

Vorlesung Stahlbeton I

Grundzüge des Stahlbetons und des vorgespannten Betons, erster Teil

Educational Material

Author(s):

Bachmann, Hugo

Publication date:

1991

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006161949>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Vorlesung

Stahlbeton I

Grundzüge des Stahlbetons und des
vorgespannten Betons, erster Teil
Kapitel 1 - 3

Prof. Dr. Hugo Bachmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Abteilung für Bauingenieurwesen

Vorlesung

Stahlbeton I

Grundzüge des Stahlbetons und des
vorgespannten Betons, erster Teil

Kapitel 1-3

Prof. Dr. Hugo Bachmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Abteilung für Bauingenieurwesen

Zürich 1991

Vorwort

Die Vorlesungen "Stahlbeton GZ I und II" werden im 4. und 5. Semester an der Abteilung für Bauingenieurwesen geboten und umfassen die Grundzüge des Stahlbetons und des vorgespannten Betons.

Der erste Teil enthält vor allem die Festigkeitslehre des Stahlbetons und die konstruktive Durchbildung der einfachen Grundelemente. Der vorgespannte Beton sowie weitere Konstruktionselemente werden im zweiten Teil behandelt.

In den einzelnen Abschnitten wurde jeweils - im Sinne eines echten Hochschulunterrichtes - besonderes Gewicht auf eine klare Darstellung der oft komplexen Phänomene und oft mehrerer möglicher Modelle gelegt. Anschliessend folgen entsprechende Rechenverfahren und Bezüge zur Norm SIA 162 (1989) "Betonbauten". Das verwendete Nachweis- und Sicherheitskonzept entspricht demjenigen der Norm SIA 160 (1989) "Einwirkungen auf Tragwerke".

Bei der Ausarbeitung der vorliegenden Autographie hat mein ehemaliger Assistent, Herr Walter Gisin, dipl. Bauing. ETH, mit vielen guten Ideen und grossem Einsatz mitgewirkt. Ich möchte ihm hierfür herzlich danken.

März 1991

H. Bachmann



Inhaltsverzeichnis

Seite

1. Einleitung

- 1.1. Prinzipien 1-1
- 1.2. Geschichtliche Entwicklung 1-4
- 1.3. Konzepte für Sicherheit und Gebrauchstauglichkeit 1-6
 - 1.3.1. Einwirkungen auf ein Tragwerk 1-6
 - 1.3.2. Anforderungen an ein Tragwerk 1-8
 - 1.3.3. Zur Tragsicherheit 1-9
 - 1.3.4. Zur Gebrauchstauglichkeit 1-11 a)
 - 1.3.5. Nachweis-Konzepte 1-12
 - 1.3.6. Einwirkungsnorm SIA 160 1-17
- 1.4. Wirklichkeit und Modelle 1-21
- 1.5. Allgemeine Literatur 1-23

2. Technologische Grundlagen

- 2.1. Beton 2-1
 - 2.1.1. Komponenten 2-2
 - 2.1.2. Zusammensetzung und Verarbeitung 2-7
 - 2.1.3. Festigkeitseigenschaften 2-10
 - 2.1.4. Verformungseigenschaften 2-16
 - 2.1.5. Weitere Eigenschaften 2-24
 - 2.1.6. Besonderheiten des Leichtbetons 2-25
- 2.2. Betonstahl 2-28
- 2.3. Spannstahl 2-34
- 2.4. Verbund zwischen Stahl und Beton 2-39
 - 2.4.1. Ursachen 2-39
 - 2.4.2. Schubübertragung beim profilierten Stab 2-40
 - 2.4.3. Einflüsse auf die Güte des Verbundes 2-41
 - 2.4.4. Nominelle Verbundspannungen als rechnerisches Hilfsmittel 2-41
 - 2.4.5. Besonderheiten beim Verbund mit Spannstahl 2-43
- 2.5. Baustoffprüfungen 2-45

3. Festigkeitslehre des Stahlbetons

Seite

3.1. Reine Biegung

3.1-3

3.1.1. Phänomene

3.1-3

3.1.2. Biege widerstand im Bruchzustand (Plastische Festigkeitslehre)

3.1-8

a) Annahmen der plast. Biegetheorie

3.1-8

b) Zustände die zum Bruch führen

3.1-9

c) Berechnung des plastischen Momentes

3.1-10

Stoffgesetz Beton

3.1-10

Stoffgesetz Stahl

3.1-13

 M_{pl} beim Rechteck-BS ohne Druckbew.

3.1-13

 M_{pl} beim Rechteck-BS mit Druckbew.

3.1-17

 M_{pl} beim Plattenbalken-BS

3.1-19

 M_{pl} beim allg. BS

3.1-22

d) Berechnung des "genauen" Bruchmomentes

3.1-22

e) Biegebrucharten

3.1-23

f) Rotationsfähigkeit plast. Gelenke

3.1-25

3.1.3. Bemessung für M

3.1-28

3.1.4. Spannungen, Dehnungen und Biegefertigkeiten im Gebrauchszustand (Elast. Festigkeitslehre)

3.1-31

a) Spannungen und Dehnungen im
idealisierten Stahlbeton-BS

3.1-32

b) Krümmung und Biegefertigkeiten des
Stahlbeton-BS

3.1-43

3.2. Biegung mit Längskraft

3.2-1

3.2.1. Schnittkräfte - innere Kräfte - Spannungen

3.2-2

3.2.2. Widerstand im Bruchzustand

(Plastische Festigkeitslehre)

3.2-4

a) Annahmen

3.2-4

b) Interaktionsdiagramm

3.2-4

c) Vorgehen bei der Berechnung

3.2-5

	Seite
d) Rechteckquerschnitt	3.2-6
e) Diskussion einiger Parameter	3.2-8
f) Allgemeiner Querschnitt	3.2-10
g) Rotationsfähigkeit	3.2-10
3.2.3. Bemessung für M+N	3.2-12
a) Sicherheitsnachweis	3.2-12
b) Abschätzung der Bewehrung	3.2-13
3.2.4. Spannungen, Dehnungen und Steifigkeiten im Gebrauchszustand (elastische Festigkeitslehre)	3.2-20
a) Annahmen	3.2-20
b) Zentr. Druck	3.2-20
c) Druck - kleine Exzentrizität	3.2-21
d) Druck - grosse Exzentrizität	3.2-22
e) Zentr. Zug	3.2-27
f) Zug - kleine Exzentrizität	3.2-27
g) Zug - grosse Exzentrizität	3.2-28
h) Schiefe Biegung	3.2-30

3.3. Biegung mit Querkraft

3.3.1. Schub in Stegen	3.3-3
a) Rissarten	3.3-3
b) Trag- und Bruchverhalten	3.3-3
c) Folgerungen für die Schubbemessung	3.3-12
d) Modelle und Berechnungsverfahren	3.3-15
Hauptspannungs-Modell	3.3-15
45°-FW-Modell	3.3-17a)
Allgemeines FW-Modell ($\alpha \neq 45^\circ$)	3.3-20
Schubriss-Modell	3.3-24
Ergänzungen	3.3-27
e) Bügelspannungen u. Schubrisswerten im Gebr. zust.	3.3-30
3.3.2. Schub in Flanschen (Längsschub)	3.3-31
a) Tragwirkung und Bruchverhalten	3.3-31
b) Flanschschachwerkmodell	3.3-34
c) Besonderheiten des Zugflanschanschlusses	3.3-36

3.4. Torsion

3.4.1. Stäbe aus ungenügendem Material unter einer Torsion	3.4-1
a) Differentialgleichung und Membrananalogie	3.4-2
b) Voll-Querschnitte	3.4-4
c) Hohl-Querschnitte	3.4-6
d) Erkenntnisse	3.4-7
3.4.2. Stahlbetonstäbe unter einer Torsion	3.4-9
a) Rissbild	3.4-9
b) Trag- und Bruchverhalten	3.4-10
c) Folgerungen für die Torsionsbemessung	3.4-13
d) Modelle und Berechnungsverfahren	3.4-16 a)
3.4.3. Stahlbetonstäbe unter kombinierter Beanspruchung N, V, T	3.4-23

4. Grundelemente des Stahlbetons

4.1. Allgemeines zur Statik, Bewehrung, Rissicherung

a) Zur statischen Berechnung	4.1-3
b) Disposition der Bewehrung	4.1-5
Grundsätze	4.1-5
Arten von Bewehrungen	4.1-6
Gebräuchliche Stab ϕ	4.1-6
Maximale Stablängen	4.1-6
Bewehrungskörbe	4.1-6
Betonüberdeckung	4.1-7
Gegenseitige Abstände der Bewehrungsreihen	4.1-8
Netze	4.1-8
Minimale Biegeadien	4.1-9
Allgemeine Biegeformen	4.1-11
Verankerung der Stäbe	4.1-11
Bewehrungsstöße	4.1-13
Bewehrung in hohlen Ecken	4.1-15
Umlenkkräfte zurückbinden	4.1-16
Gedrückte Eisen gegen Ausweichen halten	4.1-16
Gebogene Eisen über Trageisen legen	4.1-17
c) Rissicherung	4.1-17

4.2. Balken

4.2.1. Regeln für den Entwurf	4.2-1
a) Trägerhöhe h	4.2-1
b) Trägerbreite b_w	4.2-2
4.2.2. Modellbildung	4.2-3
a) Modelle für die Auflagerung	4.2-3
b) Modell der mitwirkenden Plattenbreite	4.2-5
4.2.3. Ermittlung der Schnittkräfte	4.2-7
a) Stat. bestimmte Lagerung	4.2-7
b) Stat. unbestimmte Lagerung	4.2-7
4.2.4. Gestaltung der Längsbewehrung	4.2-15
a) Abstufung längs Balkenaxe	4.2-15
b) Verankerung der Längsbewehrung	4.2-16
c) Bereich des Endauflagers	4.2-17
d) Aufgebogene Längsreisen	4.2-20
e) Verteilung der Längsbewehrung im Querschnitt	4.2-21
4.2.5. Gestaltung der Schubbewehrung	4.2-22
a) Abstufung längs Balkenaxe	4.2-22
b) Verankerung der Bügel	4.2-25
c) Kraftumlenkung	4.2-25
d) Schräge Bügel	4.2-25
4.2.6. Mindestbewehrungen	4.2-26
a) Mindest-Längsbewehrung der Zugzone	4.2-26
b) Mindest-Schubbewehrung	4.2-27
4.2.7. Durchbiegungen	4.2-28
4.2.8. Schwingungen	4.2-31 a)

4.3. Vorwiegend in einer Richtung tragende Platten

4.3.1 Regeln für den Entwurf	4.3-1
4.3.2 Modellbildung	4.3-2
4.3.3 Ermittlung der Schnittkräfte	4.3-3
4.3.4 Gestaltung der Bewehrung	4.3-4

4.4. Stützen

4.4.1. Regeln für den Entwurf 4.4-1

4.4.2. Grundlagen aus der Knicktheorie 4.4-3

 a) Übersicht 4.4-3

 b) Zentr. beanspruchte Stäbe 4.4-7

 c) Exzentr. beanspruchte Stäbe 4.4-11 a)

4.4.3. Verhalten von Stahlbetonstützen 4.4-17

4.4.4. Berechnung und Bemessung von Stahlbetonstützen 4.4-21

 a) Modellbildung 4.4-21

 b) Tragsicherheitsnachweis 4.4-23

4.4.5. Gestaltung der Bewehrung 4.4-29

 a) Aufgaben 4.4-29

 b) Ausbildung und Anordnung 4.4-29

 c) Grenzen des Längsbewehrungsgehaltes 4.4-31

 d) Stöße der Längsbewehrung 4.4-32

4.4.6. Sonderausführungen 4.4-32

4.5. Fundamente

4.5.1. Regeln für den Entwurf 4.5-1

 a) Abmessungen im Grundriss 4.5-1

 b) Fundamentdicke 4.5-3

 c) Fundamenttiefe 4.5-5

4.5.2. Einzelfundamente 4.5-6 a)

 a) Modellbildung - Schnittkräfte 4.5-6 a)

 b) Gestaltung der Bewehrung 4.5-8

4.5.3. Streifenfundamente 4.5-10

4.5.4. Plattenfundamente 4.5-12

4.6. Torsionsstäbe

4.6-1

Literaturverzeichnis
Sachwortverzeichnis

I ÷ V
VI ÷ IX

Bezeichnungen

Großbuchstaben

		vergl. z.B. Seite
A	Fläche	
A_c	Betonfläche	
A_{ct}	Gezogene Betonfläche im Wirkungsbereich von A_s	4.1-21
A_s	Fläche des (gezogenen) Betonstahles	
A'_s	Fläche des gedrückten Betonstahles bei Biegetragwerken	
A_p	Fläche des Spannstahles	
A_i	Fläche des ideellen Querschnittes	3.1-42
B	Querschnittsteifigkeit $B = E \cdot I$	
B^I	" des ungerissenen QS	} 3.1-43 ff
B^E	" des vollk. gerissenen QS ($\mu = 1,0$)	
C	Schwerpunkt	
D	Druckkraft als innere Kraft	
E	Elastizitätsmodul	
E_{co}	E-Modul von Beton im Belastungszeitpunkt $t = 0$	} 3.1-32
$E_{c\infty}$	" " " " " " $t = \infty$	
F	Kraft allg.	
G	Eigenlast, Schubmodul	
I	Trägheitsmoment	3.1-40
I^I	" des ideellen ungerissenen QS	
I^E	" des ideellen vollk. gerissenen QS	
K	Torsionskonstante	3.4-4
π	Moment allg.	
π_{gr}	Moment aus Eigenlast sowie ständige und veränderliche Einwirkung	
π_{pl}	Plastisches Moment	3.1-13 ff
π_r	Rissmoment	3.1-24
π_R	Biege widerstand	3.1-28
N	Normalkraft	
P	Vorspannkraft	
P_0	Vorspannkraft unmittelbar nach dem Vorspannen	
Q	veränderliche Einwirkung (Einzellast)	
R	Tragwiderstand, Auflagerkraft	
S	Schnittkraft allg.; Stabisches Moment	3.1-39
T	Torsionsmoment; Temperatur; Tangentenmodul	
U	Konzentrierte Umlenkkraft	
V	Querkraft	
W	Widerstandsmoment	
Z	Zugkraft als innere Kraft	

Kleinbuchstaben

		z.B. gem. Seite
a	Abstand; <u>Querschnittsabmessung</u>	
b	Breite	
b_w	Stegbreite	
b_f	Flanschbreite	
c	Betonüberdeckung	4.1-7
d	Statische Höhe; <u>Biegedurchmesser</u>	
e	Exzentrizität	
f	Baustofffestigkeit, Pfeilhöhe, <u>Eigenfrequenz</u>	
f_c	Beton: <u>Prismenfestigkeit allgemein</u> , Rechenwert der Druckfestigkeit	} 2.10 ff
f_{cw}	<u>Würfeldruckfestigkeit allgemein</u>	
f_{cvm}	Mittelwert der <u>Würfeldruckfestigkeit</u>	
$f_{c,28}$	<u>Würfeldruckfestigkeit nach 28 Tagen</u>	
f_{ct}	Rechenwert der <u>Zugfestigkeit</u>	} 2.28 ff
f_y	Stahl: <u>Rechenwert der Fließgrenze</u>	
f_{yk}	<u>Prüfwert der Fließgrenze</u>	
$f_{y, min}$	<u>Mindestwert der Fließgrenze</u>	
f_{tk}	<u>Prüfwert der Zugfestigkeit</u>	
g	Verteilte <u>Eigenlast</u>	
h	Höhe	
i	Trägheitsradius	
k	Koeffizient allg.	
l	Spannweite; <u>Länge</u>	
l_{cr}	<u>Knicklänge</u>	4.4-10
l_b	<u>Verankerungslänge</u>	4.1-12a)
$l_{ü}$	<u>Stosslänge; Überganglänge</u>	4.1-14
l_{pe}	<u>Länge des plast. Gelenkes</u>	3.1-25
m	<u>Moment pro Länge</u>	
n	<u>Normalerast pro Länge</u> ; <u>Verhältniszahl $n = E_s/E_c$</u>	
p	<u>Vorspannkraft pro Länge</u>	
q	<u>Verteilte ständige oder veränderliche Einwirkung</u>	
r	<u>Radius; Krümmungsradius</u>	

s	Stababstand; Bügelabstand; Standardabweichung	2-12
t	Zeit; Dicke	
u	Umlenkkraft pro Länge; Umfang	
v	Schubfluss; Querkraft pro Länge	
w	Auslenkung; Durchbiegung; Rissweite	
x	Neutralachsenabstand = Höhe der Druckzone; Koordinate	
y	Koordinate	
z	Hebelarm der inneren Kräfte; Koordinate	

Griechische Kleinbuchstaben

α	Rissneigung Neigung der schiefen Druckkräfte	3.3-21
β	Bügelneigung	
γ	Widerstandsbeiwert; Lastfaktor; Raumgewicht; Winkel	
ϵ	Dehnung	
ϵ_c	Betondehnung	} 2-16 ff
$\epsilon_{c,el}$	Elast. Dehnung des Betons	
ϵ_{cc}	Kriechdehnung " "	
ϵ_{ccr}	Endkriechdehnung " "	
ϵ_{cs}	Schwinddehnung " "	
ϵ_{csr}	Endschwinddehnung " "	
ϵ_{cu}	Bruchstauchung " "	
ϵ_s	Stahldehnung	
ϵ_{sy}	Stahldehnung bei Fließbeginn bzw. bei 0,2% bleibender Dehnung	
ϵ_{sm}	Mittlere Stahldehnung längs Risselement	
$\epsilon_{s,max}$	Maximale Stahldehnung im Riss	
ϵ_p	Spannstahldehnung	
η	Beiwert ($z = \eta \cdot d$)	
$\bar{\eta}$	Beiwert für Verschiebung der Zugkraft- bzw. Momentenlinie	3.3-28
θ	Gelenkwinkel	
h	Verbundkoeffizient	3.1-6/3.1-47
λ	Schlankheit	4.4-9
λ_{gl}	Gleichmassdehnung	2-33
μ	Reibungsbeiwert	
ν	Querdehnungszahl	
ξ	Beiwert ($x = \xi \cdot d$)	
ρ	Dichte; geometrischer Bewehrungsgehalt	3.1-14
ρ'	Geometrischer Bewehrungsgehalt der Biegedruckbew.	

		vergl. z.B. Seite
ρ	Bewehrungsgehalt bei Angabe z.B. der Mindestbew. oder Stützenbewehrung (bezogen auf die Betonfläche A_c im Wirkungsbereich von A_s)	4.1-22 4.4-3
σ	Normalspannung allg.	
σ_c	Spannung im Beton	
σ_s	Spannung im Betonstahl	
σ_{po}	Spannstahlspannung unmittelbar nach dem Spannen	
σ_{pi}	" " " " während " "	
σ_{poo}	" " " " nach Abzug der zeitabh. Verluste	
τ	Schubspannung	
τ_c	Rechenwert der unteren Schubspannungsgrenze v. Beton	3.3-12
$\tau_{c,max}$	" " " " oberen " "	3.3-14
τ_v	Verbundspannung	2-41
φ	Kriechzahl	} 2-22 ff
φ_{∞}	Endkriechzahl	
w	mechanischer Bewehrungsgehalt; Eigenkreisfrequenz	3.1-14 4.2-32

