

Morse homology of the loop space on the moduli space of flat connections and Yang-Mills theory

Doctoral Thesis

Author(s):

Janner, Remi

Publication date:

2010

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006118513>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

DISS. ETH NO. 19025

**MORSE HOMOLOGY OF THE LOOP SPACE ON THE
MODULI SPACE OF FLAT CONNECTIONS AND
YANG-MILLS THEORY**

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

REMI JANNER

Dipl. Math. ETH Zurich

born December 23, 1981

citizen of

Bosco Gurin TI, Switzerland

Prof. Dr. Dietmar A. Salamon, examiner

Prof. Dr. Alberto Abbondandolo, co-examiner

Prof. Dr. Michael Struwe, co-examiner

2010

Abstract

In this dissertation we consider a non-trivial principal $\mathrm{SO}(3)$ -bundle $\pi : P \rightarrow \Sigma$ on a surface Σ with genus bigger than one and we study some aspects of the moduli space \mathcal{M} given by the quotient between the space of the flat connections $\mathcal{A}_0(P)$ and the identity component of the gauge group. On the one side, on \mathcal{M} we look at the perturbed geodesics that can be seen as equivalence classes of connections on a principal $\mathrm{SO}(3)$ -bundle $\tilde{\pi} : P \times S^1 \rightarrow \Sigma \times S^1$. On the other side, we study the perturbed Yang-Mills connections of the principal $\mathrm{SO}(3)$ -bundle $\pi^\varepsilon : P \times S^1 \rightarrow \Sigma \times S^1$ where the metric on Σ is rescaled by a small parameter ε^2 . In his dissertation, Ying-Ji Hong explained how we can define a map \mathcal{T}^ε between the representatives of the perturbed geodesics and the latter perturbed Yang-Mills connections.

In the first part of this thesis, we show that the map \mathcal{T}^ε is a bijection if we choose an energy bound and provided that ε is sufficiently small and that the Morse indices of a perturbed geodesic and of the correspondent perturbed Yang-Mills connection coincide.

In the second part, we compare the heat flow between two perturbed geodesics and the Yang-Mills flow between the correspondent Yang-Mills connections. More precisely, first, for a representative of a heat flow $A : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_0(P)$ between the representatives, A_- and A_+ , of two perturbed geodesics with Morse index difference one, we construct a Yang-Mills L^2 -flow between the two connections $\mathcal{T}^\varepsilon(A_-)$ and $\mathcal{T}^\varepsilon(A_+)$. In this way we can prove the existence of a map \mathcal{R}^ε from the set of the heat flows between A_- and A_+ into the space of the Yang-Mills flows between $\mathcal{T}^\varepsilon(A_-)$ and $\mathcal{T}^\varepsilon(A_+)$. Then, we show that \mathcal{R}^ε is a bijection provided that we choose ε sufficiently small.

With these ingredients we can prove the main result of this thesis: The bounded Morse homology of the loop space of \mathcal{M} is isomorph to the bounded Morse homology of the space of connections $\mathcal{A}(P \times S^1)$ modulo the gauge group provided that ε is small enough where the first homology is defined using the heat flow and the second one using the ε -dependent Yang-Mills flow.

Riassunto

In questa tesi di dottorato consideriamo un fascio principale non triviale $\pi : P \rightarrow \Sigma$ con fibra $\mathbf{SO}(3)$ e con una superficie Σ , con genere maggiore di uno, come varietà di base e studiamo alcuni aspetti dello spazio modulare \mathcal{M} dato dal quoziente tra lo spazio delle connessioni piatte $\mathcal{A}_0(P)$ e i suoi isomorfismi. Da un lato, osserviamo le geodetiche perturbate su \mathcal{M} che possono essere viste come delle connessioni di un fascio principale $\tilde{\pi} : P \times S^1 \rightarrow \Sigma \times S^1$. Dall'altro lato studiamo le connessioni perturbate di Yang-Mills di un fascio principale, sempre con fibra $\mathbf{SO}(3)$, $\pi^\varepsilon : P \times S^1 \rightarrow \Sigma \times S^1$ dove la metrica di Σ viene riscalata con un parametro ε^2 . Ying-Ji Hong nella sua tesi di dottorato ha spiegato come definire una mappa \mathcal{T}^ε tra i rappresentanti delle geodetiche e le connessioni di Yang-Mills considerate.

Nella prima parte di questa tesi, dimostriamo che la mappa \mathcal{T}^ε è biiettiva, se si sceglie un limite di energia e il parametro ε sufficientemente piccolo, e che gli indici di Morse di una geodetica e della corrispondente connessione di Yang-Mills coincidono.

Nella seconda parte, confrontiamo il flusso di calore tra due geodetiche perturbate e il flusso di Yang-Mills tra le corrispondenti due connessioni di Yang-Mills. Più precisamente, dapprima scegliamo due rappresentanti, A_- e A_+ , di due geodetiche perturbate, con differenza uno tra i loro indici di Morse, e un rappresentante di un flusso di calore $A : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_0(P)$ tra A_- e A_+ ; poi costruiamo un flusso L^2 di Yang-Mills tra le connessioni $\mathcal{T}^\varepsilon(A_-)$ e $\mathcal{T}^\varepsilon(A_+)$. In questo modo possiamo mostrare l'esistenza di una mappa \mathcal{R}^ε dall'insieme dei flussi di calore tra A_- e A_+ allo spazio dei flussi di Yang-Mills tra $\mathcal{T}^\varepsilon(A_-)$ e $\mathcal{T}^\varepsilon(A_+)$. Inoltre riscontriamo che \mathcal{R}^ε è biiettiva ammesso che il parametro ε sia sufficientemente piccolo; infatti non solo le connessioni critiche $\mathcal{T}^\varepsilon(A_-)$ e $\mathcal{T}^\varepsilon(A_+)$ ma anche i flussi dipendono dal parametro ε .

Infine dimostriamo il risultato principale di questa tesi: vale a dire che l'omologia di Morse dello spazio delle curve chiuse di \mathcal{M} è isomorfa all'omologia di Morse dello spazio delle connessioni di $P \times S^1$, modulo isometrie, se si considera un limite di energia e ε sufficientemente piccolo; la prima omologia è definita con il flusso di calore mentre la seconda con il flusso di Yang-Mills che dipende dal parametro ε .