modellwerte
	-----	Gefilterte (prädizierte) Funktion
	o	Entsprechende Werte
	n	Rauschen
	s	Signal in Stützwert
	s'	Signal in präzidiertem Wert

Fig. 1 Das Kollokationsmodell für eine Funktion mit einer Variablen

18.4 Mathematisches Modell

18.4.1 Beobachtungsgleichungen

$$\ell = \underset{\text{m.1}}{F}(\underset{\text{m.1}}{x'_1}, \underset{\text{m.1}}{x'_2}, \dots, \underset{\text{m.1}}{x'_u}) + \underset{\text{m.1}}{s} + \underset{\text{m.1}}{n} \quad (9)$$

ℓ : Beobachtungen

F : Funktionales Modell

$x' = x^0 + x$: Unbekannte Parameter mit Näherungswert x^0 und verkürztem Wert x

n : Rauschen (Noise)

s : Signal; örtliche, zeitliche Anomalien

- ($n+s$): Entspricht der Verbesserung v einer üblichen vermittelnden Ausgleichung. Stochastisch werden aber n und s verschieden behandelt, deshalb kann man sie im Ausgleichungsverfahren trennen.

18.4.2 Linearisierte Beobachtungsgleichungen

$$Ax + s + n = w \quad (10)$$

$w = \ell - F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0)$; gemessen minus genähert, auch 'Widersprüche' oder 'verkürzte Beobachtungen'

Die Beobachtungsgleichungen werden linearisiert:

$$F(x'_1, x'_2, \dots, x'_u) = F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0) + a_1 x_1 + \dots + a_u x_u + \text{Gl.h.ö.O.} \quad (11)$$

$A = |a_1, a_2, \dots, a_u|$ Koeffizientenmatrix der Trendfunktion

18.4.3 Stochastisches Modell

\mathbf{n} sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$
und Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{nn}

\mathbf{s} sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$
und Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{ss}

$\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ sind die Gesamtresiduen, ebenfalls normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$
und Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{zz}

Da \mathbf{s} und \mathbf{n} als stochastisch unabhängig betrachtet werden, ist

$$\mathbf{C}_{ns} = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_{zz} = \mathbf{C}_{ss} + \mathbf{C}_{nn} \quad (13)$$

Wir nehmen an, dass \mathbf{C}_{ss} und \mathbf{C}_{nn} bekannt seien.

Man kann die Summe $\mathbf{s} + \mathbf{n}$ in Matrizenform ausdrücken, wenn man \mathbf{s} , \mathbf{n} und falls gewünscht weitere \mathbf{s}' (\mathbf{s} -Werte in anderen Positionen) in einem gesamten Verbesserungsvektor \mathbf{V} zusammenfasst, dann ist

$$\mathbf{B}^T \mathbf{V} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (14)$$

wenn \mathbf{B}^T und \mathbf{V} wie folgt gewählt werden:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{V} = \begin{matrix} \mathbf{m} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{1} & \\ \hline & & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} & \cdot & \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{s} \\ \hline \mathbf{s}' \\ \hline \mathbf{n} \\ \hline \end{array} & \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{1} \end{matrix} \end{matrix} \quad (15)$$

18.5 Ausgleichung

(10) wird umgeformt in

$$B^T v + Ax - w^{*}) = 0 \quad (16)$$

mit $B^{T^{**})} = \begin{vmatrix} E, & 0, & E \\ m.m, & m.p, & m.m \end{vmatrix}$; p : Anzahl der zu präzifizierenden Werte

$$v^T = \begin{vmatrix} s^T, & s'^T, & n^T \\ 1.m, & 1.p, & 1.m \end{vmatrix};$$

Das funktionale Modell hat die Form einer bedingten Ausgleichung mit Unbekannten.

Man vergleiche dazu Kap. 10

*); **): Vorzeichen nach Höpcke; in FAR I: $-w \Rightarrow w$, $B^T \Rightarrow B$.

$$C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline C_{ss} & C_{ss'} & 0 \\ \hline C_{s's} & C_{s's'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{nn} \\ \hline \end{array}$$

Gesamtkovarianzmatrix

Mit bekanntem A , w und C kann man mit der Methode der kleinsten Quadrate

$$x, v(n, s', s), C_{XX}$$

und ferner s_0 berechnen.

(16) kann nun nach den Regeln von Kap. 10 behandelt werden: Die Gleichungen mit Modifikationen nach *) und **) führen auf

$$\begin{vmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{K} + \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{W} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (17)$$

und

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{W}) \quad (18)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} = -\mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{W} \quad (20)$$

Mit $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} = \mathbf{C}_{ss} + \mathbf{C}_{nn} = \mathbf{C}_{zz}$ (21)

wird $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{W}$ (22)

Mit $\mathbf{C}_{ww} = \mathbf{C}_{zz}$ (Definition von \mathbf{w} und \mathbf{z})

und $\mathbf{C}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$

wird $\mathbf{X} = \mathbf{C}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{W}$ (23)

Mit $\mathbf{V} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{K}$

und dem modifizierten \mathbf{k} nach (18) und (21) folgt

$$\mathbf{K} = -\mathbf{C}_{zz}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{w}) = \mathbf{C}_{zz}^{-1} (\mathbf{n} + \mathbf{s}) = \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{z} \quad (24)$$

und

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{ss} \\ \mathbf{C}_{s's} \\ \mathbf{C}_{nn} \end{vmatrix} \mathbf{C}_{zz}^{-1} \mathbf{z} \quad (25)$$

oder

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss} \mathbf{C}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{z} \\
 \mathbf{s}' = \mathbf{C}_{s's} \mathbf{C}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{z} \quad \text{wobei } \mathbf{z} = -(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{W}) \\
 \mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn} \mathbf{C}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{z}
 \end{array} \quad (26)$$

Die Standardabweichung der Gewichtseinheit

$$\mathbf{s}_0^2 = \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s} + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n}}{\mathbf{m} - \mathbf{u}}$$

muss ~ 1 werden, da wir Kovarianzen wie Kofaktoren behandelt haben ($\sigma_0 = 1$).

Man kann nun etwa die gefilterte Funktion

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}_{ss} \mathbf{k} \quad \text{mit } \mathbf{Q}_{ff} \text{ rechnen; vgl. H\"opcke.}$$

18.6 Die Anwendung der Kollokation

18.6.1 Voraussetzungen f\"ur \mathbf{s} und \mathbf{n}

Die Kollokation kann eingesetzt werden, wenn die Hypothesen, die vorausgesetzt wurden, zutreffen. F\"ur die Residuen wurde Folgendes vorausgesetzt:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{s}\} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{E}\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}$ ist unproblematisch; es entspricht der \"ublichen Hypothese, dass $\mathbf{E}\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$ ist. Die zuf\"alligen Fehler sind symmetrisch um Null. Die Annahme, dass $\mathbf{E}\{\mathbf{s}\} = \mathbf{0}$ ist, muss hingegen beachtet werden. Werden etwa die Restfehler einer Netztransformation nach Helmert als $\mathbf{s} + \mathbf{n}$ Vektor behandelt, so ist die Voraussetzung erf\"ullt. In anderen F\"allen muss allenfalls im funktionalen Modell eine Korrektur angebracht werden. Man muss die Funktion zentrieren.

18.6.2 Voraussetzungen für C_{ss} und C_{nn}

Die eigentliche kritische Annahme finden wir im stochastischen Modell. Sowohl C_{nn} als auch C_{ss} müssen bekannt sein. Während C_{nn} der üblichen Kovarianzmatrix der Beobachtungen (zufällige Fehler) einer Ausgleichung entspricht, ist C_{ss} besonders zu beachten. Diese Matrix wiedergibt die stochastische Abhängigkeit zwischen den s (Signale) und ersetzt die unbekannt funktionalen Zusammenhänge.

In der Praxis bildet man für C_{ss} die sog. Korrelationsmatrix \mathbf{R} .

$$C_{ss} = \sigma_0^2 \mathbf{R} \quad \mathbf{R} = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & r_{12} & r_{13} & r_{1m} \\ & & \mathbf{1} & r_{23} & r_{2m} \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & \dots \\ \dots & & & & & \mathbf{1} \end{array}$$

Die r_{ik} werden mit Korrelationsfunktionen, d.h. $r_{ik}(\mathbf{t})$ berechnet, die von einem Argument \mathbf{t} abhängig sind. Meistens ist \mathbf{t} ein zeitlicher oder räumlicher Abstand. $r_{ik}(\mathbf{t})$ hängt in der Regel auch noch von Parametern \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ab, die einen qualitativ angemessenen Ansatz noch quantitativ festlegen. Da die Korrelationsfunktion mit ihren Parametern oft empirisch gewählt wird, ist eine Überprüfung des Vorgehens zuerst in Fällen mit bekannten Resultaten unerlässlich.