Allgemeine Indizes

c	Beton (G_c)	adm	zulässig ($G_{c,adm}$)
f	Flansch (b_f)	cr	kritisch (L_{cr})
g	verteilte Eigenlast (Π_g)	ef	effektiv ($A_{s,ef}$)
h	horizontal ($D_{w,h}$)	el	elastisch ($E_{c,el}$)
p	Vorspannung (Π_p)	pl	plastisch (Π_{pi})
q	verteilte veränderliche Einwirkung	red	reduziert ($f_{c,red}$)
r	Riss (Π_r)	req	erforderlich ($A_{s,req}$)
s	Betonstahl (G_s)	ser	Gebrauch (Π_{ser})
u	Bruchzustand (E_{cu})	sup	erhöht ($f_{c,sup}$)
v	vertikal ($D_{w,v}$)		
w	Steg, Würfel		

Sicherheitskonzept

R bzw. M_R, N_R, V_R, T_R : Tragwiderstand

$\frac{R}{\gamma_R}$ bzw. $\frac{M_R}{\gamma_R}, \frac{N_R}{\gamma_R}, \frac{V_R}{\gamma_R}, \frac{T_R}{\gamma_R}$: Bemessungswert des Tragwiderstandes

S_d bzw. M_d, N_d, V_d, T_d : Beanspruchung bzw. Schnittkräfte aus γ_S -fach erhöhten Lasten des Gebrauchszustandes
= Beanspruchung bzw. Schnittkräfte auf Bemessungsniveau

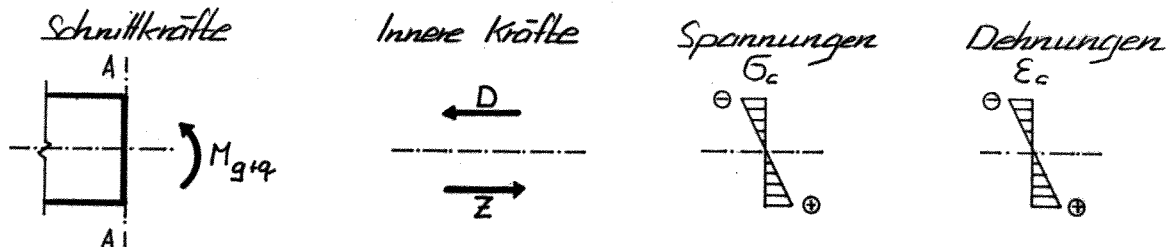
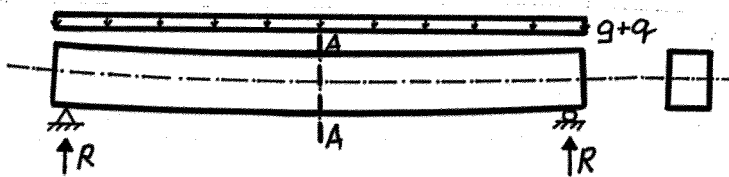
S^* bzw. M^*, N^*, V^*, T^* : Beanspruchung bzw. Schnittkräfte aus γ_R -fach erhöhten Beanspruchungen bzw. Schnittkräften des Bemessungsniveaus
= Beanspruchung bzw. Schnittkräfte auf Bruchniveau

1. Einleitung

Die Betonbauweise ist ausserordentlich verbreitet und von entsprechender Bedeutung: Träger, Stützen, Decken, Skelett- und Hallenbauten, Grossbehälter, die verschiedenartigsten Brücken usw. werden heute vorwiegend aus Stahlbeton und vorgespanntem Beton hergestellt. In einem Zeitraum von nur etwa 100 Jahren ist eine hochentwickelte Technologie entstanden, welche sowohl auf theoretischen wie auch auf konstruktiven Grundlagen aufbaut.

1.1. Prinzipien

Betonbalken ohne Bewehrung

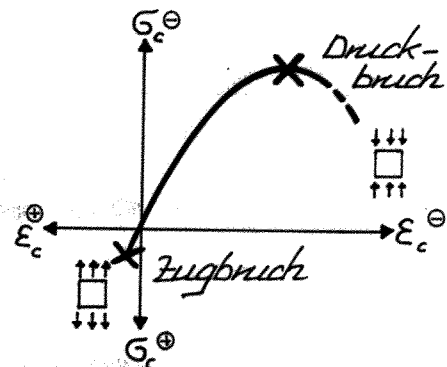


Infolge $g+q$ auf den Balken:

- oben Druck \ominus \rightarrow günstig für Beton
- unten Zug \oplus \rightarrow Beton ungeeignet

Problematik der Zugzone:

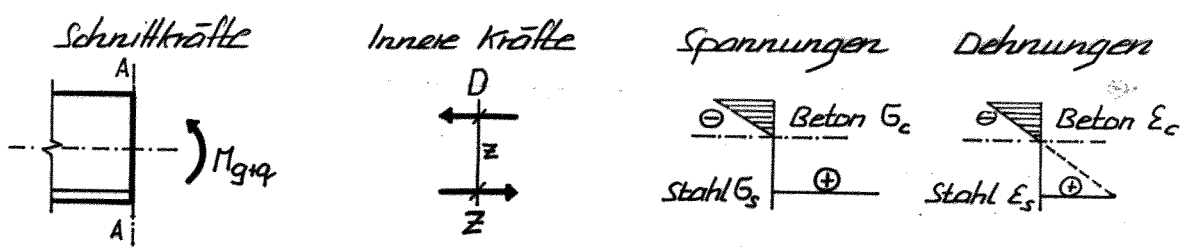
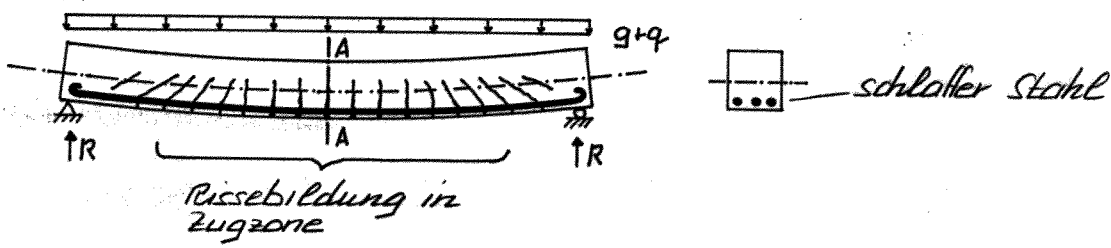
- Zugfestigkeit des Betons sehr klein.
(ca. 1/10 der Druckfestigkeit)
- Streuung der Beton-zugfestigkeit gross



Mögliche Lösungen:

- Aufnahme der Zugkräfte durch schlaff eingelegte Stahlstäbe. } → Stahlbeton
- künstliche Druckkraft in Zugzone durch vorgespannte Stahlstäbe. } → vorgespannter Beton

Stahlbeton

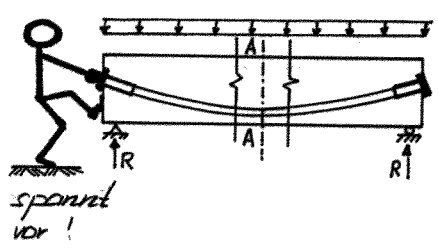


Gleichgewicht:
 Stat. Äquivalenz:

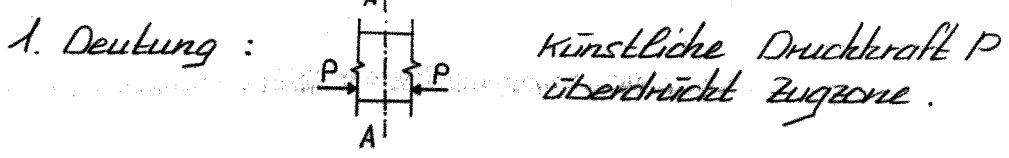
$$D = Z$$

$$M_{g+q} = D \cdot z = Z \cdot z$$

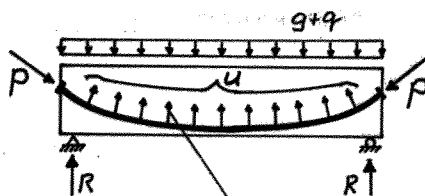
Vorgespannter Beton



Spannkabel (lose im Hüllrohr) gegen erhärteten Beton spannen.

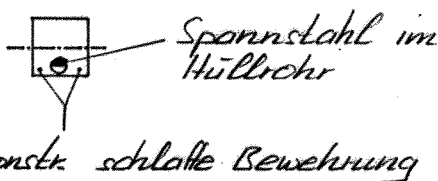
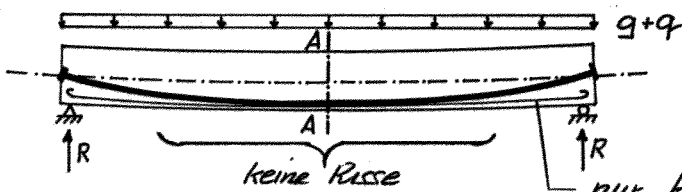


2. Deutung :



Umlenkkräfte wirken der Last entgegen

Spezialfall: Volle Vorspannung



Restlast $(q+q)-u$ genügt nicht zur Rissebildung!

→ grosse Steifigkeit, kleine Durchbiegung.

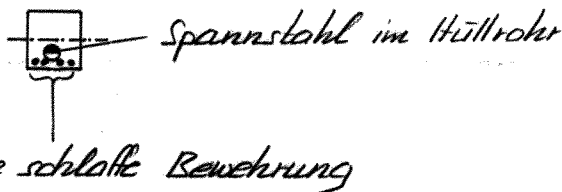
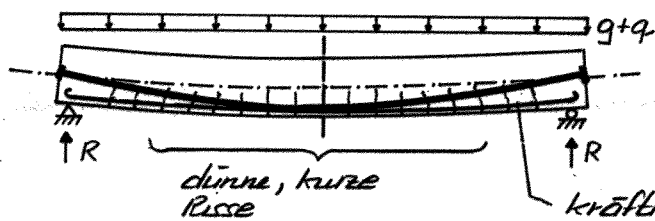
Spannungen im Schnitt A-A :



infolge $q+q$ infolge P zusammen

Im ganzen Betonquerschnitt nur Druckspannungen.

Normalfall: Teilweise Vorspannung



Restlast $(q+q)-u$ bewirkt Rissebildung

→ Steifigkeit und Durchbiegung zwischen Träger mit nur schlatter Bewehrung und voll vorgespanntem Träger.

1.2. Geschichtliche Entwicklung

1-4

Beton

Römer: Beton mit hydraulischem Kalk, später mit Puzzolanerde = vulkanischer Staub.

1824 J. Aspdin (England): Entdeckt den Portlandcement. Name wegen Aehnlichkeit mit Naturgestein auf Halbinsel Portland.

Wortlaut des Patentes:

"Der Schlamm oder Staub von mit Kalkstein gepflasterten Wegen oder, wenn dieses Material nicht in genügender Menge zu haben ist, Kalkstein, gebrannt oder gelöscht, wird mit einer bestimmten Menge Ton mit Hilfe von Wasser durch Handarbeit oder irgend welche Maschinen zu einem unfühlbaren Brei vermischt. Die plastische Masse wird getrocknet, dann in Stücke gebrochen und in einem Kalkofen gebrannt, bis alle Kohlensäure entwichen ist; das gebrannte Produkt wird durch Mahlen, Kollern oder Stampfen in Pulver verwandelt und ist zum Gebrauch fertig."

1826 Erste PC-Fabriken in England

1840 Erste französische PC-Fabrik in Boulogne

1855 Erste deutsche PC-Fabrik in Stettin

1871 Erste schweizerische PC-Fabrik in Luterbach (SO)

Erste Anwendungen von PC:

- Künstliche Steine und Platten
- Stampfbeton für Böden, Stützmauern, Fundamente

Eisenbeton

1850 Bereits verbreitet: Drahtgerippe in Kunststein-Erzeugnissen

1850 T. Hyatt (USA): Beginnt systematische Trag- und Brandversuche an armiertem Beton.

1877 Buch über Eisenbetonbau, 1878 Patent.

Hyatt erkannte bereits:

- Eisen sollen auf der Zugseite angeordnet sein
- Zugkräfte in den Eisen von Lage der Eisen in Balken abhängig
- Grosse Bedeutung der Verbundwirkung zwischen Eisen und Beton

1855 J. Lambot (Frankreich): Erhält Patent zur Herstellung von Eisenbetonschiffen. Wandung aus Mörtel und Drahtgeflecht.

1861 Buch von F. Coignet (Frankreich): Zeigt bereits gewisse Kenntnisse über Verbundbauweise (Verlegen der Eisen, usw.)

1867 J. Monier (Paris): Erwirbt Patent für eisenbewehrte Beton-Blumenkübel. Zusatzpatente 1868 - 1875 für Rohre, Platten, Brücken, Treppen.

- 1875 Erste Fussgängerbrücke von Monier, l = 16 m.
- 1878 Allgemeines Patent für Eisenbetonbauweise an Monier
- 1885 G. Wayss und A. Freytag: Erwerben Monier-Patent für Deutschland
- 1886 "Monierbroschüre" von Wayss: Erste gewisse Theorie des Eisenbetons mit vielen Anwendungen.
- 1888 Versuchsbogenbrücke l = 40 m in Stettin
- 1892 F. Hennebique (Frankreich): Entwickelt monolithische Bauweise (Rippendecken, Durchlaufträger, Rahmen, usw.)
- 1893 S. de Mollins (Lausanne): Versuchsreihen, Neubau der Universität Lausanne, usw.
- 1899 Prof. W. Ritter, ETH: Gibt Monographie "Bauweise Hennebique" heraus.
- 1902 Buch "Der Betoneisenbau", theoretischer Teil von Prof. E. Mörsch.
- 1903 Provisorische Vorschriften des SIA
- 1909 Definitive Vorschriften des SIA

Vorgespannter Beton (siehe auch 5. Kapitel)

- 1886 Erste Patente in USA und Deutschland: Nur grundsätzliche Ideen, noch keine technischen Anwendungen.
- 1928 E. Freyssinet (Paris): Bedeutende Studien und Versuche, Beginn der modernen Spannbetontechnik.
- 1945 Nach dem Zweiten Weltkrieg: Starke Entwicklung und Verbreitung des vorgespannten Betons vor allem in Europa und den USA.
- 1948 Entwicklung grosser Einzelspannglieder.
- 1956 Weinlandbrücke Andelfingen: Erster bedeutender Durchlaufträger (l ≈ 90 m) in der Schweiz.
- 1968 Teilweise Vorspannung (Norm SIA 162)

Geschichtliche Literatur

Straub [1] Emperger [2] Schweizer [3] Leonhardt [4]

1.3. Konzepte für Sicherheit und Gebrauchstauglichkeit

1.3.1. Einwirkungen auf ein Tragwerk

Mögliche Einwirkungen

Einwirkungen können z.B. sein :

- Tragwerke → Eigenlasten
- Ausbau → Auflasten
- Nutzung → statische und dynamische Nutzlasten
- Baugrund → Erd- und Wasserdrücke, Setzungen
- Klima → Schneelasten, Windkräfte, Temperaturverformungen, Frost-einwirkungen
- Umwelt → Frost-Tausalz-Einwirkungen, saurer Regen, usw.
- Seismizität → Rasche Bodenbewegungen
- Unfälle → Aufprallkräfte, Explosionseinwirkungen, Brand, usw.

Gefahren und Nutzung

Die Einwirkungen auf ein Tragwerk ergeben sich aus (verg. SIA 160):

- möglichen Gefahren

z.B. vertikale Lasten, Schnee, Erdruck, Wasserdruk, Wind, Erdbeben, Brand, Explosion, usw.

Die möglichen Gefahren muss der Ingenieur meist selbst erkennen und festlegen. Sie führen zu den sogenannten Gefährdungsbildern. Diese werden im sogenannten Sicherheitsplan festgehalten.

- beabsichtigter Nutzung

v.a. statische und dynamische Nutzlasten, die sich aus dem Zweck des Bauwerkes ergeben.

Die beabsichtigte Nutzung hat der Bauherr mit dem Ingenieur zu vereinbaren. Sie führt zu den sogenannten Nutzungszuständen. Diese werden im sogenannten Nutzungsplan festgehalten.

Lasten und Kräfte

Lasten sind Einwirkungen aus der Wirkung der Erdbeschleunigung, z.B. Eigenlasten, Nutzlasten, usw.

Kräfte sind Einwirkungen z.B. infolge Wind, Erdbeben, Aufprall, Explosion, usw.

Lasten (bzw. Kräfte) und aufgezwungene Verformungen

Bei den Einwirkungen kann unterschieden werden zwischen

Lasten (bzw. Kräfte)
(= direkte Einwirkungen)



Lastbeanspruchung

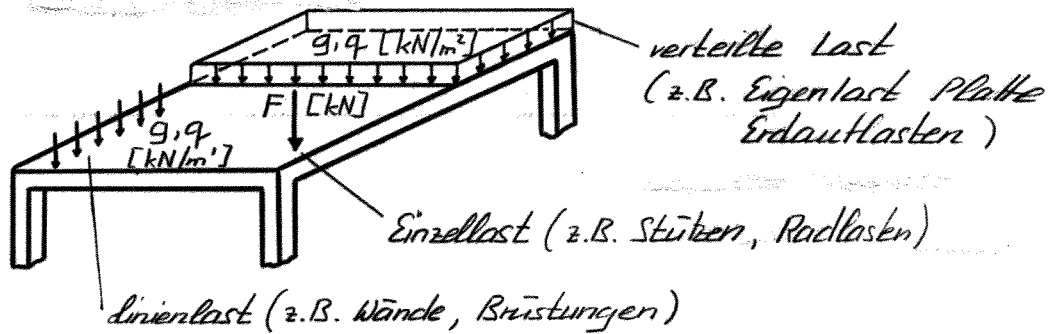
und aufgezwungene Verformungen
(= indirekte Einwirkungen)



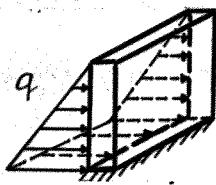
Zwangsbeanspruchung

Lasten und Kräfte können z.B. sein:

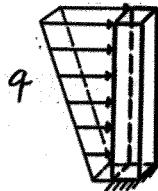
Vertikale Lasten (Schwerlasten)



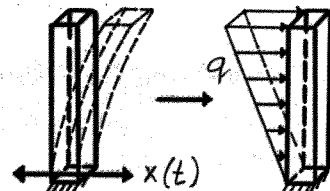
Horizontale Lasten bzw. Kräfte



Erddruck, Wasserdruck

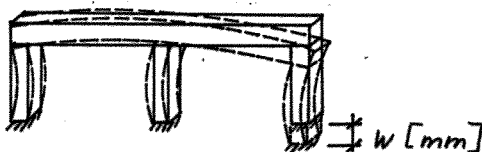


Windkräfte

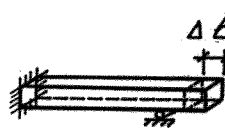


Erdbeben, erfasst durch statische Ersatzkräfte

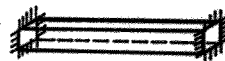
Aufgezwungene Verformungen können z.B. sein:



Stützensenkung



Temperatur- und Schwindverkleinerung



Verkleinerung verhindert bei endfixiertem Stab

→ Aufbau von inneren Spannungen

Numerische Werte

für Einwirkungen sind in Normen (z.B. SIA 160) festgelegt

Massgebende Kombinationen von Einwirkungen sind in der Regel nicht einfach zu finden. Methoden dazu werden in den Weisungen SIA 260 [5] "Sicherheit und Gebrauchsfähigkeit von Tragwerken" sowie in der Norm SIA 160 "Einwirkungen auf Tragwerke" [8] gegeben.

