



Doctoral Thesis

## Equivalence of topological and scattering approaches to quantum pumping

**Author(s):**

Ortelli, Gregorio

**Publication Date:**

2009

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006072671> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH Nr. 18643

**EQUIVALENCE OF TOPOLOGICAL AND SCATTERING  
APPROACHES  
TO QUANTUM PUMPING**

ABHANDLUNG  
zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN

der

ETH ZÜRICH

vorgelegt von

GREGORIO ORTELLI

Dipl. Phys. ETH

geboren am 14. April 1981

von Mendrisio, TI

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Gian Michele Graf  
Prof. Dr. Markus Büttiker

2009

**ABSTRACT.** The subject of this dissertation is the transport of charge occurring in quantum pumps. These are compact devices, acting in the mesoscopic scale, connected to several leads, and controlled by some parameter varying periodically in time. They achieve a net transport from one lead to another at each cycle of the pump.

Different theories exist which describe quantum pumping, originating from different idealizations of the devices. In the present work we will focus on two descriptions of pumping in the adiabatic regime.

In the topological approach to quantum pumping the pump is considered from a microscopic viewpoint. It is modeled by an infinitely extended potential, with a periodic time dependence. The potential has to produce a spectral gap in the instantaneous Hamiltonian, and the Fermi energy has to lie in such a gap, at all times of the cycle. The charge transported across a reference point during a cycle is found to have integer value. The reason for this quantization is of topological nature: the charge transport is identified as the Chern number of a fiber bundle. For single-channel, space periodic potentials this is a result of Thouless. We extend this result to multi-channel potentials and to non-periodic potentials.

In the scattering approach to quantum pumping the pump is considered from a macroscopic viewpoint. It is modeled as a compact time-dependent scatterer connected to leads where the particles move freely. This approach provides a description of charge transport, expressed by a formula due to Büttiker, Thomas and Prêtre, as well as of dissipation and of entropy and noise currents in terms of static scattering data. The charge transported in a cycle is quantized in special cases only. The scattering approach to quantum pumping is naturally described in geometrical terms.

A comparison between the two approaches becomes possible after truncating the potential to a finite length, while the rest of the line gives rise to the leads. The system becomes then amenable to the scattering approach. In the limit where the length of the scatterer tends to infinity, the condition for quantization is attained and the two theories are shown to agree.

ZUSAMMENFASSUNG. Diese Dissertation behandelt Ladungstransport in Quantenpumpen, kompakten Geräten, die auf mesoskopischer Skala operieren, an mehrere Drähte angeschlossen und durch einen sich zeitlich periodisch verändernden Parameter bestimmt sind. In jedem Pumpzyklus transportieren sie Nettoladung von einem Draht zu einem anderen.

Es gibt verschiedene Theorien für die Beschreibung von Quantenpumpen, die von verschiedenen Idealisierungen des Geräts stammen. In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf zwei Theorien des Pumpens im adiabatischen Bereich.

Im topologischen Zugang wird eine Quantenpumpe vom mikroskopischen Standpunkt aus betrachtet. Sie wird durch ein unendlich ausgedehntes Potential mit periodischer Zeitabhängigkeit modelliert. Das Potential muss eine Spektrallücke im instantanen Hamiltonoperator erzeugen, und die Fermienergie muss zu allen Zeiten des Zyklus in einer solchen Lücke liegen. Die Ladung, die durch einen Referenzpunkt während eines Zyklus transportiert wird, ist dann ganzzahlig. Diese Quantisierung ist topologischer Natur: Der Ladungstransport wird mit der Chernzahl eines Faserbündels identifiziert. Thouless fand dieses Ergebnis für räumlich periodische Potentiale mit einem Kanal. Wir erweitern es für nicht-periodische Potentiale mit mehreren Kanälen.

Im Streuzugang wird die Pumpe vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet. Sie wird als ein kompaktes zeitabhängiges Streuzentrum, das mit idealen Drähten verbunden ist, modelliert. Dieser Zugang gibt eine Beschreibung des Ladungstransports durch eine Formel von Büttiker, Thomas und Prêtre, und ausserdem von Dissipation, Entropie- und Rauschströmen anhand von statischen Streudaten. Die Ladung, die in einem Zyklus transportiert wird, ist nur in Spezialfällen quantisiert. Der Streuzugang zu Quantenpumpen wird natürlicherweise in geometrischer Sprache formuliert.

Zwischen den beiden Formulierungen wird ein Vergleich möglich, sobald man das Potential auf endlicher Länge abschneidet, während die beiden restlichen Teile die Drähte darstellen. Dieses System kann man dann mit dem Streuzugang untersuchen. Im Limes von unendlich ausgedehntem Streuzentrum wird die Quantisierungsbedingung erreicht und wir zeigen, dass die beiden Theorien übereinstimmen.