18.6.3 Beispiele für Korrelations- und Kovarianz-Funktionen

$$\text{Kurve 1 : } r_1(t) = \begin{cases} \frac{a - |t|}{a} & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

$$\text{Kurve 2 : } r_2(t) = \sin(ct) / ct$$

$$\text{Kurve 3 : } r_3(t) = c \exp(-b^2 t^2) \quad \text{mit } c = 1$$

$$r(t)$$

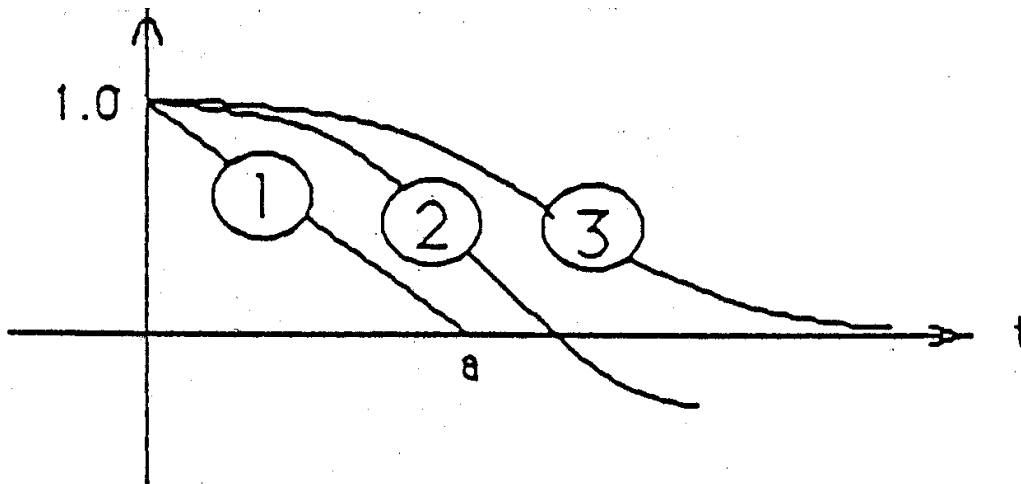


Fig. 2 Korrelationsfunktion

Diese Kovarianzfunktionen wiedergeben das qualitative Empfinden des Betrachters. Sie sind der eigentliche Schwachpunkt der Kollokation. Die Wahl der Kovarianzfunktion muss sorgfältig getroffen werden.

19. Multivariate Statistik und Zuverlässigkeit

19.1 Problemstellung und Zielsetzungen

Seit mehr als zwei Jahrhunderten wird über die statistischen Eigenschaften der geodätischen Beobachtungen gesprochen und über die Tatsache, dass die für die Auswertung bereitgestellten Messwerte nicht immer als Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen betrachtet werden können. In der klassischen Ausgleichsrechnung wurden die Konsequenzen dieser Feststellung nur am Rande behandelt. Man kennt drei Arten von Fehlern für die Beobachtungen in einem Messprozess: Zufällige, systematische und grobe Fehler. Während die Bedeutung der zufälligen Fehler immer mit grosser Aufmerksamkeit beobachtet wurde, beschäftigten sich die Vermessungsingenieure nur empirisch mit der Problematik der groben Fehler.

Erst Ende der sechziger Jahre veröffentlichte W. Baarda seine bekannte Arbeit „A testing procedure for use in geodetic networks“, wodurch erstmals die theoretischen Grundlagen für die Fehlersuche und für die Überprüfung der Zuverlässigkeit der geodätischen Messsysteme formuliert waren. Die vorliegende Arbeit befasst sich hauptsächlich mit den Verfahren für die Entdeckung und Beseitigung allfälliger grober Fehler und versucht zu zeigen, dass die intuitiven Methoden der Praktiker und die mathematischen Verfahren der Statistiker viel ähnlicher sind, als man üblicherweise annimmt.

Die Hauptkomponentenanalyse und die darauf aufgebaute Zuverlässigkeitstheorie sind das Thema dieses Kapitels.

19.2 Die Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis

Die Arbeiten für die jetzt gültige schweizerische Triangulation höherer Ordnung begannen in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts. Die Koordinaten der Punkte wurden durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate meistens in kleinen Teilnetzen bestimmt. Die grösste Anzahl der Berechnungen sind Einzel- oder Doppelpunkteinschaltungen; nur das Netz erster Ordnung wurde in grösseren Abschnitten ausgeglichen.

Vor der Computerzeit war der Aufwand für eine strenge Ausgleichung grosser Netze so erheblich, dass man schon für drei Neupunkte etlichen Respekt empfand. Es ist deshalb nicht überraschend, dass sich damals niemand besonders bemühte Methoden zu entwickeln, um grobe Fehler aus den Ergebnissen einer Ausgleichung zu erkennen. Man versuchte, die Fehler um jeden Preis schon vor aufwendigen Berechnungen zu entdecken und zu eliminieren. Nach der Ausgleichung zeigte man sich gegenüber den eventuell übriggebliebenen Modell-

fehlern eher toleranter: der Aufwand für die Korrekturen war unangenehmer als die Fehler selbst.

Zwei Ereignisse haben in den letzten 30 Jahren den praktischen Einsatz der Ausgleichsrechnung wesentlich verändert:

- die neuen Techniken der Informatik
- die Entwicklung elektronischer Distanzmessgeräte
- die Methoden der Satellitengeodäsie

Die elektronische Distanzmessung hat seit ihrer Einführung die Struktur der geodätischen Netze bestimmt. Die übersichtliche Dreiecksvermaschung war plötzlich nicht mehr notwendig. Der Netzentwurf und die Rekognoszierung wurden einfacher und die geodätische Arbeit wirtschaftlicher. Komplexer und immer schwieriger jedoch wurde es, die Qualität der Messanordnung zu beurteilen.

Mit den satellitengestützten Navigationssystemen erfolgte Ende der 80er Jahre ein weiterer Sprung in der geodätischen Technik.

In der selben Zeit fand der Durchbruch der elektronischen Datenverarbeitung in der geodätischen Praxis statt. Der Traum der Geodäten - Systeme mit „beliebig vielen“ Unbekannten auszugleichen - verwirklichte sich. Was im Feld die elektronische Distanzmessung und später die GPS-Technologie ermöglicht hatte, konnte in entsprechend flexibler Art auch ausgeglichen werden. Mit kleineren oder grösseren Rechenanlagen können in wenigen Sekunden grosse Datenmengen preiswert verarbeitet und die Resultate ausgedruckt werden.

Die Netze wurden grösser und komplexer, so dass die Interpretation der Resultate immer höhere Ansprüche stellte.

In der Praxis ist die Gefahr gross, dass die mühelos vom Computer erhaltenen Resultate in ihrer Wichtigkeit unterschätzt und daher etwas flüchtig überprüft werden. Gerade die kritische Interpretation der Ergebnisse ist jedoch eine der wichtigsten Aufgaben des Ingenieurs.

Um gegen diese unerwünschte Erscheinung vorzugehen, wurden in der letzten Zeit verschiedene Verfahren entwickelt und zum Teil in der Praxis eingesetzt, welche die Interpretation der Triangulationsergebnisse in systematischer Art ermöglichen sollen. Man kann sie in zwei Gruppen unterteilen:

- a) Analyse der Modelleigenschaften und der Messanordnung (a priori)
- b) Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (a posteriori)

In der Analyse der Modelleigenschaften werden die Folgen der Modellannahmen unter der Voraussetzung, dass das Modell zutrifft, untersucht. Die Analyse ist unabhängig von den durchgeführten Beobachtungen und kann deshalb vorsorglich auch vor den Feldarbeiten stattfinden. Dazu gehören die Berechnung der Fehlerellipsen a priori für die Neupunkte, die Zuverlässigkeitsbetrachtungen usw. Zweck der Analyse ist der Nachweis, dass die Resultate unter den getroffenen Annahmen die übergeordneten Randbedingungen (Bedürfnisse des Auftraggebers) befriedigen werden.

Nach Ausführung der Messarbeit, jedoch vor Ablieferung der Resultate muss man sich vergewissern, ob keine Gründe für eine Verwerfung des angenommenen Modells vorliegen, da nur wenn die Modelleigenschaften zutreffen der Nachweis vorliegt, dass die Resultate den übergeordneten Randbedingungen genügen. Zu diesem Zweck werden

statistische Tests eingesetzt, die mit den ausgeführten Beobachtungen oder mit Funktionen davon durchgeführt werden können: z. B. Test des Verhältnisses Mittlerer Fehler a posteriori- Mittlerer Fehler a priori, Berechnung der Dreiecksschlüsse in Triangulationsnetzen usw. Ziel der Modelltests ist die Annahme oder Verwerfung des mathematischen Modells: im Fall der Annahme können die Resultate veröffentlicht werden, andernfalls müssen das Modell modifiziert (z. B. durch Nachmessungen) und die neuen Eigenschaften analysiert werden, um zu prüfen, ob die übergeordneten Randbedingungen auch nach den Änderungen des Modells noch eingehalten sind.

Beide Gruppen von Verfahren werden im folgenden beschrieben. Um die Herleitungen zu erleichtern, werden zuerst die Verfahren a posteriori behandelt und erst später die Verfahren a priori.

19.3 Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (einfache Verfahren a posteriori aus der Praxis)

19.3.1 Der F-Test

Die Triangulationsprogramme liefern die geschätzte Standardabweichung a posteriori der Gewichtseinheit, so dass die Berechnung der Prüfgrösse

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

keine Schwierigkeit bietet (wo $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori und σ die gewählte Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori sind).

Die Verteilung der Teststatistik F ist die bekannte Fisher- oder F -Verteilung. Der Freiheitsgrad wird durch die Geometrie des Netzes bestimmt, während man für den mittleren Fehler a priori einen Freiheitsgrad (meistens ∞) annimmt. Dann kann der Tabelle der F -Verteilung sofort entnommen werden, ob die vorausgesetzte Wahrscheinlichkeitsschranke überschritten ist oder nicht. Da nur eine Grösse getestet wird (univariater Test), stellen sich keine Korrelationsprobleme.

Der F -Test ist sehr wirksam bei der Suche nach systematischen Modellfehlern, die viele Beobachtungen verfälschen (z. B. ungenaue Fixpunkte, Lotabweichungseinflüsse, falsche Schätzung der Genauigkeit für die Messungen usw.). Weniger wirksam ist er für die Entdeckung von einzelnen groben Fehlern, wenn der Betrag des Fehlers, relativ klein und das Netz gross ist, da die Testempfindlichkeit mit zunehmendem Freiheitsgrad ständig abnimmt.

19.3.2 Der V-Test

Die in der Vergangenheit am meisten angewandte Methode zur Beurteilung der Resultate einer Ausgleichung war der Test der Verbesserungen in den definitiven Abrissen. Getestet wurden die Grössen

$$u_i = v_i / \sigma_{ii} \quad i = 1, \dots, n$$

wobei

- v_i die i -te Verbesserung,
- σ_{ii} die angenommene Standardabweichung a priori der i -ten Messung,
- n die Anzahl Messungen der Ausgleichung sind.