1.3.2. Anforderungen an ein Tragwerk

Ein Bauwerk bzw. ein Tragwerk muss so bemessen und konstruktiv durchgebildet sein, dass es während der voraussichtlichen Nutzungsdauer den ihm zugeordneten Zweck erfüllt, und zwar

- "ohne unnötige Gefährdung von Leben und Gut,"
- "ohne Beeinträchtigung der vorgesehenen Nutzung."

Konkret bedeutet dies, dass ein Tragwerk folgenden Anforderungen genügen muss:

1. Ausreichende Sicherheit gegen Einsturz
→ Anforderungen an die Tragsicherheit
2. Zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand
→ Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit

Unterliegt ein Tragwerk einer oft wiederholten Beanspruchung, muss ferner eine ausreichende Ermüdungssicherheit (Dauerfestigkeit) vorhanden sein. Eine oft wiederholte Beanspruchung liegt dann vor, wenn z.B. mehr als 100'000 Lastwechsel eintreten (z.B. Eisenbahnbrücken, Kranbahnen).

Im Hochbau kann dank geringen Lastwechselzahlen meistens auf den Nachweis der Ermüdungssicherheit verzichtet werden. Ermüdungsprobleme werden deshalb im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt. (Siehe dazu z.B. [10]).

1.3.3. zur Tragsicherheit

Entscheidend für die Sicherheit während der Ausführung und der geplanten Nutzungsdauer ist die Beurteilung aller Einflüsse, die eine Gefährdung für das Tragwerk darstellen, sowie das Erkennen der daraus resultierenden kritischen Situationen. Diese Situationen werden in Gefährdungsbildern festgehalten.

Die zu berücksichtigenden Gefährdungsbilder für das Tragwerk werden im Sicherheitsplan zusammengestellt und es wird festgelegt, mit welchen Massnahmen den Gefahren begegnet werden soll:

Mögliche Massnahmen:

- Massnahmen an der Gefahrenquelle
- Überwachung, Kontrollen oder Warnsysteme
- Vorhalten eines ausreichenden Tragwiderstandes

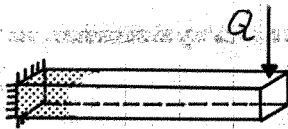
Nähere Angaben sind der Norm SIA 160 zu entnehmen.

Tragwiderstand

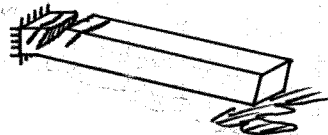
Der Einsturz eines Tragwerks tritt dann ein, wenn der Tragwiderstand geringer ist als die Beanspruchung aus den äusseren Einwirkungen.

Vermag z.B. das Tragwerk einer Last keine ausreichende Reaktionskraft entgegenzustellen, ist das Gleichgewicht im Ruhezustand nicht mehr gewährleistet. Es stellt sich ein Bewegungszustand ein, der so lange andauert, bis das System einen neuen ruhenden Gleichgewichtszustand gefunden hat.

Im statisch bestimmten Tragwerk ist für eine bestimmte Last nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich. Wird der Tragwiderstand in einem Bereich des Systems überschritten, führt dies unverzüglich zum Kollaps.



Q wächst

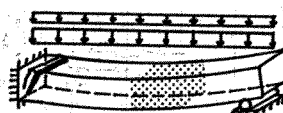
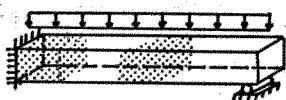


Biege­wider­stand wirkt der Beanspruchung inf. Q entgegen.

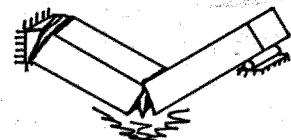
Biege­wider­stand an der Einspannstelle ist erschöpft.
→ Kollaps

Ein statisch unbestimmtes Tragwerk hat demgegenüber meist die günstige Eigenschaft, nach der Überforderung eines Bereiches, eine Umlagerung der Schnittkräfte zu vollziehen. Ein neuer Gleichgewichtszustand verhindert den sofortigen Kollaps. Ist das System mehrfach statisch unbestimmt, kann sich dieser Vorgang mehrmals wiederholen.

Die durch eine Schnittkraftumlagerung mobilisierbaren Tragreserven dürfen dann rechnerisch berücksichtigt werden, wenn die Verformungen im Gebrauchszustand die Nutzung nicht beeinträchtigen und ein duktiler Bruchverhalten gewährleistet werden kann.



Δq
 q



Biege­wider­stand im Feld und an Einspannstelle wirkt der Beanspruchung inf. q entgegen.

Biege­wider­stand z.B. an Einsp.­stelle voll ausgenutzt
→ Verlagerung der Biegebeanspruchung bei weiterer Last­erhöhung ins Feld

Biege­wider­stand an Einsp.­stelle und im Feld voll ausgenutzt
→ Kollaps bei weiterer Last­erhöhung

Unsicherheiten bei der Bemessung

Bei der Bemessung eines Tragwertes lassen sich verschiedene Unsicherheiten, d.h. Abweichungen von der Wirklichkeit nicht vermeiden. Ihnen muss durch bewusstes Verhalten eines ausreichenden Tragwiderstandes begegnet werden. Unsicherheiten können trotz normaler Sorgfalt entstehen z.B. durch die

- Modellbildung (z.B. Widerstandsmodelle)
- Anwendung von Rechenregeln
- Annahmen über Art und Grösse der Einwirkungen
- Annahmen der Baustofffestigkeiten
- Bauausführung, Querschnittabmessungen
- u.s.w.

Regeln zum Abdecken solcher Unsicherheiten durch Verhalten eines ausreichenden Tragwiderstandes sind in Normen festgehalten. Wichtige Bestandteile dieser Regeln sind z.B.:

- Teilsicherheitsfaktoren
 - γ_s : Lastfaktor
 - γ_R : Widerstandsbeiwert
- Abgeminderte Baustofffestigkeiten
(z.B. 16% - oder 5% - Fraktile oder sog. "Mindertwerte")

Kalkulierte Tragreserven dürfen jedoch nie absolute Sicherheit vortäuschen. Oft führen Gefahren aus der natürlichen Umwelt (Erdbeben, Erdstöße, Wasser u.s.w.) oder aus menschlicher Tätigkeit (Nachlässigkeit, Irrtümer, Fehlhandlungen) zu unvorhersehbaren oder übermässigen Einwirkungen.

Ihnen kann zum Teil begegnet werden, indem durch geeignete Systemwahl (einfache, klare Lastabtragung, mehrfache stat. Unbestimmtheit, symmetrische Formen) und gute konstr. Durchbildung "zusätzliche" Tragreserven geschaffen werden.

1.3.4. Zur Gebrauchstauglichkeit

Um umständliche und teure Sanierungen zu vermeiden, müssen den für die vorgesehene Nutzung und Nutzungsdauer nachteiligen Einwirkungen vor dem Bau eines Tragwerks große Beachtung geschenkt werden. Deshalb sollen zwischen Bauherr und Ingenieur von Fall zu Fall sog. Nutzungszustände vereinbart werden. Die zu berücksichtigenden Nutzungszustände werden im Nutzungsplan zusammengestellt und festgelegt, mit welchen Maßnahmen die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit gewährleistet werden sollen. Nähere Angaben sind der Norm SIA 160 zu entnehmen.

Mögliche Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit:

Mögliche Maßnahmen:

Gute Dauerhaftigkeit

z.B. bzgl. Frost

z.B. bzgl. chem. Einflüssen

→ Frostbeständiger Beton

→ Schutzbelag anbringen

Gute Funktionsfähigkeit

z.B. bzgl. Rissen in Zwischenwänden

→ Beschränkung der Durchbiegungen durch geeignete Wahl der Abmessungen

Bestimmtes Aussehen

z.B. bzgl. Rissen

→ Beschränkung der Dehnungen in den Bewehrungsstäben, Beschränkung der Stababstände

Guter Komfort der Benutzer

z.B. bzgl. Schwingungen

→ Geeignete Ausbildung des Tragwerks

1.3.5. Nachweis - Konzepte

Methoden für die Gewährleistung von Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit werden in Nachweis-Konzepten analytisch festgehalten. Im folgenden werden zwei Konzepte vorgestellt.

Konzept 1: Vergleich von Spannungen

Bei diesem älteren Konzept werden Spannungen in einem Tragwerk aufgrund der Beanspruchung im Gebrauchszustand (infolge eines Kennwertes der Einwirkungen) berechnet und mit sog. zulässigen Spannungen verglichen.

Es muss nachgewiesen werden:

$$\sigma_{ser} \leq \sigma_{adm} \quad (1)$$

σ_{ser} : Spannungen im Gebrauchszustand (service)

σ_{adm} : zulässige Spannungen (admissible)

Spannungen im Gebrauchszustand treten tatsächlich auf und werden nicht mit einem Sicherheitsfaktor erhöht. Deshalb müssen die zulässigen Spannungen niedrig angesetzt werden, da allein durch sie Unsicherheiten bei der Bemessung abgedeckt werden.

Vorteile von Konzept 1:

- Die Anwendung ist äußerst einfach
- Durch vorsichtiges Ansetzen der zul. Spannungen lassen sich i.a. sowohl Beanspruchungen, als auch Verformungen in Grenzen halten. Das Einhalten der zul. Spannungen führt deshalb i.d.R. zu ausreichender Tragsicherheit und oft - aber nicht immer - auch zu gutem Gebrauchverhalten.
- Ein separater Nachweis der Gebrauchstauglichkeit entfällt demzufolge.
- Der Bemessungsaufwand ist eher gering.

Nachteile von Konzept 1

- Unsicherheiten aller Art (Belastung, Modell, Ausführung u.s.w.) werden pauschal durch Reduktion der Festigkeitswerte auf zul. Spannungen abgedeckt. Individuelle Sicherheitsanforderungen in einzelnen Situationen lassen sich kaum berücksichtigen.
- Aussagen über die rechnerische Tragsicherheit sind nur für den jeweils betrachteten Schnitt möglich. Die Systemsicherheit, die i.o. höher liegt (stat. unbest. Systeme), bleibt unbekannt.
- Gewisse Tragsysteme lassen sich infolge lokaler "Überbeanspruchung" mit diesem Konzept nicht sinnvoll bemessen (z.B. in Flachdecken können direkt über der Stütze bereits bei ca. 10% der Systemtraglast die zul. Spannungswerte von Stahl und Beton erreicht werden).
- Die Gebrauchstauglichkeit wird nur sehr pauschal erfasst.

Konzept 2: Vergleich von Beanspruchungen aus erhöhten Lasten mit dem abgeminderten Tragwiderstand, sowie separater Gebrauchstauglichkeitsnachweis

Allgemeine Bemessungsbedingung

Nachweise sollen grundsätzlich dem Prinzip folgen

"Unschärfen sind dort zu erfassen, wo sie entstehen"

Aus diesem Grund führt man auf Seite der Einwirkungen (Beanspruchungen) Lastfaktoren γ_s und auf Seite des Widerstandes Widerstandsbeiwerte γ_R ein. Die von Fall zu Fall individuellen Streuwerte (z.B. von Windlasten, Schneelasten, Erdbeben, usw., oder von Betonabmessungen, Baustofffestigkeiten, ungenauer Bewehrungsanordnung, usw.) können so berücksichtigt werden.

Es muss nachgewiesen werden :

$$\boxed{S_d \leq \frac{R}{\gamma_R}} \quad 2a)$$

S_d : Bemessungswert der Beanspruchung (Stress) als Funktion der mit Lastfaktoren multiplizierten Kennwerte der Einwirkungen. (Die Beanspruchungen werden meist in Form von Schnittkraftgrößen, d.h. $N_d, N_{d,1}, V_d, \bar{V}_d$ bei Stabtragwerken, ausgedrückt.)

R : Tragwiderstand: Ermittlung mit Nennwerten der Baustofffestigkeiten. (Der Tragwiderstand wird meist ebenfalls in Form von Schnittkraftgrößen, d.h. $N_R, N_{R,1}, V_R, \bar{V}_R$ bei Stabtragwerken, ausgedrückt.)

$\frac{R}{\gamma_R}$: Bemessungswert des Tragwiderstandes

γ_R : Widerstandsbeiwert (z.B. gem. SIA 162: $\gamma_R = 1,20$)

Oder nach Umformung von 2a)

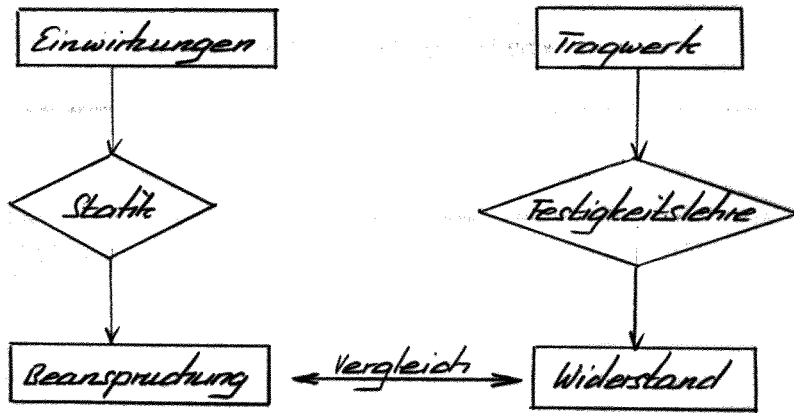
$$\boxed{S^* = \gamma_R \cdot S_d \leq R} \quad 2b)$$

S^* : "Beanspruchung auf Bruchniveau"

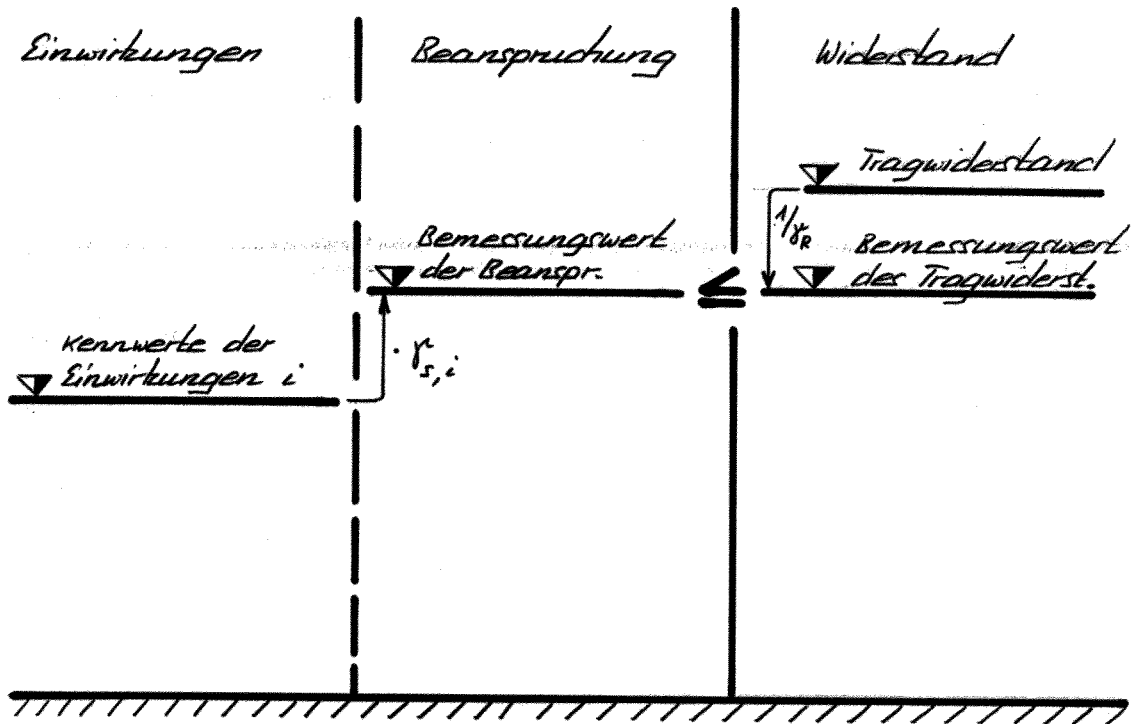
Der Tragsicherheitsnachweis kann also anstatt auf "Bemessungsniveau" 2a) auch auf "Bruchniveau" 2b) durchgeführt werden (Ausnahme: Nichtlineare Probleme wie z.B. Probleme 2. Ordnung).

Verifikation der Bemessungsbedingung

- Allgemein gilt :



- Gemäss Bedingung 2 a) :



● Zuordnung der Unsicherheiten :

z.B. gemäss SIA 160 :

Die Lastfaktoren $\gamma_{s,i}$ berücksichtigen Unsicherheiten bzgl.

- Variation der Raumlast der Baustoffe,
- Variation der Eigenlast infolge unvorhergesehenen Abweichungen der Abmessungen der Bauwerks,
- Grösse und Lage von veränderlichen Einwirkungen.

Der Widerstandsbeiwert γ_R berücksichtigt Unsicherheiten bzgl.

- Modellbildung (Widerstandsmodelle)
- Rechenregeln (Näherungsmethoden)
- Unregelmässigkeiten bei der Bauausführung (Querschnittsabmessungen, fehlende Eisen, "Kiesnerler").

Die Unsicherheiten bei den Baustoffeigenschaften werden durch Annahme von vorsichtigen Rechenwerten (f_c, \bar{f}_c, f_y) berücksichtigt.

Das dargestellte Konzept 2 ermöglicht nur den Nachweis der Tragsicherheit. Der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit ist getrennt und mithilfe der Gebrauchslasten (i.a. \neq Kennwerte der Einwirkungen) durchzuführen.

Vorteile von Konzept 2

- Aussagen betr. Systemrichtigkeit sind möglich.
- Getrennte Berücksichtigung der Streuungen auf Seite der Einwirkungen und auf Seite des Widerstandes erlauben eine differenziertere Sicherheitsbetrachtung.
- Dieses Konzept lässt sich für sämtliche Baustoffe und Bauweisen verwenden. Für verschiedene Baustoffe ändert einzig der Widerstandsbeiwert γ_R .
- Die Gebrauchstauglichkeit kann differenziert erfasst werden.

