Diss. ETH No. 18991

The Analysis of Extremes in Multivariate Models

A Geometric Approach

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

Natalia Nolde

M.Sc. Statistics, Simon Fraser University

born May 30, 1983

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Paul Embrechts, examiner

Dr. Guus Balkema, co-examiner

Prof. Dr. John Nolan, co-examiner

2010

Abstract

Understanding the behaviour of extreme observations in multidimensional data is of key importance in diverse fields of application, including finance and insurance, reliability and environmental sciences. There are different ways to view and analyze multivariate extremes. In our approach, the extremes are seen as those observations which lie at the edge of multivariate sample clouds. In light of this definition, densities rather than distribution functions play a prominent role in our analysis owing to their close link to the shape of the sample clouds.

The first part of the thesis centres around a class of light-tailed meta distributions. These distributions are obtained via a coordinatewise transformation of an original heavy-tailed distribution. Our primary example is the meta distribution with Gaussian marginals constructed by transforming the marginals of an elliptic t distribution. The meta distribution inherits the dependence structure of the original t distribution. It is a well known result that the extremes of a random vector with a multivariate normal density are asymptotically independent whatever the correlation. In some applications, this can be seen as a shortcoming. The procedure above suggests a remedy by allowing to embed a stronger form of dependence into the multivariate distribution while preserving light-tailed Gaussian marginals.

The notion of the limit shape of sample clouds is at the heart of the thesis. It provides a global view of multivariate data. Its boundary gives an intuitive description of the relation between extreme observations across different directions, and hence is of direct importance for risk assessment and management. Our first result shows that sample clouds from the meta distributions we consider can be scaled to converge onto a limit set, and we derive an explicit expression for the boundary of this limit set. Surprisingly, there

is no relation between the shape of the sample clouds from the original distribution and from the associated meta distribution, despite the fact that the two distributions have the same copula. We then demonstrate that for light-tailed meta distributions the asymptotic behaviour, the shape of the limit set as well as the local behaviour, is very sensitive to certain perturbations of the underlying heavy-tailed original distribution. In fact, it may change drastically even when the asymptotic behaviour of the heavy-tailed density is not affected. In the classical theory of coordinatewise extremes marginals seem to play only a subsidiary role; the theory and examples we present here cast a different light on the significance of the marginal distributions.

In a bivariate context, asymptotic independence refers to situations in which occurrence of large observations in one component of the data is unlikely to be accompanied by large observations in the other component. Such situations are encountered in various applications. The standard criteria for checking asymptotic independence are given in terms of distribution functions which are rarely available in an explicit form, especially in the multivariate case. In the second part of the thesis we formulate sufficient conditions for asymptotic independence expressed in terms of the (asymptotic) shape of the level sets of the density and the shape of the limit set of the associated sample clouds.

Kurzfassung

Das Verständnis von Extremwerten in mehrdimensionalen Daten ist von grosser Bedeutung in vielen Gebieten, unter anderem dem Finanz- und Versicherungswesen und dem Management von Ingenieurrisiken. Es existieren verschiedene Ansätze um mehrdimensionale Extremwerte zu betrachten und zu analysieren. In unserem Ansatz betrachten wir Extremwerte als Werte, die am Rand einer mehrdimensionalen Stichprobe liegen. Aufgrund der Analogie zwischen der Form einer beobachteten Punktemenge zu deren Wahrscheinlichkeitsdichte ist für uns die Wahrscheinlichkeitsdichte, im Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitsverteilung, das wesentliche Analyseobjekt.

Der erste Teil der Arbeit behandelt Meta-Verteilungen mit leichten Tails. Solche Verteilungen lassen sich durch eine koordinatenweise Transformation aus einer Verteilungsfunktion mit starken Tails erzeugen. Ein prominentes Beispiel hierfür ist eine Meta-Verteilung mit gaussverteilten Randverteilungen, welche per Transformation der Randverteilungen aus einer elliptischen t-Verteilung erzeugt wurde. In diesem Schritt erbt die Meta-Verteilung die Abhängigkeitsstruktur von der ursprünglichen t-Verteilung. Es ist bekannt, dass Zufallsvektoren deren Werte einer mehrdimensionalen Normalverteilung unterliegen asymptotisch unabhängige Komponenten besitzen. Dies gilt unabhängig davon ob deren Komponenten korreliert sind und führt zu Problemen in einigen Anwendungen. Diese Probleme können umgangen werden, indem man, die leichten Tails einer gaussischen Randverteilung beibehaltend, eine stärkere Abhängigkeit als die einer mehrdimensionalen Normalverteilung annimmt.

Das Konzept des Grenzwertumrisses einer Stichprobe stellt den Kern der Arbeit dar. Es ermöglicht eine umfassende Betrachtung mehrdimensionaler Daten. Aus dem Grenzwertumriss einer Stichprobe ergibt sich eine natürliche Möglichkeit zur Beschreibung der

Abhängigkeit von Extremwerten in unterschiedlichen Koordiantenrichtungen. Der Grenzwertumriss ist somit von direktem Nutzen für die Beurteilung und das Management von Risiken. In einem ersten Resultat zeigen wir, dass die Stichprobenpunkte der von uns behandelten Meta-Verteilungen so skaliert werden können, dass diese zu einer Grenzwertmenge konvergieren. Wir leiten einen expliziten Ausdruck her, der den Umriss dieser Grenzwertmenge beschreibt. Überraschenderweise gibt es keinen Zusammenhang zwischen den Umrissen der Stichprobenpunktmenge und der ursprünglichen Verteilung, sowie deren Meta-Verteilung. Dies gilt obwohl die beiden Verteilungen die gleiche Copula besitzen.

Im folgenden zeigen wir, dass das asymptotische Verhalten von Meta-Verteilungen mit leichten Tails sehr sensitiv auf kleine Änderungen der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion mit den starken Tails ist. Diese Sensitivität gilt sowohl für deren Grenzwertmenge, als auch das lokale Verhalten der zugeh/origen Stichprobe. Das Verhalten kann sich selbst dann verändern, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit den starken Tails unverändert bleibt. Im Gegensatz zur klassischen Theorie über koordinatenweise Extremwerte, in der Randverteilungen nur eine untergeordnete Rolle spielen, zeigen unsere Resultate und Beispiele eine neue Bedeutung der Randwertverteilungen.

Im zweidimensionalen Fall ist es unwahrscheinlich, dass bei asymptotischer Unabhängigkeit grosse Stichprobenwerte in einer Dimension von grossen Werten in der anderen Dimension begleitet sind. Derartige Situationen sind jedoch besonders praxisrelevant. Die Standardkriterien, um asymptotische Unabhängigkeit zu testen, sind für Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen angegeben. Diese sind allerdings nur selten in expliziter Form verfügbar, insbesondere für mehrdimensionale Zufallsvariablen. Im zweiten Teil der Arbeit zeigen wir daher hinreichende Bedingungen auf, um asymptotische Unabhängigkeit nachzuweisen, die auf der (asymptotischen) Form der äquipotentiallinien der Wahrscheinlichkeitsdichte, sowie auf dem Grenzwertumriss der zugehörigen Stichprobe basiert.