Der Test wird durchgeführt unter der vereinfachenden Annahme, dass die \mathbf{u}_i annähernd standardisiert normalverteilt (mit Erwartungswert $\mathbf{0}$ und Varianz $\mathbf{1}$) und die Korrelationen zwischen den \mathbf{u}_i vernachlässigbar klein sind.

Da frühere Computerprogramme für die Ausgleichung die einzelnen Verbesserungen lieferten, aber keine Angabe über ihre Standardabweichung machten, war dieser Test der einzige durchführbare und deshalb trotz vielen schlechten Eigenschaften sehr populär.

Die Nachteile des V-Tests sind offensichtlich: die erwähnten vereinfachenden Annahmen sind eine recht schlechte Näherung, da die Standardabweichung von \mathbf{v}_i (σ_{v_i}) meist wesentlich kleiner als σ_{u_i} ist.

Zwischen den \mathbf{v}_i sind zudem Korrelationen vorhanden, die normalerweise nicht berechnet werden. Es ist daher nicht möglich, einen Gesamttest aller Komponenten des \mathbf{U} -Vektors durchzuführen, da die Annahmebereiche nicht direkt bestimmbar sind.

19.3.3 Der Test der geometrischen Bedingungen

Eine klassische Methode zur Überprüfung geodätischer Netze ist der Test der Widersprüche der geometrischen Bedingungen. Für reine Triangulationsnetze ist das Beispiel des Tests der Winkelsumme in den Dreiecken bekannt und braucht also keine besondere Erklärung.

Der grosse Vorteil solcher Tests liegt in der Möglichkeit, die Testgrösse vor der Ausgleichung zu berechnen. Als man noch von Hand rechnete, konnte man Unstimmigkeiten sofort entdecken und sich eine unnötige Ausgleichung ersparen.

Nach der Einführung der Distanzmessung und der Satellitenpositionierung wurde die Struktur der Netze viel komplizierter, so dass sich die Bildung der geometrischen Bedingungsgleichungen nicht mehr so einfach gestaltete. Für den Einsatz elektronischer Rechenanlagen wurde für die Ausgleichung die vermittelnde Methode vorgezogen, und die Bedingungen traten nicht mehr explizit auf.

Zur Lösung des Problems wurden in der Schweiz Computerprogramme für die automatische Berechnung der Dreiecksschlüsse entwickelt [Andris 1967]. Auch die Bildung der anderen Bedingungsgleichungen stellt keine unüberwindbare Schwierigkeit dar. In einer Publikation zeigt R. Conzett, wie mit dem Austauschverfahren aus der Matrix der Verbesserungsgleichungen einer vermittelnden Ausgleichung die Bedingungsgleichungen automatisch gebildet werden können [Conzett 1978].

Vom statistischen Standpunkt aus gesehen, ist der Test der geometrischen Bedingungen sehr günstig, da die Erwartungswerte der Widersprüche Null sind und die Varianzen ihrer Normalverteilungen leicht aus den linearisierten Bedingungsgleichungen berechnet werden können. Was hingegen nachteilig wirkt, sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Widersprüchen, die im allgemeinen vorhanden sind und einen Gesamttest erschweren.

Mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse kann ein spezielles System von unabhängigen Bedingungsgleichungen gebildet werden. Diese Möglichkeit wird in Punkt 19.4 beschrieben.

19.3.4 Der Test der standardisierten Verbesserungen

Einen wesentlichen Fortschritt in der Untersuchung a posteriori geodätischer Messsysteme bildet der Test der standardisierten Verbesserungen. Dazu müssen in einer vermittelnden Ausgleichung neben den üblichen Grössen (Unbekannten, Verbesserungen usw.) lediglich die Standardabweichungen der einzelnen Verbesserungen berechnet werden.

Da die Verbesserungsvariablen für normalverteilte Messungen ebenfalls normalverteilt sind und Erwartungswert Null besitzen $[E(\mathbf{V}) = \mathbf{0}]$, wenn die Varianz von \mathbf{v}_i bekannt ist, kann die Grösse

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i / \sigma_{v_i}$$

mit der zentrischen standardisierten Normalverteilung getestet werden. Der Test wurde in [Baarda 1968] als <Data snooping> bezeichnet und wird unter diesem Namen oft eingesetzt. Eine Anwendung für die Untersuchung von geometrischen Transformationen ist in [Kraus 1975] beschrieben.

Wenn die i-te Beobachtung (und keine andere) durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht und

$$\mathbf{l}_i^* = \mathbf{l}_i + \Delta_i$$

wird, dann ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_i - \left(\mathbf{q}_{vv}^{(ii)} / \mathbf{q}_{ll}^{(ii)} \right) \cdot \Delta_i \quad [\text{Just 1979}].$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher irrtümlicherweise die Nullhypothese angenommen wird, ist Funktion des Betrags von $\Delta \mathbf{i}$, des Verhältnisses $\mathbf{q}_{vv}^{(ii)} / \mathbf{q}_{ii}^{(ii)}$ und des gewählten Signifikanzniveaus α für die Verwerfung der Nullhypothese.

Da die einzelnen \mathbf{w}_i unter sich korreliert sind, ist es nicht möglich, einen Test aller Komponenten von \mathbf{W} durchzuführen.

19.4 Verfahren aus der multivariaten Statistik (neue a posteriori Verfahren)

19.4.1 Allgemeines

In der Beschreibung der mehrfachen univariaten Tests in den früheren Kapiteln ist dem Leser sicher aufgefallen, dass die gegenseitige Abhängigkeit der betrachteten Zufallsvariablen nicht berücksichtigt werden konnte. Die getrennte Beurteilung der einzelnen Testgrößen führt zu einem Informationsverlust, der nicht unterschätzt werden darf. Besonders bei kritischen Fällen könnten gerade die verlorenen Informationen wichtig sein.

Die multivariate Statistik behandelt alle Verfahren, die sich mit mehrdimensionalen stochastischen Variablen befassen. Sie bietet u. a. auch Lösungen für den Test einer Reihe von unter sich korrelierten stochastischen Variablen [Flury, Riedwyl 1980], [Maurer 1979]. Anwendungen solcher Verfahren für die Beurteilung der Triangulationsresultate werden im Folgenden beschrieben.

19.4.2 Graphische Verfahren

In der angewandten Statistik wird, wenn immer möglich, versucht, das vorhandene Zahlenmaterial durch Zeichnungen zu veranschaulichen. So kann die Fähigkeit des Menschen genutzt werden, aufgrund einfacher Beobachtung intuitiv komplexe Beziehungen zu erfassen. Für geodätische Anwendungen kann als Beispiel das Verfahren von H. J. Oettli erwähnt werden, das besonders geeignet ist für die multivariate Beurteilung des Verbesserungsvektors [H. J. Oettli 1960-75] und während langer Zeit in der schweizerischen Landesvermessung verwendet wurde (Fig. 1).

Im Netzplan werden die durchgeführten Beobachtungen sowie die dazugehörigen Verbesserungen graphisch dargestellt. Ein erfahrener Beobachter kann aus den Netzverbindungen intuitiv die vorhandenen Korrelationen zwischen den Verbesserungen abschätzen und sie in Beziehung zu den Verbesserungsbeträgen setzen.

So werden Hinweise auf die Ursachen von Abweichungen aus der Differenz zwischen erwarteten Korrelationen (aus der Netzgeometrie) und vorhandenen Korrelationen (in der Stichprobe) gewonnen.

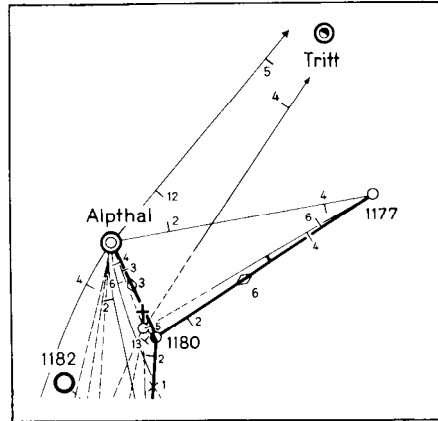


Fig. 1: Graphische Darstellung der Verbesserungen

Diese einfachen Hilfsmittel werden hier besonders erwähnt, um hervorzuheben, dass die Berücksichtigung der Korrelationen unter den Verbesserungen durch einen multivariaten Test ein echtes Bedürfnis der Praxis darstellt.

19.4.3 Die Hauptachsentransformation

Man betrachte als erstes den Verbesserungsvektor als mehrdimensional normalverteilte stochastische Variable \mathbf{V} mit

$$\mathbf{V}^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

und mit Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ (positiv definit oder semidefinit, aber in der Regel nicht diagonal) und dann den Vektor \mathbf{W} mit

$$\mathbf{W}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

berechnet aus \mathbf{V} durch die lineare Transformation

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}^T \mathbf{V},$$

wo \mathbf{U} eine orthogonale Matrix ist.

Die Varianz-Kovarianzmatrix von \mathbf{W} ist dann

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} = \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \mathbf{U}$$

und $\mathbf{E}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$

Dem Hauptachsentheorem [Schwarz, Rutishauser, Stiefel 1972] ist zu entnehmen:

Zu jeder symmetrischen Matrix \mathbf{M} existiert eine orthogonale Matrix \mathbf{U} , so dass \mathbf{M} mittels \mathbf{U} ähnlich auf Diagonalgestalt $\mathbf{D} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ transformiert wird. Dazu gilt: - die Diagonalelemente von \mathbf{D} sind gleich den Eigenwerten von \mathbf{M}

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- die Zeilen von \mathbf{U}^T enthalten die Eigenvektoren zu den Eigenwerten, welche entsprechend geordnet sind wie die Eigenwerte der Diagonalen von \mathbf{D}
- wenn die Matrix \mathbf{M} Rang r besitzt, dann gibt es r Eigenwerte $\neq 0$.