Nachteile von Konzept 2

- Der gebirnt durchzuführende Gebrauchstauglichkeitsnachweis kann einen höheren Rechenaufwand bewirken.

Normen und deren Konzepte

Stahlbeton / Spannbeton	SIA 162 (1968) [12]	Konzept 1
	SIA 162 (1989) [13]	" 2
	CEB/FIP (1990) [16]	" 2
	ACI (1983) [17]	" 2
Stahlbau	SIA 161 (1991) [18]	" 2
Holzbau	SIA 164 (1981) [19]	" 1
Mauerwerk	SIA 177 (1980) [20]	" 1
	177/2 (1989) [20]	" 2

1.3.6. Einwirkungsnorm SIA 160

Die Norm SIA 160 (1989) "Einwirkungen auf Tragwerke" basiert auf dem Nachweis Konzept 2. Somit sind geübene Nachweise für Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit zu führen.

a) Arten von Einwirkungen

Die Norm unterscheidet 4 Arten von Einwirkungen (Art 1.1):

- Eigenlasten des Tragwerks
- Ständige Einwirkungen
 - Auflasten (Beläge, nichttragende Wände, usw.)
 - Einwirkungen aus dem Baugrund
 - Vorspannung
- Veränderliche Einwirkungen
 - Nutzlasten in Gebäuden
 - Schnee
 - Wind
 - Temperatur
 - Nutzlasten auf Bauwerken für Fußgänger und Radfahrer
 - Straßenlasten
 - Bahnlasten für Normalspur
 - Bahnlasten für Schmalspur
 - Kranbahnlasten
 - Reibungs- und Rückstellkräfte von Lagern
 - Kräfte auf Geländer und Leitmauern
- Aussergewöhnliche Einwirkungen
 - Anprall
 - Entleerungslasten
 - Brand
 - Explosion
 - Erdbeben

b) Nachweis der Tragsicherheit

Bemessungsbedingung: $S_d \leq \frac{R}{\gamma_R} \quad 2a)$

Die Gefährdungsbilder sind massgebend für die zu berücksichtigenden Kombinationen von Einwirkungen. Jedes Gefährdungsbild entspricht einer Kombination von Einwirkungen. Jede Kombination von Einwirkungen wird erfasst durch einen Bemessungswert der Beanspruchung:

$$S_d = S(G_d, Q_d, \sum Q_a)$$

S_d berücksichtigt

- den Bemessungswert der Eigenlasten G_d des Tragwerkes.
- den Bemessungswert einer Leiteinwirkung Q_d .
(Die Leiteinwirkung ist eine massgebende Einwirkung in externer Form und Grösse)
- eine Summe der Bemessungswerte der Begleiteinwirkungen $\sum Q_a$.

S_d beträgt

- wenn die Leiteinwirkung entweder eine ständige oder eine veränderliche Einwirkung ist:

$$S_d = S(\gamma_G \cdot G_m, \gamma_Q \cdot Q_r, \sum \psi \cdot Q_r)$$

- wenn die Leiteinwirkung eine aussergewöhnliche Einwirkung ist:

$$S_d = S(G_m, Q_{acc}, \sum \psi_{acc} \cdot Q_r)$$

Es bedeuten:

$G_d = \gamma_G \cdot G_m$: Bemessungswert der Eigenlasten des Tragwerkes

G_m : Mittelwert der Eigenlasten des Tragwerkes

$\gamma_G = 1,3; 0,8$: Lastfaktor für Eigenlasten des Tragwerkes

$Q_d = \gamma_a \cdot Q_r$: Bemessungswert der Leiteinwirkung, wenn diese eine ständige oder veränderliche Einwirkung ist.

Q_r : Kennwert der Einwirkung

$\gamma_a = 1,5 (1,2)$: Lastfaktor für die Leiteinwirkung

$Q_d = Q_{acc}$: Bemessungswert der Leiteinwirkung, wenn diese eine aussergewöhnliche Einwirkung ist.

$Q_a = \psi \cdot Q_r$: Bemessungswert der Begleiteinwirkung, wenn die Leiteinwirkung eine ständige oder veränderliche Einwirkung ist.

$\psi = 13 \div 0$: Lastfaktor für die Begleiteinwirkung

$Q_{a, acc} = \psi_{acc} \cdot Q_r$: Bemessungswert der Begleiteinwirkung, wenn die Leiteinwirkung eine aussergewöhnliche Einwirkung ist.

ψ_{acc} : Lastfaktor für die Begleiteinwirkung, wenn die Leiteinwirkung eine aussergewöhnliche Einwirkung ist.

c) Nachweis der Gebrauchstauglichkeit

Die Nutzungszustände sind massgebend für die zu berücksichtigenden Kombinationen von Einwirkungen. Jeder Nutzungszustand entspricht einer Kombination von Einwirkungen.

Bei den verschiedenen Einwirkungen werden unterschieden:

- Langzeit - Wert : $Q_{ser, lang}$
- Kurzzeit - Wert : $Q_{ser, kurz}$

Diese Werte sind i. a. verschieden zu dem beim Nachweis der Tragsicherheit verwendeten Kennwert der Einwirkung.

$Q_{ser, lang}$ gilt für ständige Einwirkungen oder für während langer Zeit vorhandene Anteile der veränderlichen Einwirkungen.

$Q_{ser, kurz}$ gilt für während kurzer Zeit auftretende veränderliche Einwirkungen und enthält auch deren während langer Zeit vorhandenen Anteil.

Nachzuweisen sind je nach Tragwerksart oder Nutzungszuständen:

- Rissbreiten
- Verformungen: - Durchbiegungen (vertikal) z.B. infolge von Eigenlasten, Auflasten, Nutzlasten
- Auslenkungen (horizontal) z.B. infolge von Wind, Erdbeben
- Schwingungen
- usw. (siehe auch SIA 162)

1.4. Wirklichkeit und Modell

Grundlegende Problematik der Ingenieurwissenschaften !!

Ing. mässige Berechnungen können praktisch nie die Wirklichkeit vollumfänglich umfassen. Sie wiedergeben stets nur das Verhalten eines (Gedanken-) Modells.

Der Begriff Modell wird hier verwendet für die

"Vorstellung einer physikalischen Gegebenheit, die gegenüber der Wirklichkeit vereinfacht, abstrahiert ist."

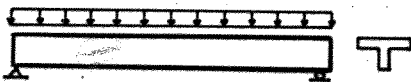
"Modell = Idealisiertes Abbild der Wirklichkeit"

Zu einem Modell gehören auch die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen, welche mit der Wirklichkeit mehr oder weniger gut übereinstimmen können.

Das Bilden von Modellen hat eine zentrale Bedeutung in der Tätigkeit des Ingenieurs. Hier werden sozusagen alle wichtigen "Weichen" gestellt.

Beispiele von Modellen:

Wirklichkeit:

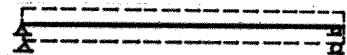


Balken im Hochbau
Brückenträger

Problemstellung:

Ermittlung der
Schnittkräfte

Modell:



Unendlich dünner
Stab

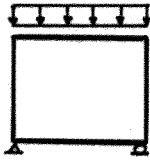


In einer Richtung
tragende Platte

Bemessung der
Hauptbewehrung

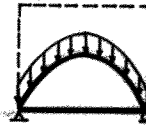


einzelne, nebeneinander-
gelegte Balken von
z.B. 1 m Breite.

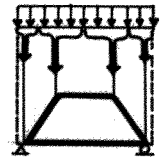


Von oben belastete
Scheibe

Bemessung
der
Bewehrung



Bogen mit
Zugband



Fachwerk

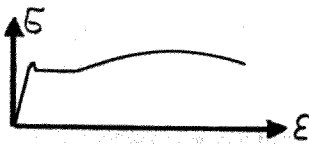


Balken

Querkrafts-
bemessung

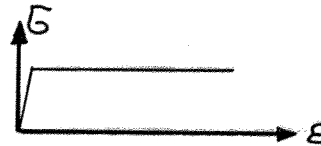


Fachwerk



σ - ϵ -Diagramm
von Stahl

Stoffgesetz



Weitere wichtige Tätigkeiten des Ingenieurs sind

Das Entwerfen

Das Konstruieren

Das Rechnen (Algorithmen durchführen)

Merke:

Rechenergebnisse sind immer nur so gut (oder schlecht!),
wie das der Berechnung zugrundegelegte Modell!

Literatur: [21]

1.5. Allgemeine Literatur

Lehrbücher :

Rüsch [22], Leonhardt [23], Franz [24]
 Pucher [25], Mörsch [26], Berk + Paulay [27]

Handbücher, Normen und Tabellen :

Beton - Kalender [28], CEB/FIP Mustervorschrift [16]
 SIA-Norm 160 [7][8], Weisungen SIA 260 [5]
 SIA-Norm 162 [12][13][9],
 Stahlbeton-Tabellen [30] (Walther)
 [31] (Holacker)
 [32] (Stahlton)

Zeitschriften / Periodika

Schweizer Ingenieur und Architekt (Bauzeitung)
 Beton- und Stahlbetonbau
 Der Bauingenieur
 Die Bautechnik
 Concrete International (ACI)
 Journal of the Prestressed Concrete Institute (PCI)
 Concrete
 Civil Engineering (ASCE)
 Magazine of Concrete Research
 Journal of the American Concrete Institute (ACI)
 Annales de l'Institut Technique du Batiment

Abkürzungen

SIA Schweizer Ingenieur- und Architektenverein
 CEB : Comité Européen du Béton
 FIP : Fédération International de la Précontrainte
 ACI : American Concrete Institute
 PCI : Prestressed Concrete Institute

2. Technologische Grundlagen

2.1. Beton [33]

Abgrenzung (SIA 162)

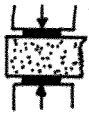
- Beton: Grösstkorn der Zuschlagstoffe $> 8 \text{ mm}$
- Mörtel: Grösstkorn der Zuschlagstoffe $\leq 8 \text{ mm}$

Unterscheidungen des Betons nach der

- Rohdichte: Kiesbeton (B) $\rho = 2000 \div 2800 \text{ kg/m}^3$
Leichtbeton (LB) $\rho < 2000 \text{ kg/m}^3$
- Würfeldruckfestigkeit: B 25/15, B 30/20, ..., ... B 45/35 ...
(SIA 162) LB 20/10, ...
 - f_{cwm} : Mittelwert der Würfeldruckfestigkeit nach 28 Tagen
 - $f_{cwm, min}$: Für die Bemessung massg. Mindestwert der Würfeldruckfestigkeit nach 28 Tagen (siehe S. 2-12)
- Herstellung: Ortsbeton
Transportbeton (Fertigbeton)
- Phasen: Frischbeton (vor der Verarbeitung)
Festbeton (nach der Verarbeitung)
- Verarbeitung: Vibrierter Beton (Rüttelbeton)
Gussbeton
Pumpbeton
Spritzbeton
Stampfbeton
Schleuderbeton

Normen - Druckfestigkeiten nach SIA 215 [34]

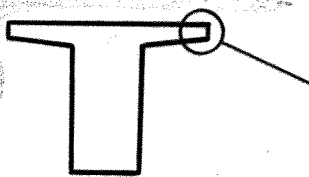
Bestimmt an liegenden Prismenhälften (nach Biegezugversuch) mit Normsand $0 \div 5 \text{ mm}$ und Wasserzementwert $0,44$.

 $40 \times 40 \times \frac{160}{2} \text{ [mm]}$	Abbindebeginn nicht vor	min. Druckfestigkeit nach		
		24 h	48 h	28 Tage
PC PCS 5 PEHS	120 min	—	20 N/mm ²	50 N/mm ²
HPC	60 min	—	35 N/mm ²	65 N/mm ²
Schellbindender Zement	1,5 min	15 N/mm ²	—	45 N/mm ²

Erhärtung

Chemische Reaktion zwischen Wasser und Zement.
(Zementbrei erhärtet auch unter Wasser).

Wärmeentwicklung durch Erhärten:



→ rascheres Abkühlen als Steg

→ Wärmeeigenspannungen
→ Risse!

Prüfmethoden

Ermittlung diverser chemischer und physikalischer Kenngrößen → siehe Norm SIA 215

b) Zuschlagstoffe

- Sand $0 \div 8 \text{ mm}$
 - Kies $8 \div 16, 32, 64 \text{ mm}$
- } Rundmaterial aus Flussablagerungen oder künstlich gebrochenes Material.

Eignung der Zuschlagstoffe

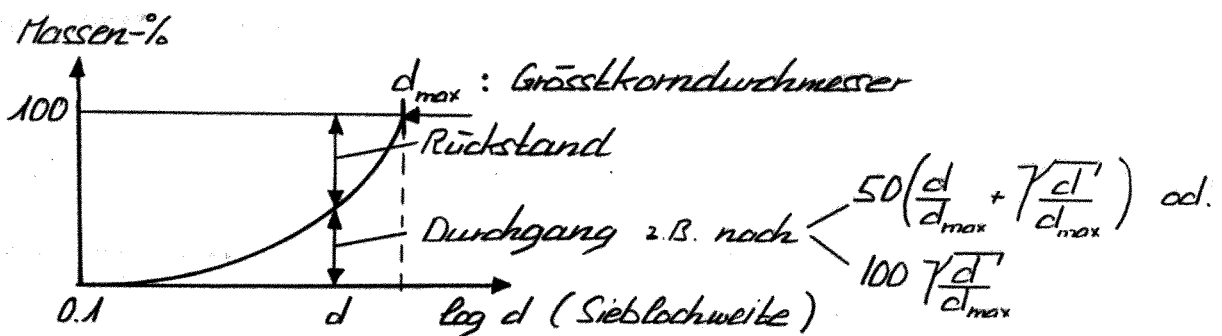
Je nach Verwendungszweck ist zu überprüfen:

- Druckfestigkeit ($> 100 \text{ N/mm}^2$)
- Abriebfestigkeit
- Kornform
- Oberflächenbeschaffenheit
- Frostbeständigkeit

Die Gesteinqualität von Rundmaterial aus Flussablagerungen ist meistens gut, da die schlechten Komponenten durch "natürliche Auslese" ausgeschieden wurden.

Kornobstufung

Die Siebkurve soll etwa der folgenden Korngrößenverteilung entsprechen:



Diskussion:

- Größtkorndurchmesser d_{max} :

$d_{max} < 1/3$ der kleinsten Bauteilabmessung.

$d_{max} < \text{kleinster lichter Abstand der Bewehrungsstäbe.}$

- Feinstanteile:

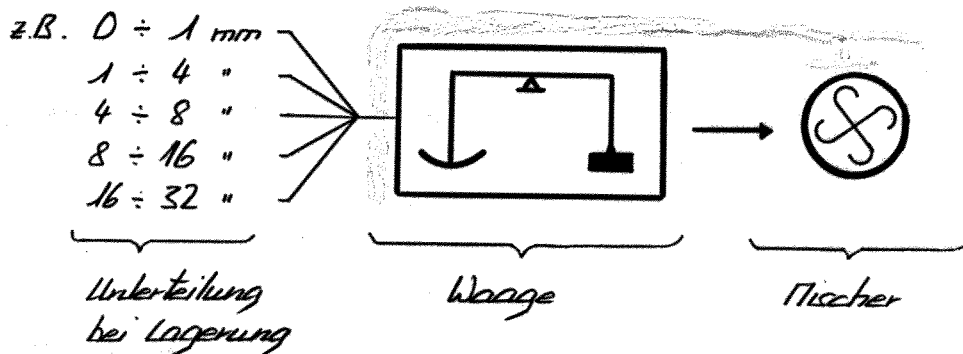
Geringer Anteil bis max. 1 ÷ 2 % erwünscht
 → bessere Verarbeitung, höhere Dichtigkeit

Achtung vor organischen Verunreinigungen und lehmig-tonigen Bestandteilen (Absetzversuch). Sie sind durch Waschen auszuscheiden!

- Viel Kies \rightarrow Tiefe Kurve:
Hohe Betonfestigkeit durch größere Körnung.
- Viel Sand \rightarrow Hohe Kurve:
Gute Verarbeitbarkeit durch feinere Körnung sowie durch kugelige und glatte Zuschlagstoffe.
Achtung: Hoher Sandanteil erfordert i.a. mehr Zement und erhöht Schwinden und Kriechen.

Zusammenstellung der gewünschten Siebkurve:

Anlieferung der Zuschlagstoffe i.a. nach Komponenten gebrennt



Ausfallkörnung:

Fehlen eine oder mehrere Komponenten, ergibt sich eine sog. Ausfallkörnung. Hinsichtlich Zementbedarf, Betonfestigkeit, sowie Kriech- und Schwindeigenschaften kann sich eine Ausfallkörnung u.U. günstig auswirken. Eignungsprüfung in Vorversuchen erforderlich.

c) Wasser

Keine schädlichen Beimengungen wie z.B. Öl, Säuren, usw.
Härwasser (Salz) schlecht \rightarrow Korrosion der Bewehrung!

d) Zusatzmittel

Substanz (meist auf chemischer Basis), die bestimmte Eigenschaften des Frisch- oder Festbetons vorübergehend oder dauernd beeinflusst. Wird dem Beton kurz vor oder während dem Mischen beigegeben.

Die Zweckmäßigkeit der Zusatzmittel ist oft umstritten, da neben der gewünschten Qualitätsverbesserung bei falscher Dosierung oder bei Kombination mit bestimmten Zementarten, sich u. U. schädliche Nebenwirkungen ergeben.

Eignung durch Vorversuche überprüfen!

Plastifizierungsmittel : Reduziert die Oberflächenspannung des Wassers
(verflüssiger)

→ Bessere Verarbeitbarkeit bzw.
kleinerer Wasserbedarf → Höhere Betonfestigkeit!

Dichtungsmittel :

Vermindert Wasserdurchlässigkeit
Achtung: Festigkeitsverluste bei falscher Dosierung!

Luftporenbildende Zusätze :

Erhöhen Frostbeständigkeit
Achtung: Bewirken etwas höhere Kriechmasse!

Beschleuniger :

Rascheres Abbinden
Achtung: Um Korrosion der Bewehrung zu vermeiden nur chloridfreie Zusatzmittel verwenden!

Verzögerer :

Abbinden um einige Stunden verzögert.

Frostschutzmittel :

Achtung auf Chloride → Korrosion.

2.1.2. Zusammensetzung und Verarbeitung

Betoneigenschaften v. a. abhängig von

- | | |
|-----------------|---|
| Zusammensetzung | - Zementgehalt |
| | - Menge des Anmachwassers |
| | - Kornabstufung und Qualität der Zuschlagstoffe |
| | - Füllkorngehalt |
| Verarbeitung | - Verdichtung |
| | - Nachbehandlung |

a) Zusammensetzung

Zementmenge

Je nach Anforderungen an den Beton: $250 \div 400 \text{ kg/m}^3$ fertigen Betons

Mindestzementgehalt für ausreichenden Korrosionsschutz der Bewehrung:

$250 \div 300 \text{ kg/m}^3$ fertigen Betons
 Baukeil der Witterung entzogen

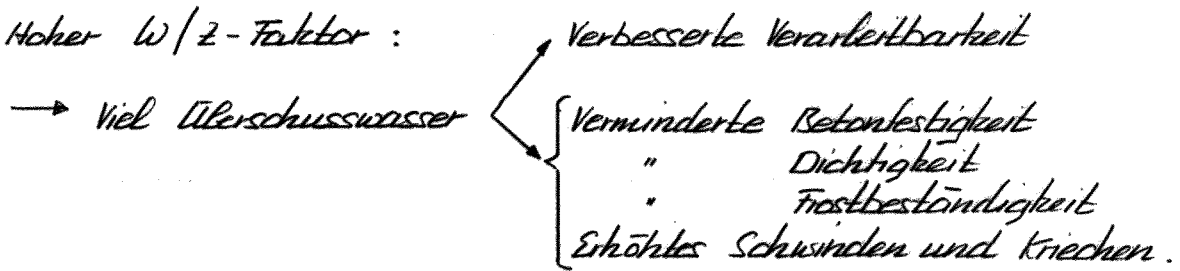
Wassergehalt

Zwei Aufgaben des Wassers

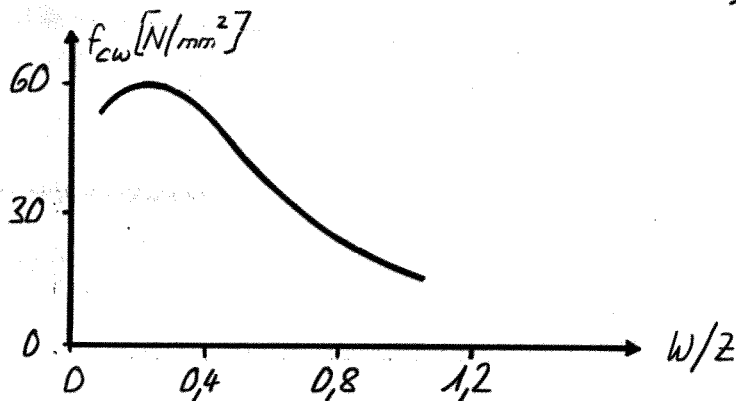
1. Wassergewicht für chemische Reaktion des Zementes
 $\approx 15\%$ des Zementgewichtes (bleibt chemisch gebunden,
2. Rest zur Verarbeitung nötig \rightarrow "Überschusswasser"
 (Ein Teil davon bleibt physikalisch gebunden, der andere Teil verdunstet \rightarrow Poren).

Wasser - Zement - Faktor (Gewichtsteile)

Hoher W/Z-Faktor :



Einfluss des W/Z-Faktors auf die Betonfestigkeit :



Folgerung:

Möglichst wenig Wasser!

Unterer Grenzwert des Wassergehaltes aus Anforderungen für die Verarbeitbarkeit (Konsistenz) pro m³ fertigen Beton:

Erdfeuchter Beton	W/Z ≈ 0,43 ÷ 0,49	: 130 ÷ 150 l/m ³
Plastischer Beton	W/Z ≈ 0,49 ÷ 0,56	: 150 ÷ 170 l/m ³
Gießfähiger Beton	W/Z ≈ 0,56 ÷ 0,63	: 170 ÷ 190 l/m ³

(Zahlenwerte für PL 300 und rundes, gut abgestuftes Sandkiesmaterial, ohne Plastifizierungsmittel.)

Achtung: - Gießfähiger Beton ist u.U. nicht frostbeständig.
- Eigenfeuchtigkeit der Zuschlagstoffe beachten.

Zuschlagstoffe

Möglichst nach Gewicht zugeben

Trockener Rundsandkies per m³ fertigen Beton:

Erdfeuchter Beton	: 1860 ÷ 2000 kg/m ³
Plastischer Beton	: 1820 ÷ 1970 kg/m ³

Mehlkorngehalt

Zuschläge von $0 \div 0.125\text{mm}$ (inkl. Zement)

Minimaler Gehalt von $300 \div 425 \text{ kg/m}^3$ notwendig für:

- Verarbeitbarkeit
- Dichtigkeit
- Frostbeständigkeit

b) Verarbeitung

Verdichtung

Vibration durch - Nadelvibratoren (auch Tauch-, Flaschen-
od. Innenvibrator genannt)
- Schalungs- resp. Aussenvibratoren.

Nachbehandlung

Massnahmen:

- langes Feuchthalten zur Vermeidung von Schwindrispen
(Besieeln, Aufbringen eines Luffilms, Abdecken
z.B. mit Isolationsmatten, Plastic-Folien, evtl. Sand)
- Ableiten der Hydratationswärme bei Massenbeton
(z.B. durch einbetonierte Kühlwasserleitungen in Stauwauern)
- Revibration ca. 1/2 bis 5 Stunden nach Verarbeitung
(v.a. durch Schalungsvibratoren)
- Dampferhärtung: 100% Luftfeuchtigkeit und Wärme
→ schnelle Erhärten!
- Vakuum-Behandlung: Erhärtung in nur wenigen Stunden
im Autoklav.

2.1.3. Festigkeitseigenschaften

a) Druckfestigkeit f_c

Druckfestigkeit als wichtigstes Qualitätsmerkmal des Betons ist generelle Bezugsgröße für statische Berechnungen:

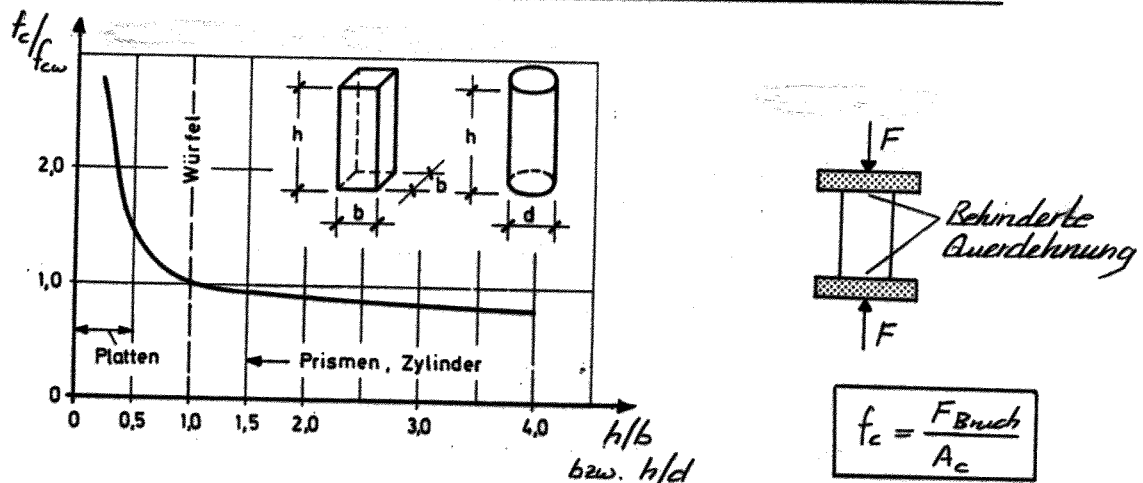
z.B. SIA 162	}	Druckfestigkeit $f_{cw,28}$ des Würfels $200 \times 200 \times 200$, nach 28 Tagen
DIN 1045		
CEB FIP	:	Druckfestigkeit $f_{c,28}$ des Prismas $150 \times 150 \times 300$ mm nach 28 Tagen
ACI	:	Druckfestigkeit $f_{c,28}$ des Zylinders 152×305 mm (28 Ta.)

Kontrolle der in Rechnung gestellten Druckfestigkeiten an Probekörpern

- in Vorversuchen anhand von Probemischungen,
- unmittelbar während des Baus zur Überwachung und Ermittlung der Stellungen.

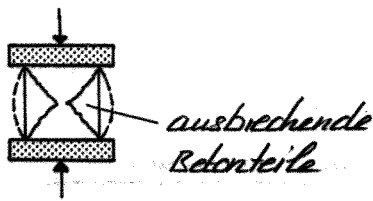
Nachträgliche Kontrollen z.B. durch Bohrkernentnahme oder zerstörungsfrei mit Betonprüfhammer.

Abhängigkeit der Druckfestigkeit von der Prüfkörperform [23]

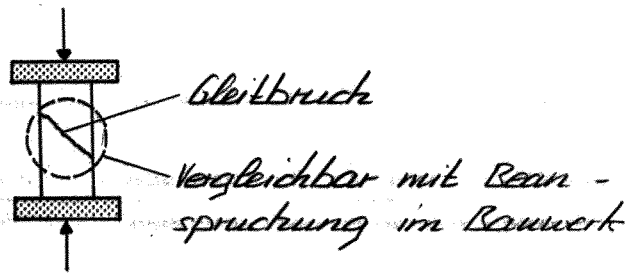


Beeinflussung des Bruches durch die behinderte Querdehnung in den Kontaktflächen Beton - Stahlpfanne wird mit zunehmendem h/b bzw. h/d kleiner.

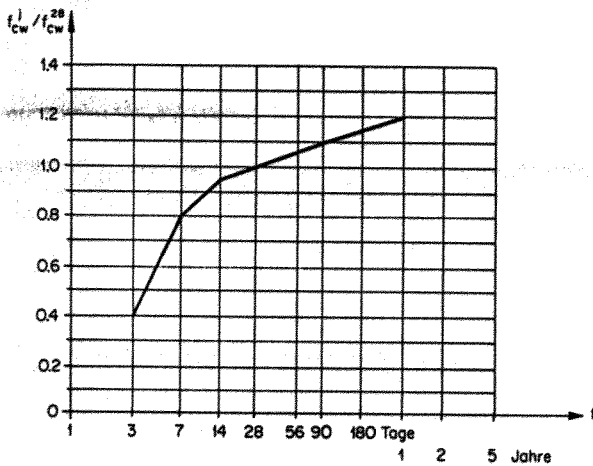
Würfel: f_{cw}



Prisma: $f_c \cong (0,75 \div 0,85) f_{cw}$



Abhängigkeit der Druckfestigkeit vom Alter des Betons

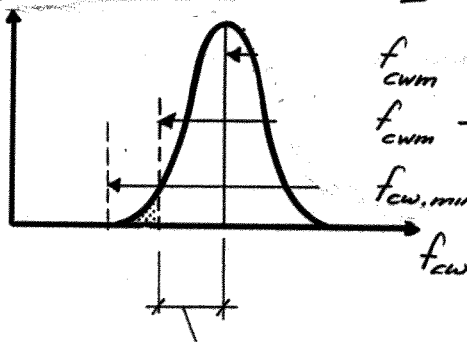


Festigkeitsentwicklung
u.a. auch abhängig
von Umgebungstemp.

Streuung der Würfeldruckfestigkeit

Häufigkeit

Häufigkeitskurve



f_{cwm} : Mittelwert
 $f_{cwm} - s$: 16% -Fraktile
 $f_{cw, min}$: Mindestwert (siehe klinken)

Standardabweichung s

Mindestwert der Druckfestigkeit $f_{cw, min}$ (SIA 162)

- Klassifikation anhand laufender Kontrollen an mind. 30 Probekörpern (200 x 200 x 200 mm):

$$f_{cwm} - \lambda \cdot s \geq f_{cw, min}$$

mit $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_{cwi} - f_{cwm})^2}{n-1}}$: Standardabweichung

n : Anzahl Probekörpern (Würfel 200 x 200 x 200 mm)

λ :

Anz. Probekörper	30	40	50	75	100
Beiwert λ	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0

- Stichproben mit mind. 3 Probekörpern (200 x 200 x 200 mm)

$$f_{cwm} - 10 \text{ N/mm}^2 \geq f_{cw, min}$$

und

$$\text{Max. } f_{cwi} - \text{Min } f_{cwi} \leq \Delta f_{cw}(n)$$

mit $\Delta f_{cw}(n)$:

Anz. Probekörper	3	6	9	12	15
$\Delta f_{cw}(n)$ w.l.	9	11	13	15	16

N/mm²

- Anstelle von Probekörpern 200 x 200 x 200 mm können Klassifikation und Stichproben auch mit Hilfe von Bohrkernen erfolgen. Die diesbezüglichen Anforderungen sind der Norm SIA 162 zu entnehmen.

Rechenwert der Druckfestigkeit f_c (SIA 162)

Ausgehend vom Mindestwert der Würfeldruckfestigkeit $f_{w, \min}$ gilt für den Rechenwert der Druckfestigkeit:

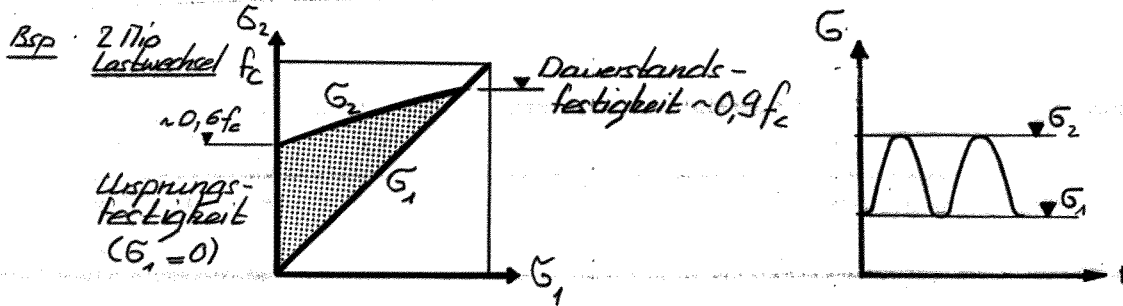
$$f_c = 0,65 \cdot f_{w, \min}$$

Der Reduktionsfaktor 0,65 berücksichtigt:

- Den Unterschied zwischen Tragwert und Probekörper
- Den Unterschied zwischen Prismendruckfestigkeit und Würfeldruckfestigkeit
- Langzeiteinflüsse

Die genaue Durchführung der Prüfungen ist in der "Prüfnorm" SIA 162/1 [42] beschrieben.

Druckfestigkeit bei häufigem Spannungswechsel (Ermüdungsfestigkeit)

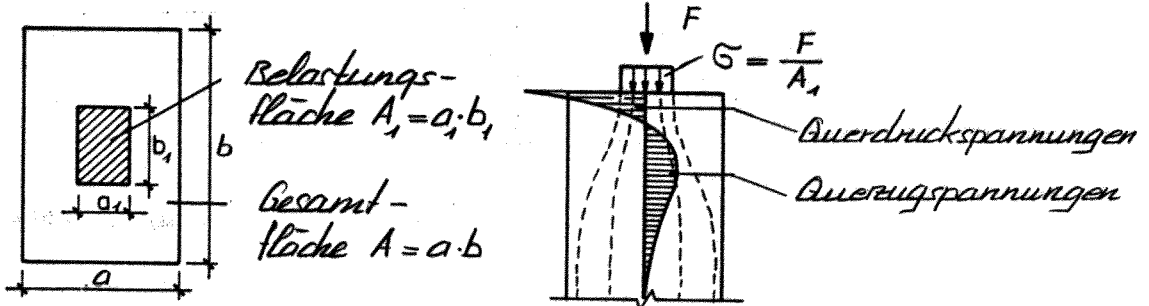


Ermüdung des Betons u.U. wesentlich bei hohem Verhältnis Verkehrslast / Eigengewicht, stark schwingungsbeanspr. Bauteilen, u.s.w.

b) Festigkeit bei örtl. hoher Pressung [19]

last wirkt nur auf Teilfläche, z.B. unter

- Lagerplatten
- Ankerplatten von Spanngliedern

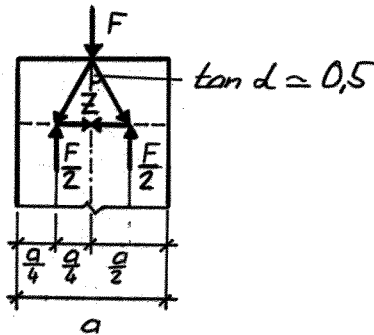


Aus Versuchen:

- Für unbewehrten Kie beton: $\sigma_{\text{Bruch}} = \frac{F_{\text{Bruch}}}{A_1} \approx f_c \sqrt{\frac{A}{A_1}}$
- Für unbewehrten Leichtbeton (Blähtonbeton): $\sigma_{\text{Bruch}} = \approx f_c \sqrt[3]{\frac{A}{A_1}}$

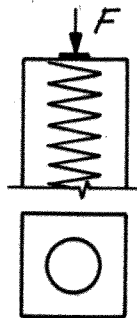
Verhinderung eines plötzlichen gefährlichen Bruches beim Auftreten der ersten Risse (ohne Vorankündigung) durch Spaltzugbewehrung!

Kräftemodell:

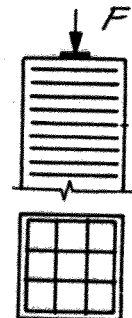


$$z \approx \frac{F}{4}$$

Möglichkeiten für Bewehrung:



Umschlingung durch Spiralbewehrung



Horizontale, gut verteilte Bügel als Spaltzugbewehrung

Bei ausreichender Spaltzugbewehrung darf für den Tragsicherheitsnachweis bei örtlicher Pressung die Betonfestigkeit erhöht werden:

$$f_{c, sup} = 0,65 \cdot f_{cw, min} \sqrt{\frac{A}{A_s}} \leq 1,8 \cdot f_{cw, min} \quad (\text{SIA 162})$$

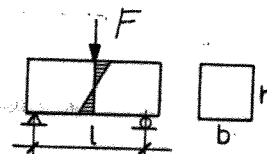
Achtung: $f_{cw, min}$ reduzieren, falls Belastung früher als 28 Tage nach dem Betonieren!

d) Zugfestigkeit f_{ct}

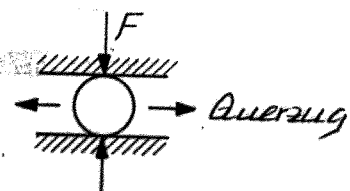
Infolge von Störeinflüssen, wie zufällige Schwachstellen, Schwindmikrorisse, usw., streuen die Versuchsergebnisse erheblich.