Das Theorem kann jetzt bei der oben definierten Matrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ angewandt werden:

Es existiert immer eine orthogonale Matrix \mathbf{U} , so dass

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} = \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \mathbf{U}$$

eine Diagonalmatrix wird. Die Diagonalelemente von $\mathbf{Q}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}$ sind die Eigenwerte von $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ und gleichzeitig die Varianzen der einzelnen Komponenten von \mathbf{W} , welche unter sich unkorreliert sind. Wenn f der Freiheitsgrad und n die Anzahl Beobachtungen des geodätischen Netzes sind, besitzt die $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ -Matrix Rang f , und es gibt $n-f$ Eigenwerte von $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$, die Null sind, d. h. $n-f$ Komponenten des Vektors $\mathbf{W}(\mathbf{V})$ haben Varianz = 0. Die entsprechenden Eigenvektoren stellen daher funktionale Beziehungen des Modells dar. Die anderen f Komponenten von \mathbf{W} sind hingegen echte stochastische Variablen mit Varianz gleich dem entsprechenden Eigenwert (λ_i) , und die Komponenten der Eigenvektoren sind die Koeffizienten von f orthogonalen und daher linear unabhängigen Bedingungsgleichungen des geodätischen Netzes.

Die Erwartungswerte der Komponenten des Vektors \mathbf{W} sind alle Null, da

$$\mathbf{E}(\mathbf{W}) = \mathbf{E}(\mathbf{U}^T \mathbf{V}) = \mathbf{U}^T \mathbf{E}(\mathbf{V}) \text{ und}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \text{ sind.}$$

Eine weitere Eigenschaft der Komponenten des Vektors \mathbf{W} ist ihre Normalverteilung, da die Verbesserungen lineare Funktionen der normalverteilten Beobachtungen und die Komponenten von \mathbf{W} lineare Funktionen der Verbesserungen sind. Die stochastischen Eigenschaften des Vektors \mathbf{W} sind also bestimmt, so dass die Komponenten von \mathbf{W} als Teststatistiken in einem Modelltest verwendet werden können.

19.4.4 Der Hauptkomponententest

Nach Ausführung der Hauptachsentransformation z. B. mit dem Jacobi-Verfahren [Schwarz, Rutishauser, Stiefel 1972] sind die linearen Funktionen (kanonische Vektoren) bekannt, welche in der Matrix \mathbf{U} aufgezeigt werden, so dass es möglich wird, die \mathbf{f} Komponenten (Hauptkomponenten) des Vektors \mathbf{W} , für welche $\lambda_i \neq 0$ ist, zu berechnen und zu analysieren (Hauptkomponentenanalyse). Insbesondere können die Komponenten mit der Normalverteilung auf signifikante Abweichungen von **Null** geprüft werden (Hauptkomponententest) .

Praktisch wird der Vektor \mathbf{S} mit den folgenden Komponenten gebildet:

$$s_i = \mathbf{w}_i / \sqrt{\lambda_i}$$

mit $\mathbf{i} = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$ wenn $\lambda_i \neq 0$,

die eine zentrische und standardisierte Normalverteilung besitzen und stochastisch unabhängig sind. Ihr Wert wird mit der vorgewählten Wahrscheinlichkeitsschranke der Normalverteilung verglichen. Je nach Ergebnis kann die Nullhypothese für einen Modellfehler angenommen oder verworfen werden.

19.4.5 Anwendungen in der Geodäsie

Die Hauptkomponentenanalyse als bewährte Methode der analytischen Statistik ist sicher den meisten Geodäten bekannt. Die mathematischen Grundlagen dazu findet man praktisch in jedem Lehrbuch der linearen Algebra, und sie bieten sicher keine Schwierigkeiten.

Trotzdem wird die Hauptkomponentenanalyse zur Lösung praktischer Aufgaben in der Geodäsie wenig eingesetzt. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Verfahren von H. Pelzer zur Untersuchung der Ergebnisse von Deformationsmessungen. Die Differenzen zwischen den \mathbf{u} Koordinaten, die in zwei verschiedenen Zeiträumen bestimmt wurden, bilden einen \mathbf{n} -dimensionalen Vektor, der für die Nullhypothese den Erwartungswert **Null** besitzt. Seine Varianz-Kovarianzmatrix ist in der Regel vollbesetzt, so dass die Hauptkomponentenanalyse sich ausgezeichnet für die Durchführung eines Tests zur Überprüfung der Nullhypothese für die Deformation eignet [Pelzer 1976], [Dupraz, Niemeier 1979].

19.4.6 Die Nichteindeutigkeit der Lösung

Jede symmetrische Matrix \mathbf{M} der Ordnung n besitzt n reelle Eigenwerte. Sie sind als Nullstellen des charakteristischen Polynoms (vom echten Grad n) der Matrix \mathbf{M} eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit gilt nicht für die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{M} , welche ebenfalls für den Hauptkomponententest interessieren. Die Nichteindeutigkeit der Eigenvektoren ist aber kein Hindernis bei der Durchführung des Tests. Da das vorgeschlagene Jacobi-Verfahren immer eine Lösung liefert, in welcher die Eigenvektoren ein orthonormiertes System bilden, sind alle Voraussetzungen für die Anwendung gegeben, und ein Testvektor \mathbf{S} mit standardisierten und statistisch unabhängigen Komponenten kann somit immer hergeleitet werden.

Für weitere Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen, z. B. [Schwarz, Rutishauser, Stiefel, 1972].

19.4.7 Rechenbeispiele

Einfaches Dreieck (Fig. 2)

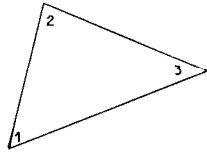
Winkel	Messwert (Gon)	Verb. (cc)
1	61.6305	-3.3
2	90.3665	-3.3
3	48.0040	-3.3
mittlere Fehler a priori der Beobachtungen = 5cc		
		

Fig. 2: Ein einfaches Dreiecksnetz

Für die Ausgleichung wird $\sigma = 1$ in allen Beispielen gesetzt, so dass die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen \mathbf{Q}_{vv} auch die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen ist.

Die Matrix \mathbf{Q}_{vv} ist:

$$\begin{array}{ccc} 8.3333 & 8.3333 & 8.3333 \\ 8.3333 & 8.3333 & 8.3333 \\ 8.3333 & 8.3333 & 8.3333 \end{array}$$

Mit dem Jacobi-Verfahren können Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet werden.

Die transponierte Matrix \mathbf{U}^T der Eigenvektoren lautet:

$$\begin{array}{ccc} 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 \\ 0.5774 & 0.5774 & 0.5774 \\ -0.4082 & -0.4082 & 0.8165 \end{array}$$

und die dazugehörigen Eigenwerte sind $(0, 25.0, 0)$. Da der erste und der letzte Eigenwert gleich Null sind, stellen die entsprechenden Eigenvektoren funktionale Beziehungen zwischen den Verbesserungen im Modell dar und ergeben daher keine Zufallsvariablen. Der zweite Eigenvektor führt hingegen zur zentrischen normalverteilten Zufallsvariablen $\mathbf{w}_2 = \mathbf{U}_2^T \mathbf{V} = -5.77$, welche die Standardabweichung $\sigma_w = \sqrt{\lambda_2} = 5$ besitzt. Daraus kann der einzige S-Wert berechnet werden:

$$\mathbf{s}_2 = -1.15$$

Ein eindimensionaler Test der normalverteilten und standardisierten Grösse \mathbf{s}_2 mit $\alpha = 5\%$ führt zur Annahme des mathematischen Modells.

Dem Leser ist sicher nicht entgangen, dass die Testfunktion nichts anderes ist als die Winkelbedingungsgleichung des Dreiecks.

Das kombinierte Netz

Während die erste Berechnung gezeigt hat, dass einfache Resultate auch durch komplizierte Methoden erreicht werden können, beschreibt das folgende Beispiel (Fig. 3) eine Anwendung, die mit einfacheren Mitteln nicht ohne weiteres möglich wäre.

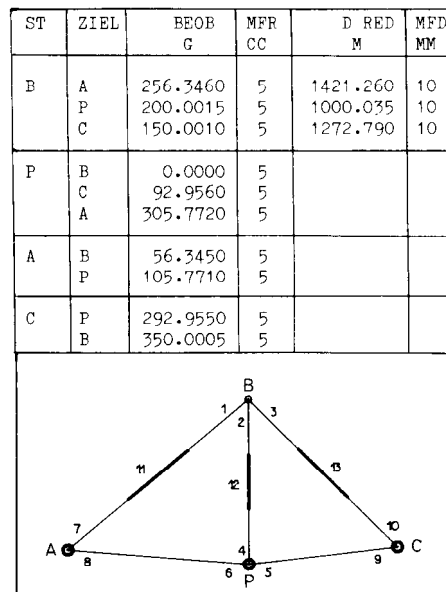


Fig. 3: Ein kombiniertes Netz

Aufgrund der Beobachtungen können die Ausgleichung und die folgenden signifikanten **S**-Werte berechnet werden.

	$U^T V$	S -Werte
1)	- 4.36430	- 0.87286
2)	- 1.69706	- 0.33941
3)	2.05144	- 0.41029
4)	- 7.66923	- 1.53385
5)	2.39527	0.28337
6)	- 28.69758	- 2.86976
7)	- 9.08785	- 1.19956

Der eindimensionale Test der Grösse $s_6 = -2.87$, welche standardisiert und zentrisch normalverteilt sein sollte, führt für $\alpha = 5\%$ zur Verwerfung des mathematischen Modells, da der Annahmebereich zwischen -1.96 und 1.96 liegt.