Anhaltspunkte für die Zugfestigkeit geben der

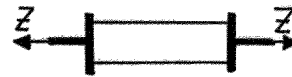
- Biegezugversuch
(Gibt etwa doppelt so grosse Werte wie beim eigentlichen Zugversuch)



- Spalt- bzw. Querzugversuch
(sog. Brasilianerversuch)



- Eigentlicher Zugversuch
(Kraftübertragung z.B. durch aufgeklebte Stahlplatten)



Die Zugfestigkeit kann abgeschätzt werden mit:

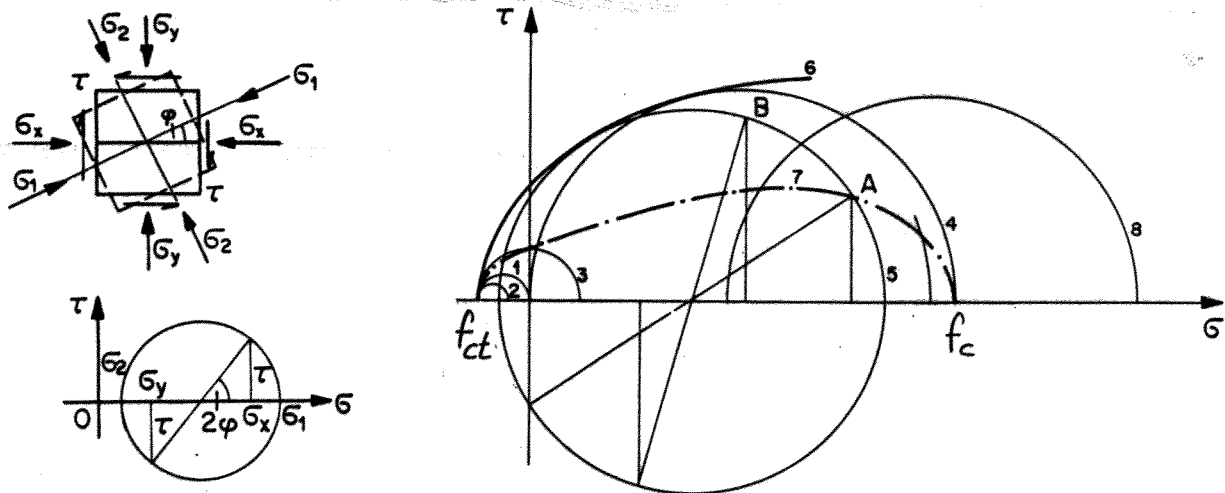
$$f_{ct} \approx 0,4 \div 0,5 \cdot \sqrt{f_{cwm}} \quad [N/mm^2]$$

Die rechnerischen Werte der Zugfestigkeit werden in SIA 162 folgendermassen angegeben:

Betonart	< (L) B 35/25	≥ (L) B 35/25
$f_{ct} [N/mm^2]$	2,0	2,5

d) Festigkeit bei mehraxialer Beanspruchung

Ebener Spannungszustand nach vereinfachtem Mohr'schem Kreis:

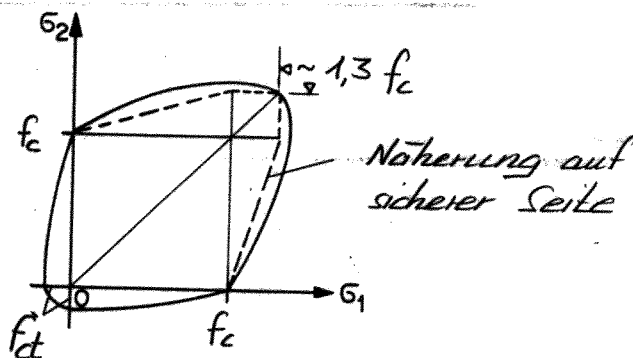


- 1 Einaxialer Zug (Zugfestigkeit zu $\sim f_c / 8$ angenommen)
 - 2 Zweiaxialer Zug
 - 3 Reine Schubbeanspruchung ($\sigma_1 = -\sigma_2$)
 - 4 Einaxialer Druck
 - 5 Allg. Spannungskreis
 - 6 Mohr'sche Umhüllende als quadratische Parabel angenommen.
- Sämtliche berührenden Spannungskreise entsprechen einer Bruchbeanspruchung

7 Kurve für die Schubdruckfestigkeit ($\sigma_y = 0$, Punkt A).
 Sämtliche Punkte auf dieser Kurve entsprechen einer Bruchbeanspruchung wenn $\sigma_y = 0$. z.B. in Punkt B grösseres τ mögl. als in A, da $\sigma_y > 0$.

8 Zweiachsialer Druck Gültigkeitsgrenze aus folgender

Bruchgrenzkurve:

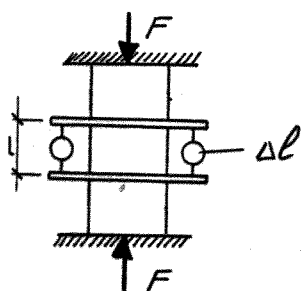


Bei dreiaxialem Druck noch wesentliche Erhöhung möglich!

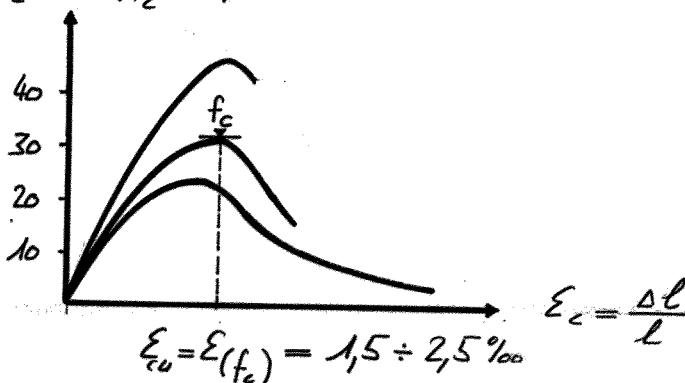
2.1.4. Verformungseigenschaften

a) Spannungs-Dehnungs-Diagramm

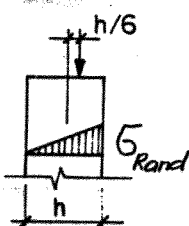
Versuch an Prisma



$$\sigma_c = F/A_c \text{ [N/mm}^2\text{]}$$



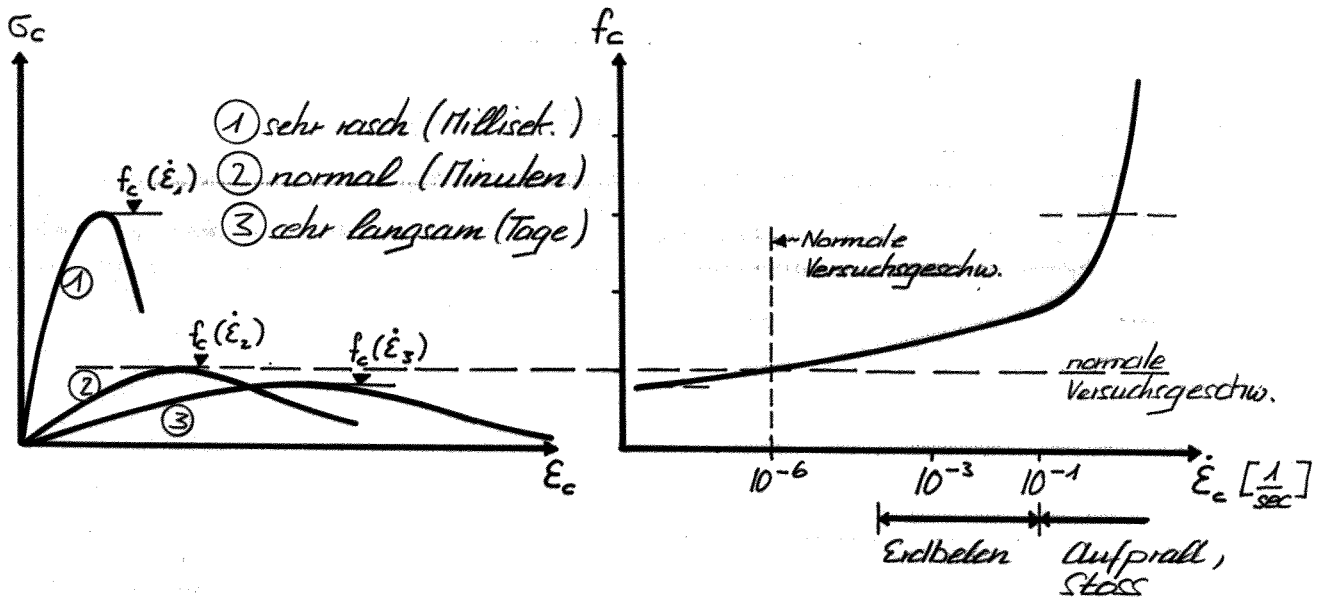
Versuche i.a. dehnungsgesteuert mit konstanter Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ (z.B. $\dot{\epsilon} \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$ pro sec $\rightarrow \dot{\sigma} \approx 0,6 \text{ N/mm}^2$ pro sec)



Bei exzentrischer Beanspruchung (Biegedruck) sind grössere Randstauchungen ϵ_{Rand} möglich

$$\epsilon_{cu} = 2,5 \div 3,5 \text{ ‰}$$

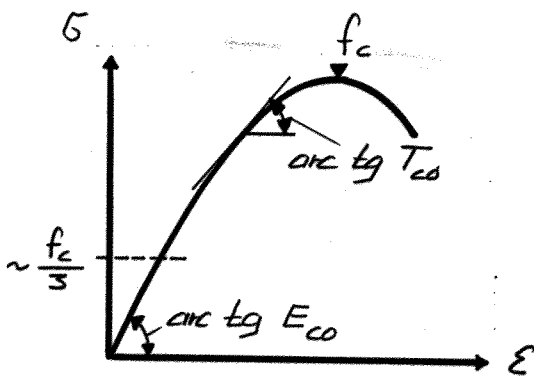
Einfluss der Dehngeschwindigkeit [36]



Idealisierte Spannungs - Stauchungs - Diagramme

Für Rechenzwecke sind idealisierte Stoffgesetze zu verwenden → siehe Festigkeitslehre

b) Elastische Verformungen



Für kurzzeitige Beanspruchung und $\sigma_c < \sim f_c/3$ gilt nach Hooke:

$$\sigma_c = \epsilon_c \cdot E_{co}$$

E_{co} : Anfangsmodul
 T_{co} : Tangentenmodul

Der Elastizitätsmodul E_{co} lässt sich aus der mittleren Würfeldruckfestigkeit abschätzen:

$$E_{co} \approx 6000 \sqrt{f_{c,wm}} \quad [N/mm^2]$$

Die Querdehnungszahl ν_c liegt bei:

$$\nu_c \approx 0.15 \div 0.20 \approx 1/6 = \frac{\text{Querdehnung}}{\text{Längsdehnung}}$$

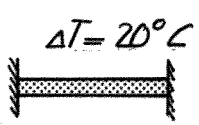
Der Schubmodul G_{co} kann nach folgender Beziehung berechnet werden:

$$G_{co} = \frac{E_{co}}{2(1+\nu_c)} \approx 0,4 E_{co}$$

Für den Temperaturausdehnungskoeffizient α_{Tc} gilt:

$$\alpha_{Tc} = 10^{-5} / ^\circ C \quad (^\circ C: \text{Grad Celsius})$$

Beispiel für die Zwangsbeanspruchung inf. Temperatur:



Betonstab mit behinderter Verkürzung ($f_{ctwm} = 40 \text{ N/mm}^2$)

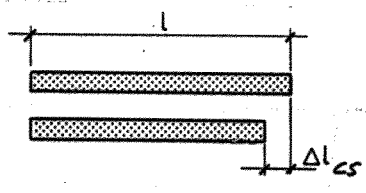
$$E_{co} = 6000 \sqrt{40} \approx 38000 \text{ N/mm}^2$$
$$\epsilon_c = 20 \cdot 10^{-5} = 0,2 \text{ ‰}$$
$$G_c = 0,0002 \cdot 38000 = 7,6 \text{ N/mm}^2$$

Liegt über der Zugfestigkeit von Beton!

c) Langzeitverformungen [37], [38]

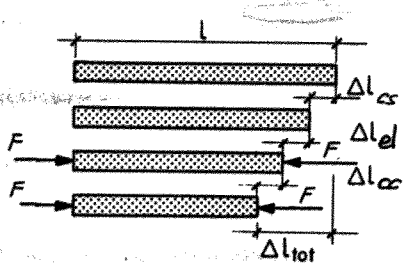
Definitionen

Schwinden:



Volumenverminderung bzw. Verkürzung eines unbelasteten Elementes im Laufe der Zeit.

Kriechen:

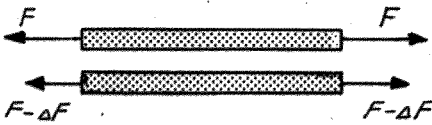


Unelastische Verformungen eines Elementes im Laufe der Zeit unter (gleichbleibender) Belastung.

$$\Delta l_{cc} = \Delta l_{tot} - \Delta l_{cs} - \Delta l_{el}$$

- Δl_{el} : elastische Verformung
- Δl_{cc} : Kriechverformung
- Δl_{cs} : Schwindverformung

Relaxation:



Kraft - bzw. Spannungsabfall in einem Element bei gleichgehaltener Dehnung.

Schwinden

Physikalische Erklärung:

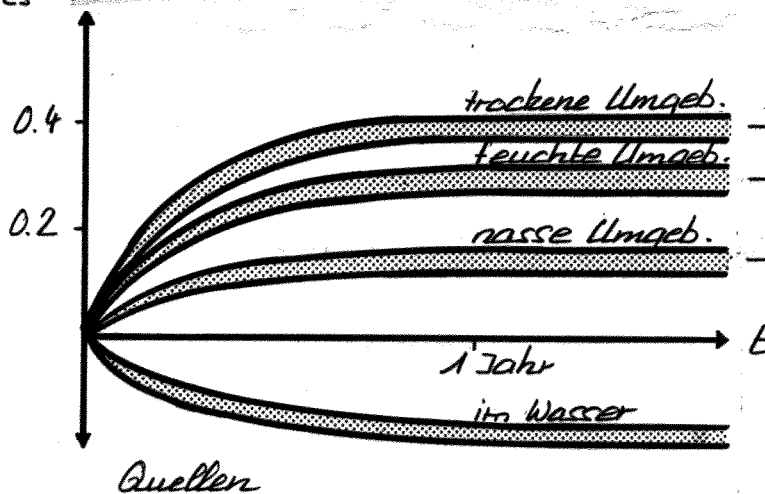
Volumenabnahme des abgebundenen Betons

- am Anfang v.a. durch Verdunsten des Überschusswassers,
- später v.a. durch Schrumpfen der die Zementkörner umhüllenden Gelmasse.

Schwindverformungen sind nahezu unabhängig von der Beanspruchung.
Schwinden beginnt mit der Austrocknung des Betons

zeitlicher Verlauf bei konstanter Temperatur und konstanter Luftfeuchtigkeit:

$E_{cs}(t)$ Schwinden



Endschwindmass ($t = \infty$) bei mittleren Verhältnissen.

$$E_{csn} \approx 0,4\text{‰} = 0,4 \text{ mm/m}$$

$$E_{csn} \approx 0,3\text{‰} = 0,3 \text{ mm/m}$$

$$E_{csn} \approx 0,15\text{‰} = 0,15 \text{ mm/m}$$

Sowohl der zeitliche Verlauf, als auch das Endschwindmass sind von vielen Einflussfaktoren abhängig. Die Annahme einer Schwindmasses ist deshalb immer mit erheblichen Unsicherheiten verbunden.

Einflussfaktoren	<u>stärkeres</u> Schwinden bei :
relative Luftfeuchtigkeit bei der Lagerung	kleiner rel. Luftfeuchtigkeit. (im Wasser: Quellen)
Querschnittsform und Querschnittsabmessungen	großem Verhältnis von Oberfläche zu Volumen d.h. bei dünnen Bauteilen.
Temperatur der umgebenden Luft	hoher Lufttemp. → schnelle Austrocknung.
W/E-Faktor	großem W/E-Faktor d.h. bei plastischem Beton.
Zementsorte	Zement mit hoher Mohlfeinheit und entspr. hoher Abbindewärme wie z.B. HPC.
Zementdosierung	großem Zementgehalt.
Körnung der Zuschlagstoffe	viel Feinstanteilen $d \leq 0.5 \text{ mm}$
Hohlräume	viele Hohlräumen durch schlechte Verdichtung oder Luftporenbildenden Zusätzen.
Betonalter bei Beginn der Austrocknung	ungenügender Feuchthaltung des jungen, nicht widerstandsfähigen Betons.

Angaben für eine genauere Abschätzung der Schwindverformungen sind in SIA 162 aufgeführt

Mögliche Annahme von $\epsilon_{cs}(t)$ für analytische Berechnungen:

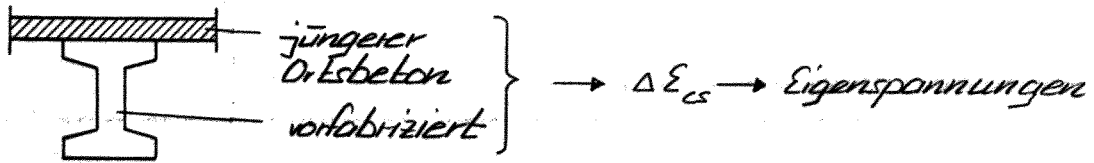
$$\epsilon_{cs}(t) = \epsilon_{cs7} \cdot (1 - e^{-\alpha t})$$

t : Zeit in Tagen

$$\alpha = \frac{1}{90} \text{ Tag}^{-1}$$

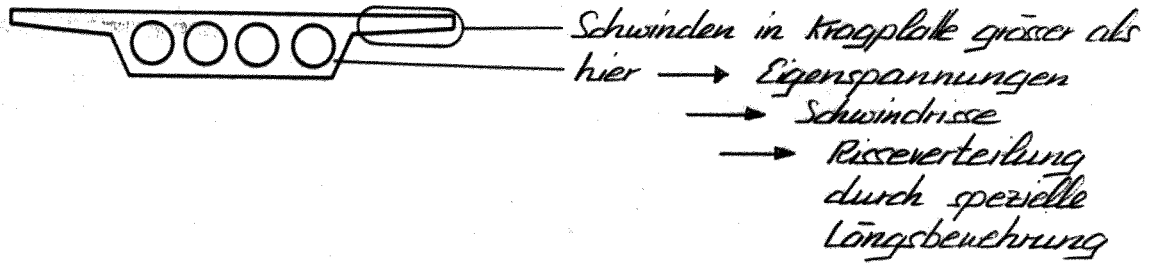
Hinweise :

- Differentielles Schwinden :

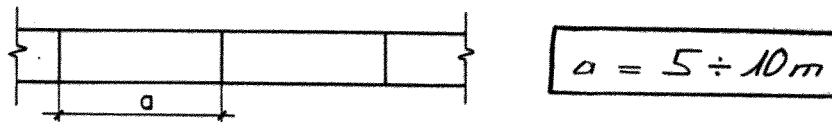


- Bei massigen Bauteilen schwinden die äusseren Bereiche mehr als die inneren → äusserliche Schwindrisse.