Das Verwerfen des Modells ist in diesem Spezialfall bestimmt berechtigt, da die zwölfte Beobachtung (Distanz **B-P**) absichtlich vor der Berechnung um **25 mm** verfälscht wurde.

Nach der Verwerfung des Modells wird man versuchen, den groben Fehler möglichst genau zu lokalisieren. Zwei denkbare Verfahren diesbezüglich sind in den folgenden Kapiteln beschrieben.

19.5 Der NMAX-Test

19.5.1 Die Teststatistik

In den bisherigen Beispielen wurden die einzelnen Komponenten \mathbf{s}_i des Testvektors, die aus der Hauptachsentransformation stammten, nur in eindimensionalen Tests verwendet, was auch mit beliebigen geometrischen Bedingungsgleichungen möglich wäre.

Man hat bis anhin die statistische Unabhängigkeit der Testvariablen \mathbf{s}_i noch nicht ausgenutzt. Gerade diese Eigenschaft erlaubt aber das Durchführen eines globalen Tests.

Es ist in der Tat leicht, eine Wahrscheinlichkeit w für das Ereignis zu berechnen, dass die Absolutbeträge aller Komponenten \mathbf{s}_i einer Realisierung des Testvektors \mathbf{S} kleiner als eine festgelegte Schranke k sind. Das heisst

$$w = P(\text{alle } |s_i| \leq k) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Da die Komponenten \mathbf{s}_i stochastisch unabhängig sind, ist dann

$$w = P(|s_1| \leq k) \cdot P(|s_2| \leq k) \\ \dots P(|s_n| \leq k).$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind der eindimensionalen Normalverteilungsfunktion zu entnehmen. Die inverse Berechnung ist ebenfalls leicht durchführbar: ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben, kann die Schranke $k(\alpha)$ berechnet werden, für welche

$$P(\text{alle } |s_i| \leq k(\alpha)) = 1 - \alpha \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ist. Aufgrund des so berechneten Signifikanzintervalls kann ein mehrdimensionaler Test unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller Komponenten der Testvariablen durchgeführt werden.

Wenn man unter den Komponenten des Testvektors \mathbf{S} die betragsgrösste Komponente \mathbf{s}_{\max} betrachtet, ist sofort ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit

$$w = P(\text{alle } |s_i| \leq k) = P(|s_{\max}| \leq k)$$

ist. Daher kann man die vorherigen Ausführungen vereinfachen, indem man die neue Testvariable \mathbf{s}_{\max} verwendet mit dem Vorteil, dass der mehrdimensionale Test auf einen

eindimensionalen zurückgeführt wird. Zur Beurteilung der statistischen Eigenschaften der Zufallsvariablen s_{\max} steht die Theorie der Ordnungsstatistiken zur Verfügung. Man konsultiere Kap. 16 oder [David 1980], [Bachmann 1973].

19.5.2 Die NMAX-Verteilung

Die Testvariable s_{\max} stammt also aus einer Reihe stochastisch unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen (die Komponenten des S -Vektors) mit bekanntem Erwartungswert (**Null**) und bekannter Varianz (1); sie ist als die betragsgrösste unter den Komponenten definiert. Ihre Verteilungsfunktion (Fig. 4) wird **NMAX**-Verteilung genannt und ist in [Carosio 1983] berechnet und tabelliert. In der gleichen Veröffentlichung ist ein möglicher Rechenablauf mit dem entsprechenden FORTRAN-Programm für die numerische Lösung beschrieben.

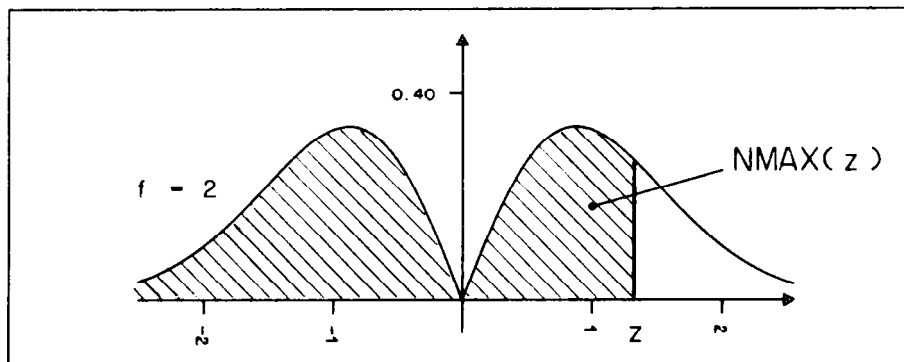


Fig. 4: Die Wahrscheinlichkeitsdichte der NMAX-Verteilung für $f=2$

19.5.3 Rechenbeispiele

Die folgenden Berechnungen zeigen, wie der **NMAX**-Test durchgeführt werden kann. Besonders wichtig ist dabei der Vergleich mit dem bekannten **F**-Test, wobei die verschiedenen Empfindlichkeitseigenschaften ersichtlich werden.

Das mehrfache Dreiecksnetz

Ein Netz mit drei Dreiecken (Fig. 5) kann untersucht werden. Die Berechnung ergibt:

$$s_{\max}(=s_1) = -1.15.$$

Winkel	Messwert (Gon)	Verb. (cc)
1	61.6305	-3.3
2	90.3665	-3.3
3	48.0040	-3.3
4	70.5015	1.7
5	80.3065	1.7
6	49.1915	1.7
7	65.2015	-1.7
8	55.2050	-1.7
9	79.5940	-1.7

mittlere Fehler a priori
der Beobachtungen = 5cc

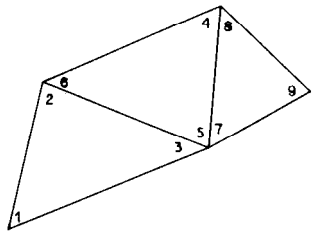


Fig. 5: Ein mehrfaches Dreiecksnetz

Da die Verteilung der dazugehörigen Testvariablen s_{\max} bekannt ist, kann die erhaltene Realisierung als Prüfgrösse eingesetzt werden. Der Test mit der NMAX-Verteilung für die Wahrscheinlichkeitsschranke $\alpha = 5\%$ führt zur Annahme des Modells im globalen Test. Der Annahmehereich ist $(-2.4, +2.4)$.

Der F-Test führt mit $F = 0.67$ ebenfalls zur Annahme des Modells, da aus der F-Verteilung die Annahmeschranke für $F_{3,\infty}$ für $\alpha = 5\%$ bei $F_{GR} = 2.6$ liegt. Falls im Netz eine Beobachtung des ersten Dreiecks um $25cc$ verfälscht wird, erhält man

$$v_1 = v_2 = v_3 = 11.66 \text{ und } \hat{\sigma} = 2.38, \text{ da } \sigma = 1 \text{ ist, sind}$$

$$F = \hat{\sigma}^2 / \sigma^2 = 5.66 \text{ und}$$

$$s_{\max} = 4.04.$$

Beide Testgrössen führen richtigerweise zur Verwerfung des Modells.

Wenn das Netz noch einmal erweitert wird, bis es 30 unabhängige Dreiecke umfasst (einfachheitshalber werden hier die gleichen Beobachtungen zehnmal wiederholt), ergibt diese Variante ohne grobe Fehler:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{0.82} \\ \mathbf{s_{max}} &= \mathbf{1.15} . \end{aligned}$$

Falls eine Beobachtung im ersten Dreieck um 25^{cc} verfälscht wird, ist

$$\mathbf{F^*} = \mathbf{0.86}$$

Das Modell wird hier mit einem **F**-Test trotzdem angenommen. Hingegen führt der Test der standardisierten Bedingungen zu

$$\mathbf{s_{max}} = \mathbf{4.04} .$$

Das Modell wird eindeutig verworfen (Annahmebereich zwischen -3.15 und $+3.15$).

Das kombinierte Netz

Das kombinierte Netz in 19.4.7 kann ebenfalls untersucht werden. In diesem Beispiel ist

$$\mathbf{s_{max}} = \mathbf{2.87} .$$

Das Modell wird mit dem **NMAX**-Test (Irrtumswahrscheinlichkeit = **5%**) verworfen, da der Annahmebereich (-2.68 + $+2.68$) ist. Der **F**-Test hingegen hätte mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{1.87}$$

zur Annahme des Modells geführt, da die Verwerfungsschranke für die gleiche Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ bei **2.01** liegt. In diesem Spezialfall ist eine Verwerfung erwünscht, da eine Messung absichtlich verfälscht wurde.

19.5.4 Wichtige Eigenschaften des Tests

Die Beispiele zeigen deutlich, dass mit zunehmender Netzgrösse die Empfindlichkeit des NMAX-Tests gegenüber derjenigen des F-Tests immer grösser wird. Der Grund dafür liegt in der Eigenart der Hauptkomponentenanalyse, die die lokalen geometrischen Eigenschaften besser berücksichtigen kann. Die einzelnen Komponenten des Testvektors sind in der Regel nur von wenigen Beobachtungen abhängig. Das bedeutet, dass sie sich auf bestimmte Netzteile beziehen und daher empfindlich reagieren, wenn im eigenen Bereich ein grober Fehler vorkommt.

19.5.5 Geometrische Bedeutung des NMAX-Tests

Für den Test wird der f -dimensionale Vektor \mathbf{S} gebildet mit stochastisch unabhängigen Komponenten, die normalverteilt sind und alle Erwartungswert = $\mathbf{0}$ und Varianz = $\mathbf{1}$ aufweisen. Nach der Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit wird die Signifikanzgrenze \mathbf{SGR} des Tests der Tabelle der NMAX-Verteilung entnommen.

Wenn

$$s_i \leq s_{GR} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, f$$

ist, wird das mathematische Modell angenommen. Wenn hingegen eine einzige Komponente

$$s_i > s_{GR}$$

ist, dann wird das Modell verworfen. Für den Fall eines Systems mit Freiheitsgrad $\mathbf{2}$ ($f = 2$) ist der Testvektor \mathbf{S} zweidimensional und kann daher in einer Ebene dargestellt werden.

Der Annahmebereich ist dann ein Quadrat mit Seitenlängen $2 \cdot s_{GR}$ (Fig. 6).

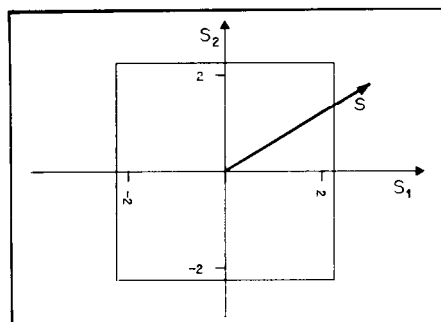


Fig. 6: Annahmebereich für den NMAX-Test

Eine ähnliche Überlegung kann ebenfalls für höhere Freiheitsgrade angestellt werden. Für $f = 3$ wird der Annahmebereich ein Würfel. Für noch grössere f spricht man von Hyperwürfeln im f -dimensionalen Raum.

Selbstverständlich kann mit dem Testvektor \mathbf{S} ebenfalls ein Chi-Quadrat-Test (oder ein gleichwertiger F -Test) durchgeführt werden, indem die Grösse

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 + \dots + \mathbf{s}_f^2$$

gebildet wird. Aus der Chi-Quadrat Verteilung wird \mathbf{x}_{GR}^2 für die Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, und wenn

$$\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 + \dots + \mathbf{s}_f^2 \leq \mathbf{x}_{GR}^2$$

ist, wird das Modell angenommen.

Der Fall mit $f = 2$ kann in der Ebene graphisch dargestellt werden. Der Annahmebereich ist ein Kreis mit Radius \mathbf{x}_{GR} . Im dreidimensionalen Fall ist der Bereich eine Kugel, während man für höhere Freiheitsgrade dann von Hyperkugeln spricht.

Man kann als Beispiel die Annahmebereiche des **NMAX**-Tests (Hyperwürfel) und des Chi-Quadrat-Tests (Hyperkugel) bei einem Freiheitsgrad $f = 100$ und für $\alpha = 5\%$ vergleichen. Aus den Tabellen der **NMAX**- bzw. der Chi-Quadrat-Verteilung erhält man darauf für $f = 100$ und $\alpha = 5\%$ die folgenden Werte:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{SGR} & = 3.50 & \text{(halbe Quadratseite)} \\ \mathbf{XGR} & = 11.15 & \text{(Kreisradius).} \end{array}$$

Daraus folgt, dass Modellfehler, die sich nur auf wenige Komponenten von \mathbf{S} auswirken, besser mit dem **NMAX**-Test festgestellt werden können als mit dem Chi-Quadrat-Test.

Die groben Fehler haben in guten Netzen eine lokal begrenzte Wirkung und beeinflussen in der Regel nur einen kleinen Teil der Komponenten von \mathbf{S} , so dass sich die Hauptkomponentenanalyse für ihre Aufdeckung besser eignet.

19.5.6 Die Lokalisierung der groben Fehler

Die bisherigen Ausführungen befassten sich ausschliesslich mit der Frage:

- Ist ein grober Fehler vorhanden?

Absichtlich wurde die für die Praxis ebenso wichtige Fragestellung:

- Welche Beobachtung ist falsch?

nicht gleichzeitig behandelt.

Diese Trennung der beiden Probleme hat sich in der Geodäsie allgemein durchgesetzt, da mit Hilfe der mathematischen Statistik nur eine Antwort auf die erste Frage gegeben werden kann. Die zur Verfügung stehenden statistischen Tests bieten nur zwei mögliche Antworten: Modell angenommen oder verworfen, grober Fehler vorhanden oder nicht (selbstverständlich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit).

Die Hauptkomponentenanalyse führt zu einem Test für das gesamte Modell, liefert aber ebenfalls Angaben zur Lokalisierung der tatsächlich falschen Beobachtungen. Wenn der Test zu einer Modellverwerfung geführt hat, kann man den linearen Testfunktionen (Eigenvektoren) einige Angaben zur Abgrenzung der Netzteile entnehmen, in welchen ein grober Fehler vermutet werden kann.

Die einzelnen Komponenten des f -dimensionalen Testvektors \mathbf{S} sind lineare Funktionen der Verbesserungen, das heisst:

$$s_i = z_{i1} \cdot v_1 + z_{i2} \cdot v_2 + \dots + z_{in} \cdot v_n.$$

wobei die z_{ij} die Komponenten des i -ten Eigenvektors nach Teilung durch $\sqrt{\lambda_i}$ (Wurzel des dazugehörigen Eigenwerts) sind.

In Matrizenform kann das Gleichungssystem folgendermassen geschrieben werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}^T \mathbf{V}.$$

Die Verbesserungen der Ausgleichung sind ihrerseits lineare Funktionen der Beobachtungen, nämlich

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q}_{VV} \mathbf{P} \mathbf{L}.$$

($\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ ist die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen, \mathbf{P} die Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen und \mathbf{L} der Beobachtungsvektor), so dass auch \mathbf{S} eine lineare Funktion der Beobachtungen ist:

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^T \mathbf{L}, \text{ wenn } \mathbf{G}^T = -\mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \mathbf{P} \text{ ist.}$$

Falls der NMAX-Test zur Verwerfung des mathematischen Modells geführt hat, kann die i -te Zeile von \mathbf{G}^T betrachtet werden, die die betragsgrösste Komponente \mathbf{s}_i des Testvektors gebildet hat:

$$\mathbf{s}_{\max} = \mathbf{s}_i = \mathbf{g}_{i1} \mathbf{l}_1 + \mathbf{g}_{i2} \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{g}_{in} \mathbf{l}_n$$

Da ausschliesslich die Beobachtungen, für welche der Koeffizient $\mathbf{g}_{ij} \neq 0$ ist, einen Beitrag zur Bildung von \mathbf{s}_i geliefert haben, ist der grobe Fehler vor allem unter diesen Beobachtungen zu suchen. Der Betrag des Koeffizienten \mathbf{g}_{ij} ist auch von Bedeutung, da er den Einfluss der einzelnen Beobachtungen und daher des groben Fehlers auf die entsprechende Komponente von \mathbf{S} bestimmt. Es ist deshalb zu vermuten, dass sich ein allfälliger grober Fehler der j -ten Beobachtung in der Komponente \mathbf{s}_i des Testvektors auswirkt, für welchen \mathbf{g}_{ij} einen grossen Absolutbetrag aufweist.

Als Beispiel dafür kann das kombinierte Netz dienen. Das mathematische Modell wird mit dem NMAX-Test verworfen, da die 6. Komponente von \mathbf{S} im Betrag grösser ist als die Verwerfungsschranke.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_6 &= -2.86 \\ \mathbf{s}_{GR} &= 2.68 \end{aligned}$$

In der Matrix \mathbf{G}^T , die die lineare Beziehung zwischen den Beobachtungen \mathbf{L} und dem Testvektor \mathbf{S} darstellt, kann man in der sechsten Zeile die Koeffizienten der linearen Funktion erkennen, die zur stark abweichenden Komponente \mathbf{s}_6 und daher zur Verwerfung des Modells geführt haben.

$$\mathbf{s}_6 = -0.0491_{11} + 0.00691_{12} - 0.0541_{13}$$

\mathbf{s}_6 ist nur Funktion der drei gemessenen Distanzen (Beobachtungen **11**, **12**, **13**) und dabei weist die zweite Distanz (Beobachtung 12) den betragsgrössten Koeffizienten auf und sollte daher als erste untersucht werden. Die beiden anderen Distanzen haben Koeffizienten, die nicht wesentlich kleiner sind, so dass sie ebenfalls als mögliche Fehlerursache in Frage kommen.

Im erwähnten Beispiel erweist sich gerade diese Überlegung als richtig, da die zweite Distanz absichtlich um **25 mm** verfälscht wurde.

Ein weiteres Verfahren, die Methode der extremen **S**-Komponente, kann mit Hilfe von einer Folge von Orthogonalrotationen der Matrix \mathbf{G}^T aufgebaut werden und erlaubt möglicherweise eine noch bessere Lokalisierung der groben Fehler. Es wird hier auf die Literatur hingewiesen [Carosio 1983].

19.6 Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme (Verfahren a priori)

19.6.1 Allgemeines

Im vorherigen Kapitel wurden die Verfahren behandelt, die nach Ausführung der Messungen eine Interpretation der Ergebnisse erlauben. Die Planung der Messanordnung und die vorgängige Beurteilung der zu erwartenden Eigenschaften der Resultate sind ebenfalls sehr wichtig und bilden das Thema der folgenden Abschnitte.

Die erste Phase der geodätischen Arbeit in der Praxis befasst sich mit der Festlegung der Anforderungen an das Vermessungswerk. Diese Anforderungen bilden die übergeordneten Randbedingungen, die in jedem Fall erfüllt werden müssen. Diese Phase bildet die Voraussetzung für die Planung der Messanordnung, für die Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeiten der statistischen Tests sowie für die Wahl der Messinstrumente und der Berechnungsmethoden.

In einer zweiten Phase wird versucht, eine geodätische Messanordnung zu entwerfen und die geeigneten Berechnungsmethoden zu wählen, welche die festgesetzten Randbedingungen erfüllen und mit dem kleinstmöglichen Aufwand und den verfügbaren Mitteln realisiert werden können. In der Praxis geht man heute noch nach dem klassischen Verfahren vor:

- Nach allgemeinen Grundregeln und vor allem aufgrund von Intuition und Erfahrung des Vermessungsingenieurs werden verschiedene geodätische Netze entworfen.
- Die Varianten werden verglichen, der Aufwand wird geschätzt und die Einhaltung der übergeordneten Randbedingungen kontrolliert.

Das Vorgehen kann iterativ wiederholt werden, bis man eine befriedigende Lösung für die gestellte Aufgabe gefunden hat. Erst dann kann mit den Messungen begonnen werden.

Die erste Eigenschaft der entworfenen Messanordnungen, die überprüft werden muss, ist die Realisierbarkeit, d.h. die vorgesehenen Beobachtungen sollen im Feld gemessen werden können; ebenfalls müssen die Genauigkeitsanforderungen eingehalten werden. Dies kann mit der Berechnung der Fehlerellipsen a priori und eventuell der relativen Fehlerellipsen überprüft werden.

In der letzten Zeit wird dem Einfluss von möglichen Modellfehlern, z. B. von groben Fehlern, auf die Resultate immer mehr Beachtung geschenkt. Gerade diesem Problem sind die folgenden Kapitel gewidmet. Die Zusammenhänge zwischen statistischen Tests und Zuverlässigkeit werden eingehend untersucht und dargestellt.

Unter den unzähligen denkbaren Modellfehlern gilt der Einfluss von groben Messfehlern bei der Realisierung der Beobachtungen als Grundlage aller folgenden Betrachtungen. Die meisten Verfahren eignen sich jedoch ebenfalls zur Untersuchung der Wirkung und der Entdeckung anderer Modellfehler. Die entsprechenden Herleitungen müssten unter Berücksichtigung der entsprechenden Fehlerhypothese (Alternativhypothese) wiederholt werden.

19.6.2 Der Begriff Zuverlässigkeit

Es ist allgemein bekannt, dass in einem geodätischen Netz Massnahmen getroffen werden müssen, um zu vermeiden, dass grobe Messfehler unbemerkt bleiben und die gesuchten Resultate verfälschen. Die Grundlagen der Zuverlässigkeitstheorie sind in Kap. 11 beschrieben.

In der klassischen Vermessung schreibt man vor, immer ein redundantes Messsystem vorzusehen, um eine genügende Kontrolle zu ermöglichen.

Erst Ende der sechziger Jahre wurde in der Geodäsie das Problem der Zuverlässigkeit mit Hilfe der mathematischen Statistik streng formuliert und quantitativ gelöst [Baarda 1968].

Für die korrekte Entwicklung und das Verstehen der Theorie ist eine klare und eindeutige Festlegung der Begriffe unerlässlich. Die Definition (Kap. 1) wird daher hier wiederholt.

Gegeben seien:

- das geodätische Netz mit dem funktionalen und dem stochastischen Modell
- der grösste Fehler $\Delta_{i\max}$ jeder Beobachtung (bzw. Unbekannten), welcher die Anforderungen an das Vermessungswerk noch nicht in Frage stellt, und die Wahrscheinlichkeit β , die man als noch zumutbares Risiko betrachtet, falls ein grober Fehler $\Delta_{i\max}$ nicht entdeckt wird
- das gewählte statistische Testverfahren $\mathbf{T}(\alpha)$, mit welchem man das Modell nach den Messungen prüfen wird, und die entsprechende Wahrscheinlichkeit α für die irrtümliche Verwerfung des Modells.

Daraufhin nennt man das Messsystem im Hinblick auf allfällige grobe Fehler zuverlässig, wenn für $i = 1, 2, \dots, n$ ein verborgener Fehler $\Delta_{i\max}$ der i -ten Beobachtung (bzw. Unbekannte) bei der Durchführung des Tests $\mathbf{T}(\alpha)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt wird.

Falls der Fehler $\Delta_{i\max}$ sich auf die unbekannt Parameter der Ausgleichung (z. B. Koordinaten) bezieht, spricht man von äusserer Zuverlässigkeit. Falls $\Delta_{i\max}$ als Fehler einer Beobachtung betrachtet wird, wird hingegen von innerer Zuverlässigkeit gesprochen [Baarda 1968].

Gleichwertig ist die Definition, welche die Zuverlässigkeit in Beziehung mit den Grenzfehlern ∇_i setzt, die gerade noch mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt werden können. Die Zuverlässigkeitsbedingung ist dann:

$$\nabla_i \leq \nabla_{i\max} .$$

Mit der Definition der Zuverlässigkeit des Messsystems stellt sich sofort die Frage nach der Systemabgrenzung. Was gehört zum Messsystem? Das heisst, was ist Objekt der Zuverlässigkeit? Die Antwort ist der Definition zu entnehmen:

- das geodätische Netz mit den Modelleigenschaften
- die Fehlerhypothese (Alternativhypothese) mit den Anforderungen an das Vermessungswerk und
- das gewählte statistische Testverfahren.

Beim praktischen Gebrauch wird meist lediglich von der Zuverlässigkeit des geodätischen Netzes gesprochen, und es ist daher nicht verwunderlich, dass man oft glaubt, es handle sich dabei um eine Eigenschaft der reinen Netzgeometrie.

Nur selten wird die direkte Abhängigkeit der Zuverlässigkeit vom gewählten statistischen Testverfahren erwähnt. Bemerkungen diesbezüglich finden sich z. B. etwas implizit im Vorwort von [Baarda 1968] und deutlicher in [Heck 1980].

Wichtig für die folgenden Betrachtungen ist die Bemerkung, dass eine positivere Bewertung der Zuverlässigkeit eines Messsystems erzielt werden kann:

- durch Verbesserung der Netzgeometrie oder
- durch bescheidenere Anforderungen an das Vermessungswerk oder
- durch die Wahl eines empfindlicheren statistischen Testverfahrens.

Die dritte Feststellung ist hier von besonderer Bedeutung, wenn man sie in Zusammenhang mit dem vorgeschlagenen **NMAX**-Test betrachtet. Der **NMAX**-Test weist gegenüber den herkömmlichen Verfahren eine grössere Empfindlichkeit in der Entdeckung der lokalen Modellfehler auf, so dass er einen Beitrag zur Verbesserung der Zuverlässigkeit der Messsysteme leisten kann.

19.6.3 Aktuelle Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse

Seit Ende der 60er Jahre werden in der Praxis Verfahren eingesetzt, um die Zuverlässigkeit einer geodätischen Arbeit zu analysieren. Dies findet in der Planungsphase statt und wird nach Abschluss der Arbeit wiederholt, um das Ergebnis auch a posteriori zu bestätigen.

Das Verfahren von W. Baarda [Baarda 1968], basierend auf dem F-Test (Testvariable $F = s_0^2 / \sigma_0^2$) ist eine bekannte Lösung.

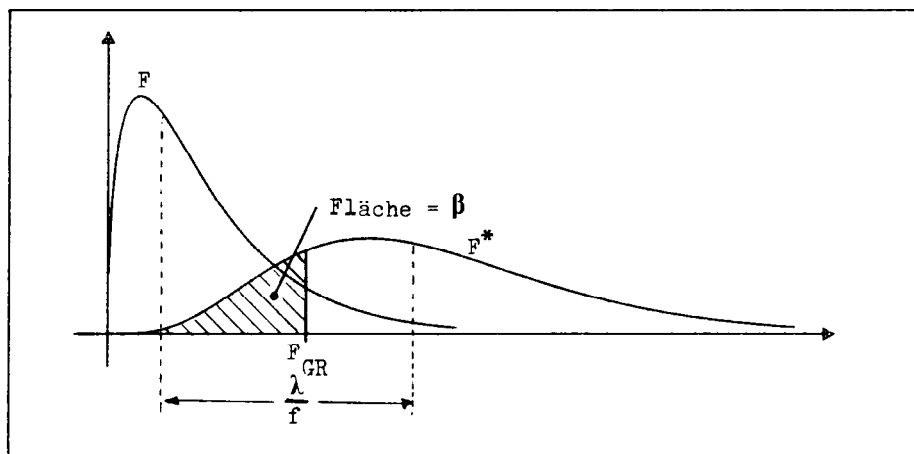


Fig. 7: Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik F bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell

Diese Methode wurde mit anderen Verfahren vervollständigt, die sich auf wirksamere Tests wie derjenige der standardisierten Verbesserungen stützen. Die Wahl des Testverfahrens (siehe Kap. 11) beeinflusst die Zuverlässigkeit einer geodätischen Arbeit.

19.7 NMAX-Test und Zuverlässigkeit

19.7.1 Einführung

In der Beschreibung der Beurteilungsverfahren aufgrund der durchgeführten Messungen wurde darauf verwiesen, dass die Hauptkomponentenanalyse und der NMAX-Test sehr geeignete Prüfverfahren sind, da sie einerseits die lokale Wirkung von eventuellen groben Fehlern berücksichtigen und andererseits auch einen Gesamttest ermöglichen.

Selbstverständlich kann man sich jetzt fragen, ob die Zuverlässigkeit des Messsystems streng berechnet werden kann, wenn die zum System gehörenden Testverfahren die Hauptkomponentenanalyse oder der gleichwertige NMAX-Test sind.

19.7.2 Die Lösung

In 4.3 und 4.4 wurden die Hauptkomponenten des Verbesserungsvektors berechnet:

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}^T \mathbf{V}$$

(\mathbf{V} ist der Verbesserungsvektor und \mathbf{U} die Eigenvektorenmatrix der Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$.) Für die Durchführung des Tests wurden dann die Hauptkomponenten \mathbf{W} standardisiert

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{w}_1 / \sqrt{\lambda_1}, \quad \mathbf{w}_2 / \sqrt{\lambda_2}, \quad \dots \right),$$

wo die λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ sind. Die Komponenten von \mathbf{S} , für welchen $\lambda_i = 0$ ist, werden gestrichen (so dass \mathbf{S} nur f -dimensional ist). Wenn die Matrix

$$\mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{vmatrix}$$

eingeführt ist, kann die folgende Beziehung hergestellt werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{V}$$

Gemäss [Linkwitz 1960] ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}\mathbf{P}\mathbf{L}.$$

so dass

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^T\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}\mathbf{P}\mathbf{L},$$

und

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^T\mathbf{L} \text{ mit } \mathbf{G}^T = -\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^T\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}\mathbf{P}.$$

Die standardisierten Hauptkomponenten \mathbf{s}_k sind die linearen Funktionen der Beobachtungen, welche durch die Matrix $\mathbf{G}^T(\mathbf{f}, \mathbf{n})$ definiert sind.

Falls ein grober Fehler Δ_i die i -te Beobachtung verfälscht, verändern sich auch die Komponenten \mathbf{s}_k von \mathbf{S} .

Nach diesen Vorbemerkungen ist es möglich, in Anlehnung an die Herleitungen von W. Baarda die Zuverlässigkeit des Messsystems zu prüfen.

Folgendes wird vorausgesetzt:

Auf die einzelnen Testgrössen \mathbf{s}_k wirkt nur ein einziger eventueller grober Fehler, d.h. die Häufigkeit der groben Fehler ist so gering, dass im Einflussbereich jeder Beobachtung höchstens einer zu befürchten ist.

Falls die i -te Beobachtung durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht ist, ist \mathbf{s}_k weiterhin normalverteilt, aber mit Erwartungswert $\delta_k = \mathbf{g}_{ik}\Delta_i$ anstatt Null (δ_k Nichtzentralitätsparameter) (Fig. 8).

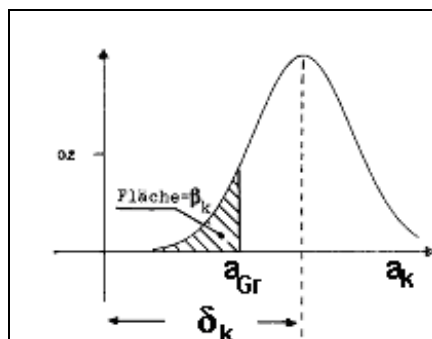


Fig. 8: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Komponente des Testvektors \mathbf{S} beim Auftreten eines groben Fehlers

Von der Annahmeschranke \mathbf{s}_{GR} des **NMAX**-Tests (siehe Testbeschreibung in 5) und von der Tabelle der Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit β_k abgelesen werden, dass trotz dem groben Fehler Δ_i die k-te Komponente von \mathbf{S}^* in den Annahmebereich fällt (Fehler 2. Art).

Die angegebenen Beziehungen erlauben es, für jede Komponente zu berechnen, wie gut die Hauptkomponentenanalyse mit der Annahmeschranke α wirkt und wie gross die Wahrscheinlichkeit (β_k) ist, dass trotz dem groben Fehler die k-te Komponente von \mathbf{S} in den Annahmebereich fällt.

Ein Fehler zweiter Art (d. h. fälschlicherweise Annahme der Nullhypothese) entsteht, wenn trotz dem groben Fehler alle Komponenten von \mathbf{S} in den Annahmebereich fallen. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\beta = \int \int \dots \int_{\text{Annahmebereich}} \mathbf{f}(\mathbf{S}) \, ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 \dots$$

wo \mathbf{f} die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte der multivariaten stochastischen Variablen \mathbf{S} ist, welche den Erwartungswert $(\mathbf{g}_{i1}, \mathbf{g}_{i2}, \mathbf{g}_{i3} \dots) \cdot \Delta_i$ aufweist.

Da die einzelnen Komponenten stochastisch unabhängig sind, kann die oben angegebene Gesamtwahrscheinlichkeit aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für jede einzelne Komponente berechnet werden

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_r$$

$$\beta = \int_{\substack{\text{Annahme-} \\ \text{bereich} \\ \text{(l-dimensional)}}} \mathbf{f}_1(\mathbf{s}_1) \, ds_1 \cdot \int_{\substack{\text{Annahme-} \\ \text{bereich} \\ \text{(l-dimensional)}}} \mathbf{f}_2(\mathbf{s}_2) \, ds_2$$

Die \mathbf{f}_k sind die eindimensionalen Normalverteilungen der einzelnen Komponenten von \mathbf{S} . Sie haben Varianz = 1 und Erwartungswert

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}_k) = \lambda_k = \mathbf{g}_{ik} \cdot \Delta_i.$$

Die Werte der einzelnen Integrale sind der Tabelle der Normalverteilung zu entnehmen.

Nachdem für jede Beobachtung der grösste noch unschädliche grobe Fehler festgelegt worden ist, kann die Wahrscheinlichkeit β berechnet werden, dass der Fehler nicht entdeckt wird (erste Zuverlässigkeitsdefinition).

In ähnlicher Art kann man festlegen, wie gross der Fehler ∇_i ist, der mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta_0)$ aufgedeckt werden kann (zweite Zuverlässigkeitsdefinition).

19.7.3 Anwendung

Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke)

Ein reines Dreiecksnetz wie in 5.3, aber mit 100 Dreiecken, kann ausgeglichen werden. Man kann dann die folgenden Zuverlässigkeitsgrössen für die einzelnen Beobachtungen berechnen.

Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test) für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 100$

Messung	σ_i	∇_i	∇_i / σ_i
1	5.0	37.4	7.5
2	5.0	37.4	7.5
3	5.0	37.4	7.5
4	5.0	37.4	7.5
5	5.0	37.4	7.5

Das gleiche Beispiel ergab bei der Berechnung der Zuverlässigkeit nach dem F-Test (siehe 9) $\nabla_i / \sigma_i = 11.0$.

19.8 Schlussfolgerung

Die vorliegende Arbeit möchte die Aufmerksamkeit der Leser auf eine einfache Feststellung lenken: Für die praktische Tätigkeit gilt selbstverständlich, dass erfahrene, geübte oder einfach bessere Geomatikingenieure die Resultate einer geodätischen Arbeit kritischer und wirksamer beurteilen und kleinere Fehler entdecken können als ungeübtere. In anderen Worten: sie erzielen zuverlässigere Resultate.

Das gleiche muss aber auch für die modernen statistischen Methoden gelten: Empfindlichere oder einfach für die Anwendung bessere statistische Tests führen zu einer wirksameren Beurteilung der Resultate geodätischer Arbeiten und erlauben die Entdeckung kleinerer Modellfehler als weniger geeignete Vergleichsmethoden.

Die Wahl des Testverfahrens beeinflusst massgebend die Grösse der feststellbaren Modellfehler, d. h. der Zuverlässigkeit, die nicht nur eine Eigenschaft der reinen Messanordnung, sondern auch der Berechnungsverfahren (Testverfahren) und der Anforderungen an das Vermessungswerk ist. Die Entwicklung von besseren Testmethoden hat immer eine Konsequenz auf die Zuverlässigkeitsbetrachtungen: Bessere Tests erhöhen die Zuverlässigkeit ohne jegliche Änderung der Messanordnung. Die vorliegende Veröffentlichung zeigt mit Hilfe der mathematischen Statistik die Zusammenhänge zwischen Test und Zuverlässigkeit einerseits und die Beziehung zwischen den intuitiven Methoden der Praktiker und den modernen der mathematischen Statistik andererseits. Der neu vorgeschlagene **NMAX**-Test ist eine mögliche Anwendung dieser Erkenntnisse und soll als Anregung gelten für vermehrte Anstrengungen im Bereich der mathematischen Beurteilungsverfahren.

Literatur

[1] H.R. Andris, 1967: ITRGA05. FORTRAN-Programm für die automatische Berechnung von Dreieckschlussfehlern. Programmbeschreibung. Vermessungsamt Baselland, Liestal.

[2] W. Baarda. 1968: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy 2/5.

[3] W.K. Bachmann, 1973: Estimation stochastique de la précision des mesures. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 4/73.

[4] A. Carosio. 1983: Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich. Nr. 35.1983.

[5] H. Chernoff. 1971: The use of faces to represent points in n-dimensional space graphically. Technical Report 71. Stanford University, Dep. of Statistics.

[6] R. Conzett 1978: Das Austausch-Verfahren bei der Berechnung geodätischer Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kulturtechnik an der Technischen Universität Hannover Nr. 83.

- [7] R. Conzett 1981: Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich (Vorlesung).
- [8] H A. David. 1981: Order Statistics. Wiley + Sons Inc New York.
- [9] H. Dupraz, W. Niemeier. 1979: Un critère pour l'analyse des réseaux géodésiques de contrôle Vermessung. Photogrammetrie, Kulturtechnik 4/79.
- [10] B. Flury und H. Riedwyl, 1980: Angewandte multivariate Statistik, Vorabdruck.
- [11] B. Flury und H. Riedwyl, 1981: Graphical representation of multivariate data by means of asymmetrical faces. Journal of the American Statistical Association, Dec. 1981. vol 76, number 376.
- [12] E. Grafarend, H. Heisler, R. Kelm, H. Kropff, B. Schaffrin. 1979: Optimierung geodätischer Messoperationen. Wichmann, Karlsruhe.
- [13] B. Heck. 1980: Statistische Ausreisserkriterien zur Kontrolle geodätischer Beobachtungen. VIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich. 24.9. -1.10.1980.
- [14] C. Just. 1979: Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Mitteilung Nr. 27.
- [15] K. Kraus, 1975: Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1/75.
- [16] K. Linkwitz. 1960: Über die Systematik verschiedener Formeln der Ausgleichsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen 5/60.
- [17] W. Maurer, 1979: Multivariate Methoden, Anwendungen und Zusammenhänge. Seminar der Internationalen biometrischen Gesellschaft, Interlaken.
- [18] H.J. Oettli 1960-1975: Formularsammlung für die Berechnung der Triangulation, Bundesamt für Landestopographie. Wabern.

[19] H. Pelzer. 1976: Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen. VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Darmstadt.

[20] H.R. Schwarz. H. Rutishauser. E. Stiefel, 1972: Matrizen-Numerik. Teubner, Stuttgart.