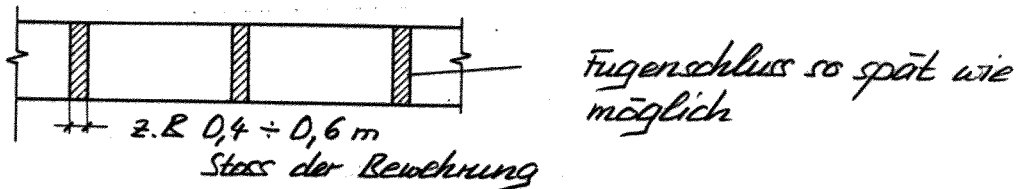
- Verschieden dicke Querschnittsteile z.B. Brückenquerschnitt :



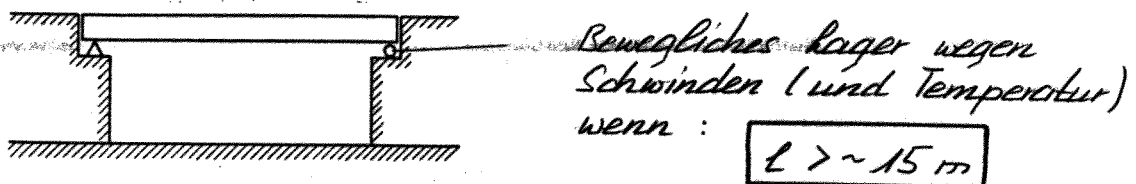
- Schwindfugen z.B. bei Stützmauern :



- Temporäre Schwindfugen (z.B. Hochbau, Brücke usw.) :



- Brückenlagerung :



Merke: Behinderte Schwindverformungen geben Zugspannungen und Risse !!

Kriechen

Physikalische Erklärung:

- Durch Belastung wird aus Poren freies Wasser ausgedrückt
- Verformung der Gelmasse

Kriechverformungen sind bis ca. $f_c/3$ ~ proportional zur Beanspruchung bzw zur elast. Verformung.
Kriechen beginnt mit dem Aufbringen der Belastung.

Es gilt: $\epsilon_{cc}(t) = \varphi(t, t_0) \cdot \epsilon_{c,el}$

$\epsilon_{cc}(t)$: Kriechmass zur Zeit t nach der Belastung

$\varphi(t, t_0)$: Kriechzahl als zeitabh. Proportionalitätsfakt.

t_0 : Alter des Betons bei der Belastung

$$\epsilon_{c,el} = \sigma_c / E_{c0}$$

Endkriechmass bei $t = \infty$ (nach ~ 10 Jahren)

$$\epsilon_{cc\infty} = \varphi_n \cdot \epsilon_{c,el}$$

Endkriechzahl φ_n für plastischen Beton:

Belastung nach:	feuchte Umgebung ~ 80 % rel. Luftf.	trockene Umgebung ~ 50 % rel. Luftf.
7 Tagen	$\varphi_n \approx 2,2$	$\varphi_n \approx 3,8$
14 "	1,9	3,2
28 "	1,6	2,7
90 "	1,0	1,8

Zeitlicher Verlauf des Kriechens bei konst. Temperatur und konst. Luftfeuchtigkeit ungefähr wie bei Schwinden.

Einflussfaktoren, die erhöhtes Schwinden verursachen, wirken sich i.d.R. auch nachteilig auf das Kriechen aus.

Angaben für eine genauere Abschätzung der Kriechverformung sind in SIA 162 aufgeführt.

Mögliche Annahme von $\varphi(t)$ für analytische Berechnungen:

$$\varphi(t) = \varphi_n \cdot (1 - e^{-t/L})$$

t : Zeit in Tagen
 $L = 1/90$ Tag

Totale Stauchung infolge Belastung:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{cc}(t) = \varepsilon_{c,el} (1 + \varphi(t, t_0))$$

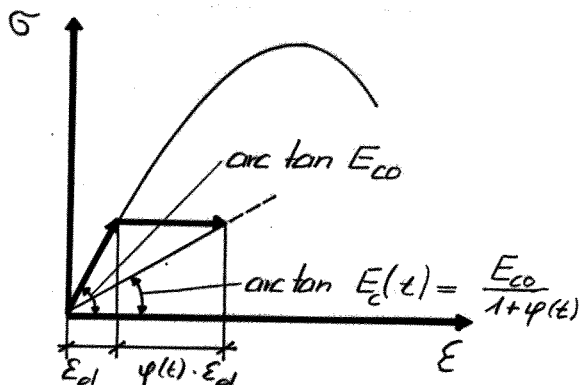
In einfachen Fällen können die Auswirkungen des Kriechens erfasst werden, indem der Elastizitätsmodul des Betons für Kurzzeitbelastungen E_{co} reduziert wird:

Für Langzeitbelastung und "langsamem" Zwang:

$$E_{ct} \approx \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t)}$$

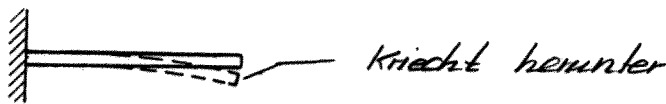
Mittelwert für $t = \infty$:

$$E_{c\infty} \approx \frac{E_{co}}{3}$$

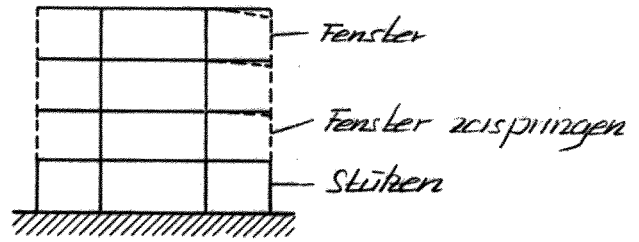


Hinweise:

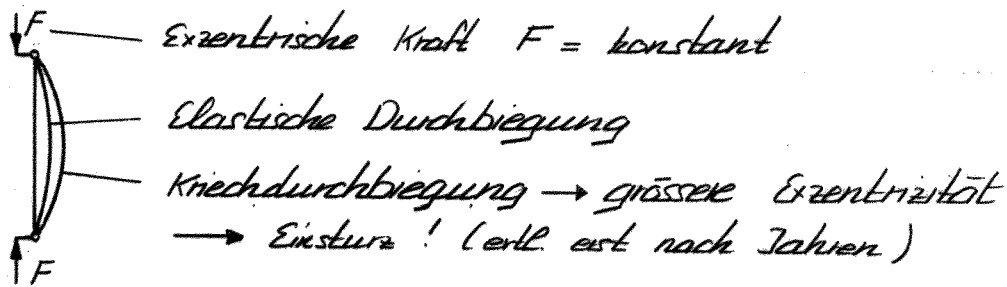
- Druck und Zug ergeben ungetöhr gleiche Kriechkurven
- Nach Entlastung erholt sich der Beton
 → Kriechverformungen werden teilweise rückgängig gemacht.
- Achtung bei Vordächern (Kragarme): Kriechdurchbiegung
 → Schalung überhöhen!



- Skelettbau mit Kragarmen in Obergeschossen:



- Kriechen - Kriechen



2.1.5. Weitere Eigenschaften

Dauerhaftigkeit

Durch Prüfungen sind, falls es für die Gebrauchstauglichkeit des Tragwerkes erforderlich ist, folgende Betoneigenschaften zu kontrollieren:

- Wasserdichtigkeit
- Frostbeständigkeit
- Frost-Tausalzbeständigkeit
- chemische Beständigkeit
- Abriebfestigkeit

Umfang und Durchführungsvorschriften sind in Normen (z.B. SIA 162 und SIA 162/1 (sog. "Prüfnorm. 1)) festgehalten

Wärmedehnung : Temperaturausdehnungskoeff: $\alpha_{T_0} = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 84 [\text{J}/\text{m}\cdot\text{sec}\cdot^\circ\text{C}] = 1,2 [\text{kcal}/\text{m}\cdot\text{h}\cdot^\circ\text{C}]$

2.1.6. Besonderheiten des Leichtbetons [39]

a) Zusammensetzung und Verarbeitung

- Leichtbeton aus
- Zement
 - Leichtzuschlagstoffen ($\rho \approx 300 \div 900 \text{ kg/m}^3$)
anstatt Kiessand ($\rho \approx 1900 \text{ kg/m}^3$)
 - Wasser
 - Zusatzmittel (evtl.)

Für konstruktiven Leichtbeton oft nur Kies durch Leichtzuschlagstoffe ersetzt, feinkörnige Zuschlagstoffe = Natursand.

Leichtzuschlagstoffe

- Blähton: Ton durch spez. Verfahren im Drehofen gebrannt \rightarrow Zellenstruktur.
- Blätschiefer: Gebrachener Schiefer auf Sinterband oder im Drehofen gebrannt.
- Gesinterte Flugasche: Asche aus thermischen Kraftwerken auf Sinterband gebrannt.
- Hüttenbims: Herstellung aus Hochofenschlacke.
- Natürliche Zuschlagstoffe, z.B. Naturbims.

Besonderheiten

Wasseraufnahme der Leichtzuschlagstoffe 5 \div 20 Gewichtsprozent \rightarrow evtl. Voraussetzung um rasche Versteifung des frischen Betons zu verhindern (W/z-Faktor somit nicht von gleicher Bedeutung wie bei Kiesbeton)

l.a. grösserer Verdichtungsanfang da stärkere Dämpfung der Vibratorschwingungen als bei Kiesbeton.
Beim Vibrieren grössere Sorgfalt nötig.

b) Eigenschaften von Blähtonleichtbeton

Die folgenden Angaben gelten nur für Leichtbeton aus Blähtonzuschlägen mit einer Würfeldruckfestigkeit von mehr als $f_{cwm} \geq 20 \text{ N/mm}^2$.

Die Eigenschaften des Leichtbetons hängen vor allem von der Rohdichte ab und variieren dementsprechend in weiten Grenzen.

Rohdichte

Kiesbeton : $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$

Leichtbeton : $\rho = 800 \div 2000 \text{ kg/m}^3$

Festigkeitseigenschaften

Druckfestigkeit : $f_{cm} = 15 \div 60 \text{ N/mm}^2$

Zugfestigkeit : } Etwas geringer als bei Kiesbeton gleicher

Verbundfestigkeit : } Druckfestigkeit (10 ÷ 30%)

Verformungseigenschaften

Spannungs- Staudungs- Diagramm :

Bei Leichtbeton weniger gekrümmt als bei Kiesbeton gleicher Festigkeit. Stauchung beim Erreichen der maximalen Spannung rund 50% grösser.

E-Modul E_{co} :

Etwa 50 ÷ 60% des E-Moduls von Kiesbeton gleicher Festigkeit

Langzeitverformungen :

Schwinden : Etwa gleich wie bei Kiesbeton gleicher Druckfestigkeit.

Kriechen : Etwa gleiche Kriechmasse, dh. rund halb so grosse Kriechzahlen wie bei Kiesbeton gleicher Druckfestigkeit ($\varphi_n \approx 1,0$).

In einfachen Fällen lässt sich Kriechen mit $E_{co} \approx \frac{E_{co}}{2}$ berücksichtigen.

Weitere Eigenschaften

Wärmeleitfähigkeit : $\sim 0,5 \lambda$ von Kiesbeton gleicher Druckfestigkeit.

Wärmeausdehnung : $\alpha_{T_2} \approx 0,8 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

Feuerbeständigkeit : Besser als Kiesbeton da geringere Wärmeleitung.

Durch (vermehrte) Zugabe von Natursand:

- Erhöhung der Rohdichte, Verbesserung von Festigkeiten, E-Modul, Schwind- und Kriech-eigenschaften.
- Verschlechterung der Isolierfähigkeit.

c) Beurteilung

(Im Vergleich zu Kiesbeton)

- Vorteile:
- Verminderung des Eigengewichtes (Bewehrungsaufwand, Fundationskosten, Transport- und Montagekosten bei vortabr. Elementen, usw.).
 - Bessere Isolierfähigkeit.
 - für wenig beanspruchte Teile besser geeignet als Kiesbeton (z.B. Wohnungsbau).

- Nachteile:
- Erhöhte Kosten der Zuschlagstoffe.
 - Oft etwas höherer Verdichtungsaufwand.
 - Etwas grössere Verformungen v.a. im elastischen ungenutzten Bereich.

2.2. Betonstahl

(Bewehrungsstahl, Armierungsstahl, Schlaffstahl)

a) Unterscheidungen des Betonstahls gem. SIA 162 nach der

Fließgrenze: S 235, S 500, S 550

f_{yk} : Prüfwert der Fließgrenze mit $\epsilon > 0$
(5%-Fraktile gem. SIA 162)

Herstellung: - naturhart z.B. S 500 a
- kaltverformt z.B. S 500 b
- vergütet z.B. S 500 c

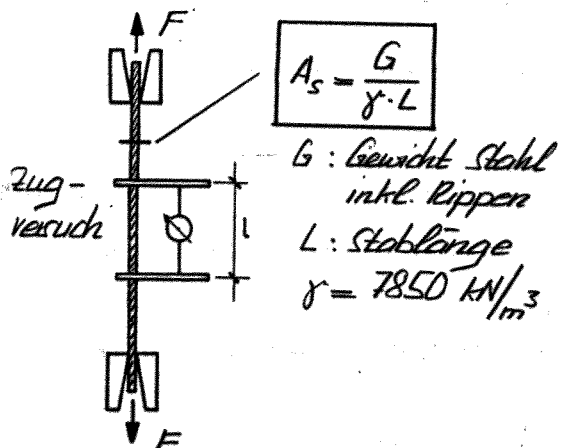
Oberfläche: - glatt
- profiliert

b) Anforderungen an den Betonstahl:

- Gute Festigkeit bei gleichzeitig grossem Verformungsvermögen
- Grosse Haftfestigkeit (Profilierung)
- Gute Biegsbarkeit (Verarbeitung)
- Hohe Ermüdungsfestigkeit
- Gute Schweisseigenschaften

c) Festigkeitseigenschaften

G- ϵ -Diagramm



Durchführung:

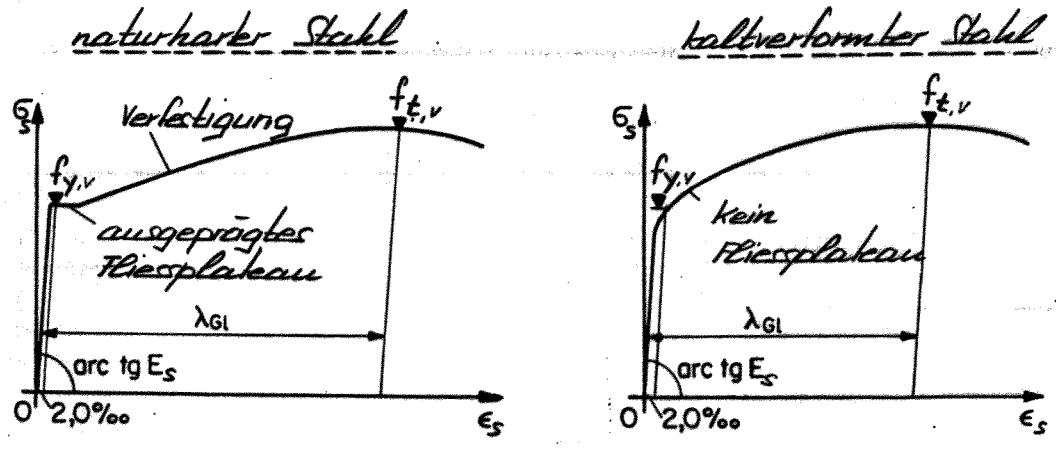
Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$
beim konventionellen

Zugversuch:

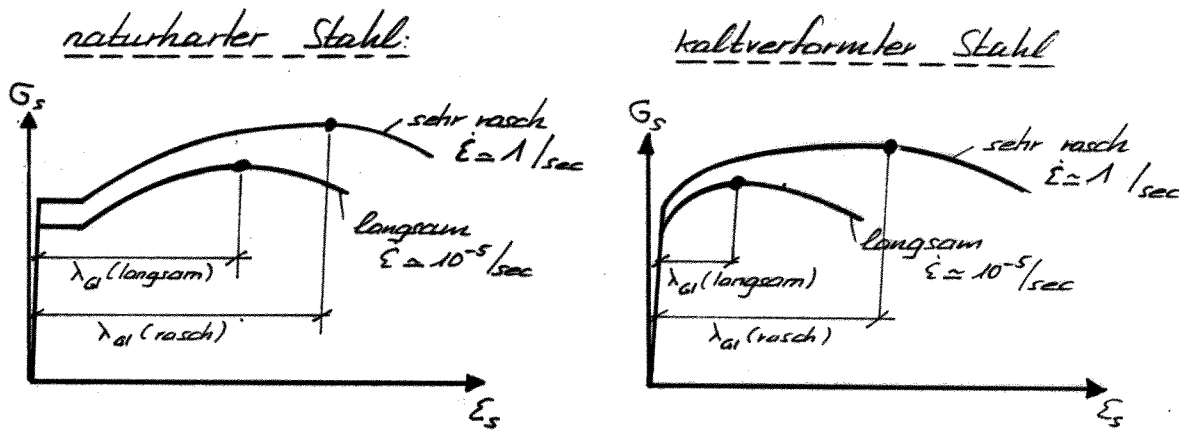
- Im elast. Bereich: $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-5} / \text{sec}$

- Im Zugfestigkeitsbereich: $\dot{\epsilon} \approx 25 \cdot 10^{-5} / \text{sec}$

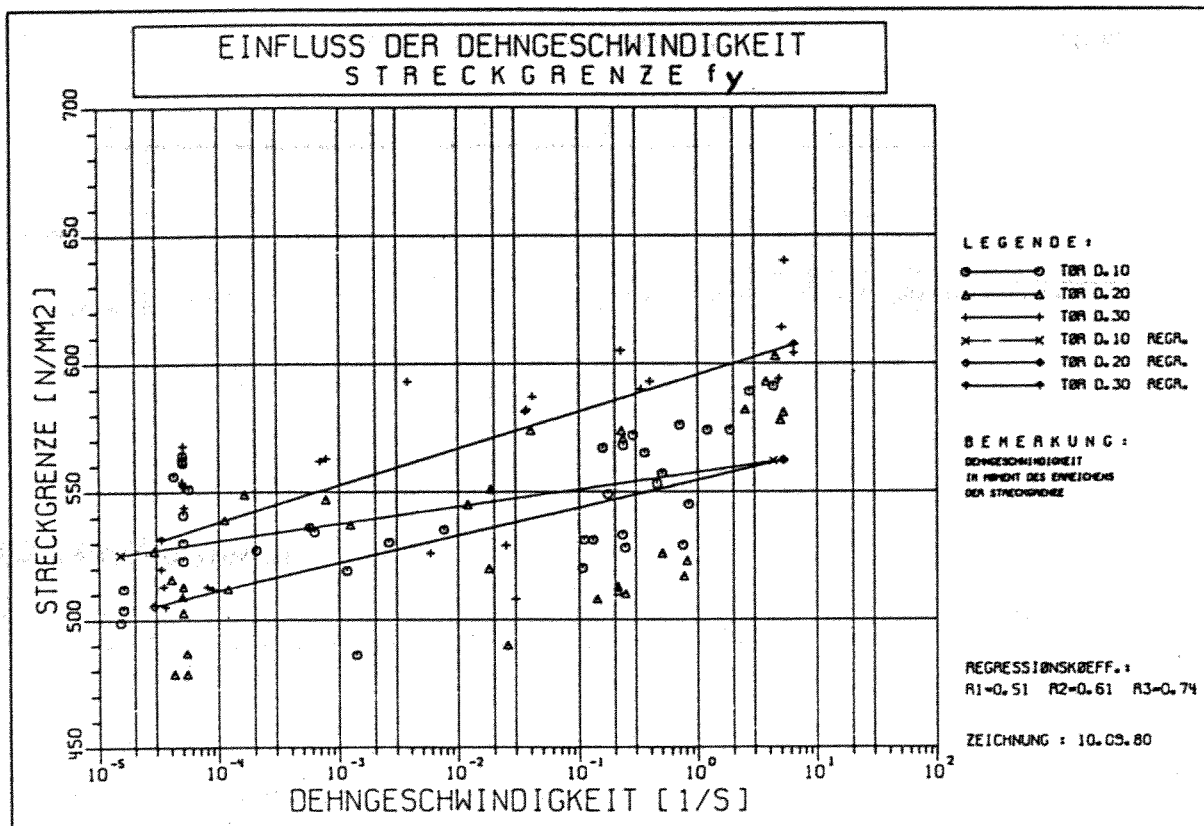
● Charakteristische σ - ϵ -Diagramme:



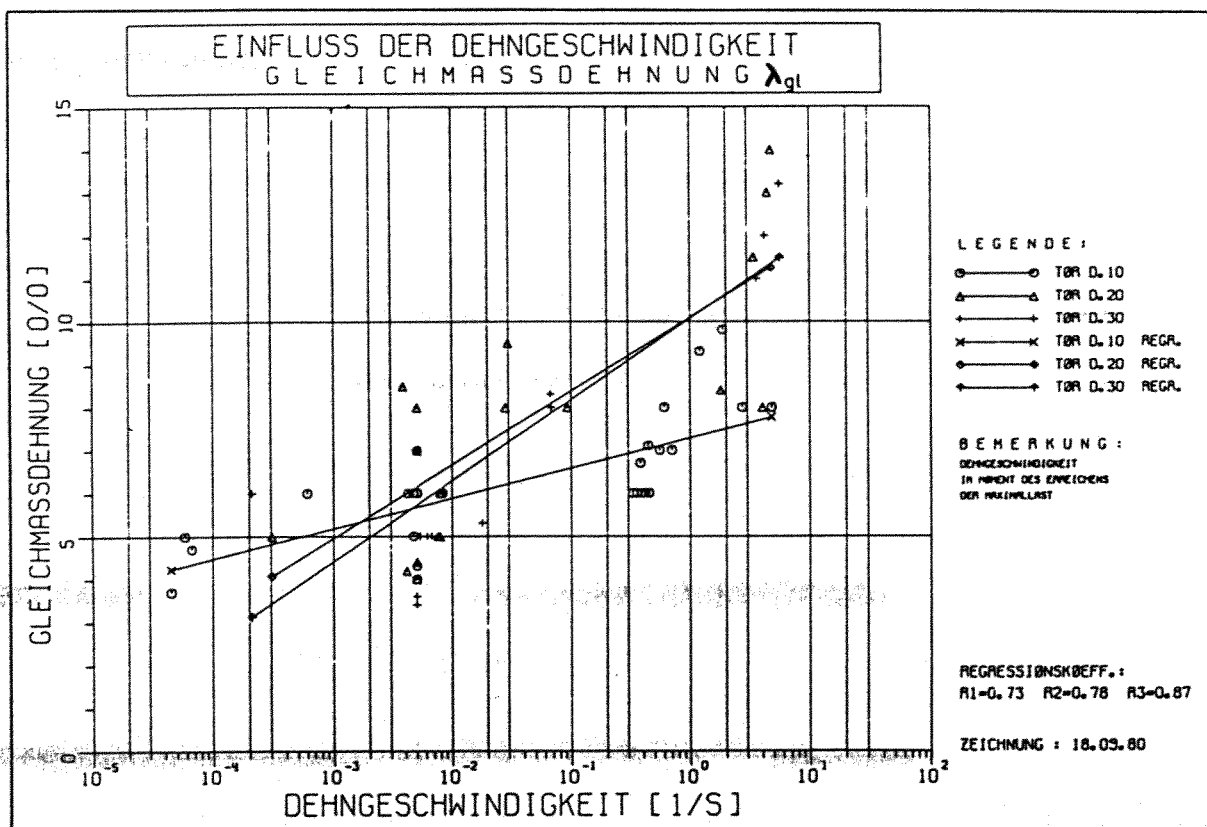
● Einfluss der Dehngeschwindigkeit auf das σ - ϵ -Diagramm von Stahl [36]



Merke: Bei hoher Dehngeschwindigkeit (stossartiger Belastung) werden höhere Festigkeitswerte als beim konventionellen Zugversuch erreicht ($\sim 10\% - 15\%$). Ferner bewirkt rasche Belastung beim Stahl - im Gegensatz zu Beton - nicht eine Versprödung sondern eine Verbesserung der Duktilitätseigenschaften (Erhöhung von λ_{Gl} bei kaltverformten Stählen bis zu 180%).



Einfluss der Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ auf die Streckgrenze f_y bei kaltverformtem Bewehrungsstahl IIIb



Einfluss der Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ auf die Gleichmassdehnung λ_{gl} bei kaltverformtem Bewehrungsstahl IIIb

Fließgrenze f_y (auch Streckgrenze genannt)

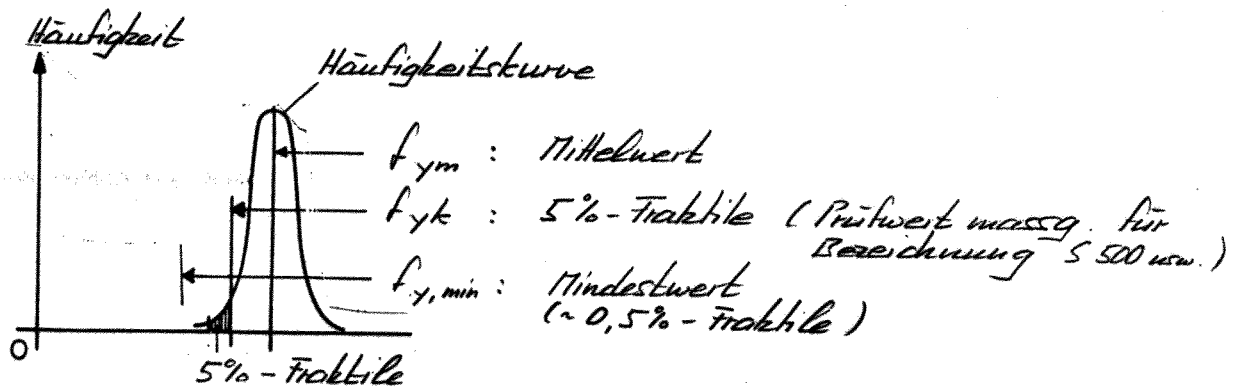
Spannung bei 2‰ bleibender Dehnung

● Metallurgische Einflüsse auf die Fließgrenze

Erhöhung der Fließgrenze für Betonstahl

- bei naturharten Stählen durch höheren C-Gehalt und geeignete Legierung: C ~ 0,3%, Mn ~ 1%, Si ~ 1%
- durch Ziehen und Verwinden bei kaltverformten Stählen: C ~ 0,18%, Mn ~ 1%, Si ~ 0,2%
- durch Vergüten: Legierter Stahl erhitzt auf ~ 800°C, dann Abschrecken in Blei- oder Ölbad und wieder Anlassen auf ~ 500°C.

● Streuung der Fließgrenze



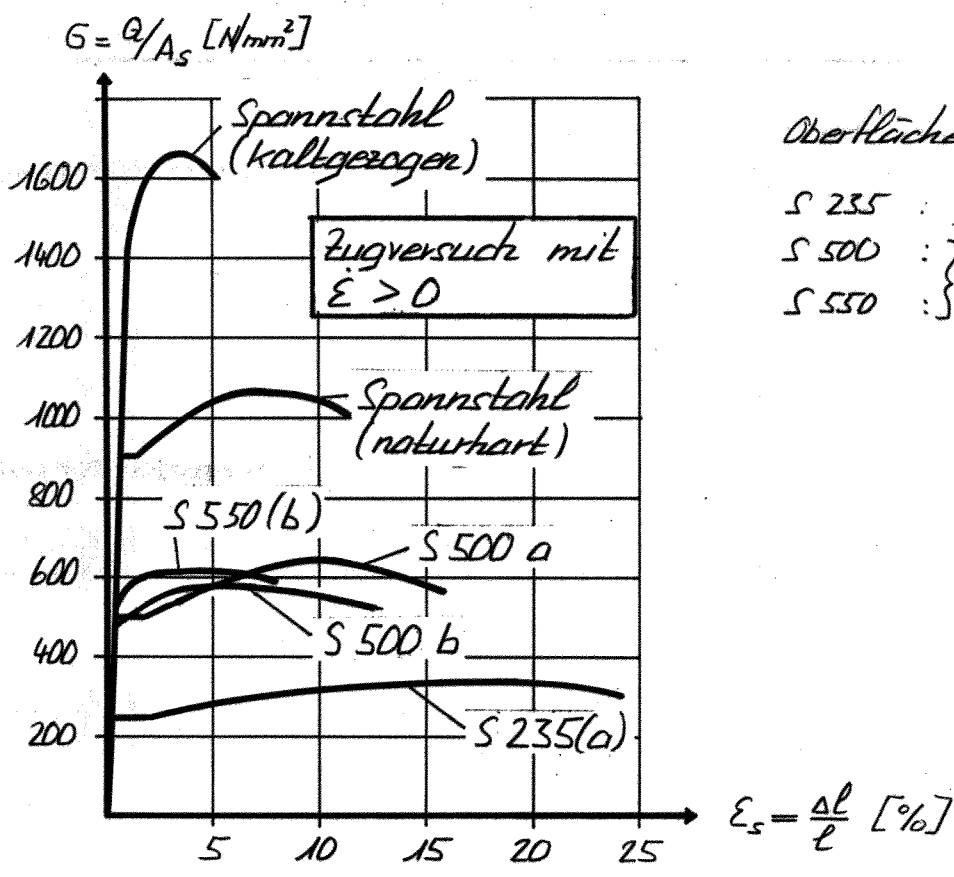
Zugfestigkeit f_{tk}

Liegt bis zu 30% höher als die Fließgrenze (je nach Stahlart).

Wichtig bei Forschungs- und Belastungsversuchen

Genormte Stähle (SIA 162)

● G-ε-Diagramme :



Oberfläche :

- S 235 : glatt
- S 500 : } profiliert
- S 550 : }

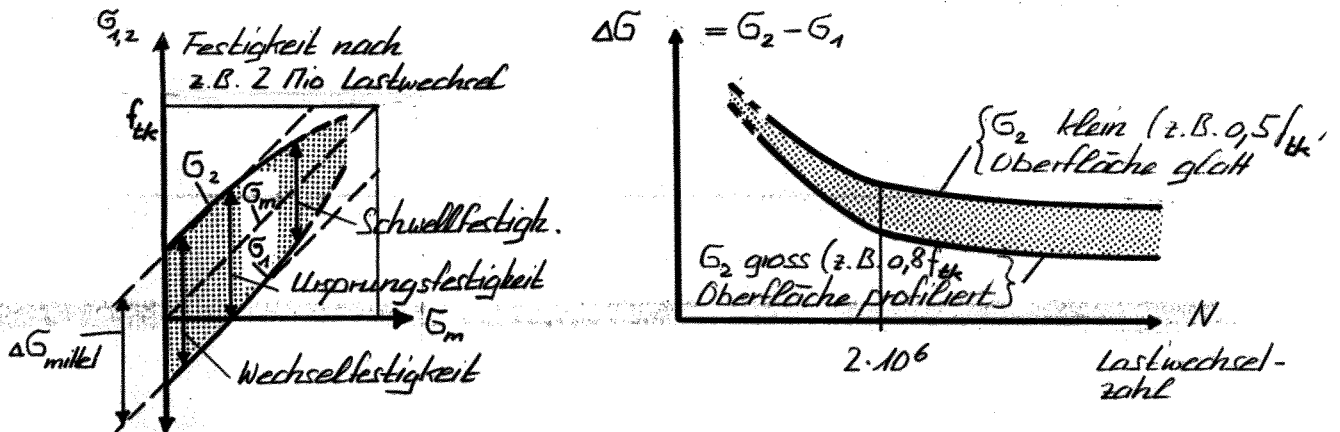
● Anforderungen an die Festigkeit

[N/mm ²]	Fließgrenze		Zugfestigkeit
	Prüfwert f_{yk}	Rechenwert f_y	f_{tk}
S 235	235	220	360
S 500 a	500	460	600
S 500 b	500	460	550
S 550	550	520	580

(für Netze)

f_{yk}, f_{tk} : 5% - Fraktile aus Zugversuch mit $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-5} / \text{sec}$

Ermüdungsfestigkeit



Die Lastwechselzahl N , nach welcher Ermüdungsbruch eintritt wird im wesentlichen durch $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ bestimmt.

Das Spannungsniveau d.h. σ_m resp. σ_2 hat, solange $\sigma_2 \geq 0,8 f_{tk}$ ist, eher geringen Einfluss.

Profilierung wirkt sich negativ auf die Ermüdungsfestigkeit aus.

Für profilierten Betonstahl gilt näherungsweise: $\Delta\sigma_{mittel} = (0,5 \div 0,6) f_{tk}$

d) Verformungseigenschaften

Elastisch : E-Modul $E_s = 2,10 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ (SIA 162)

Plastisch :

Mit zunehmender Festigkeit des Stahles verschlechtern sich i.d.R. die plastischen Verformungseigenschaften (Duktilität).

Gute Duktilität wichtig für

- möglichst plastisches Bruchverhalten des Tragwerkes (Bruch erst nach grossen Verformungen) \rightarrow grosse Energieaufnahme-fähigkeit (wichtig für Erdbeben- u. Stossbeanspr.)
- Bearbeitbarkeit (Abbiegen, Ablängen)

Kennzeichnende Grössen für Duktilität sind :

- Bruchdehnung λ_5, λ_{10} : Bleibende Dehnung über 5ϕ bzw. 10ϕ gemessen über die Einschnürungszone.

- Gleichmassdehnung λ_{GI} : Bleibende Dehnung ausserhalb der Einschnürungszone, d.h. maximale mögl. plastische Dehnung vor Beginn der Einschnürung.

Bsp:	
S 500 a:	$\lambda_{GI} \approx 10\%$
S 500 b:	$\lambda_{GI} \approx 4\%$

Direkte Messung (besser) oder Berechnung aus $\lambda_{GI} \approx 2\lambda_{10} - \lambda_5$.

- Rückbiegeverhalten: Vorbiegen um Dorn um ca. $135^\circ \div 180^\circ$. Stahl nach genormter Lagerung wieder um 90° zurückbiegen.
 → Probe darf dabei nicht brechen und keine klaffenden Risse zeigen.

e) Schweisseigenschaften

Probleme: Wärmezufuhr beim Schweißen bewirkt

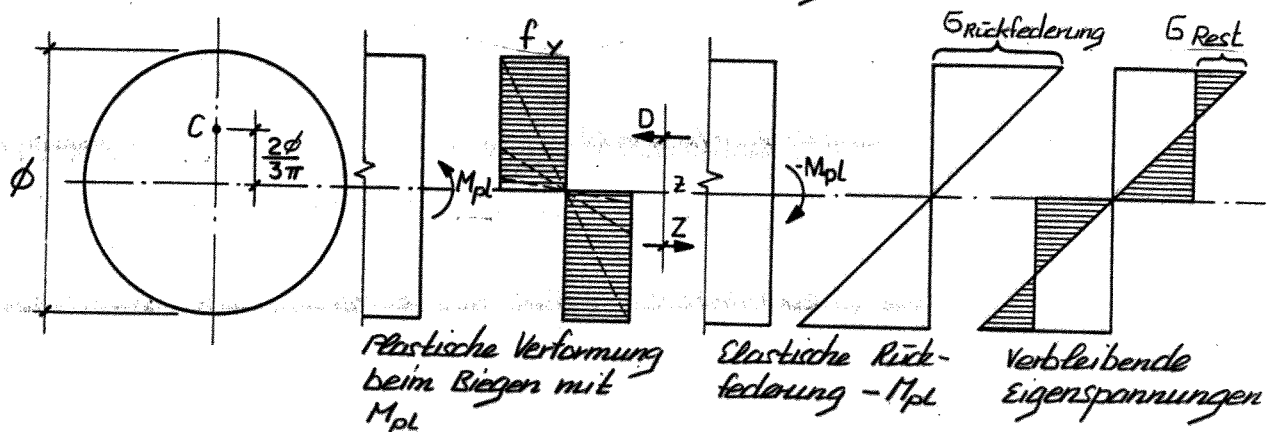
- Ver sprödung bei Stählen mit wesentlichem C-Gehalt (naturharte Stähle).
- Entfestigung bei kaltverformten Stählen.

Jede Schweissstelle ist somit mit gewissen Unsicherheiten bezügl. Festigkeits- und Duktilitätseigenschaften behaftet. Auf Schweißen von hochwertigem Betonstählen soll deshalb nach Möglichkeit verzichtet werden.

Bei punktgeschweissten Bewehrungsnetzen tritt an der Schweissstelle meist eine gewisse Ver sprödung der Stäbe ein.

f) Bearbeitung

Eigenspannungszustand durch Kaltbiegen:



$$M_{pl} = D \cdot z = Z \cdot z = f_y \cdot \frac{\phi^2 \pi}{4 \cdot 2} \cdot 2 \cdot \frac{2\phi}{3\pi} = f_y \cdot \frac{\phi^3}{6}$$

$$\sigma_{Rückfederung} = -\frac{M_{pl}}{W} = -f_y \frac{\phi^3}{6} \cdot \frac{1}{\frac{\pi \phi^3}{32}} = -f_y \frac{16}{3\pi}$$

$$\underline{\sigma_{rest}} = f_y + \sigma_{Rückfederung} = -f_y \left(\frac{16}{3\pi} - 1 \right) = \underline{0,7 f_y} \quad !!$$

Spätere zentrische Beanspruchung führt im Bereich von Abbiegungen bald zum Fließen in der Stabaxe.
Eine nach $\sigma_s = z/A_s$ berechnete Stahlspannung ist für die genannten Bereiche somit ein nomineller Durchschnittswert.

Folgen: - Begrenzung der minimalen Abbiegeradien,
- ev. warm abbiegen (Entfestigung),
- keine Schweissstellen im Bereich von Abbiegungen.

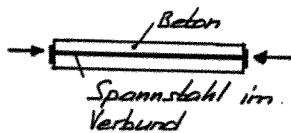
2.3. Spannstahl

a) Vorteil hoher Festigkeitswerte

(Spannstahl: $f_{tk} \geq 1000 \text{ N/mm}^2$; SIA 162)

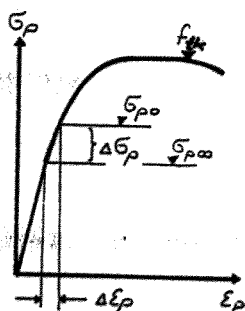
Hohe Anfangsvorspannung \rightarrow Spannkraftverluste inf. Schwinden um Kriechen werden prozentual kleiner.

Beispiel: Verkürzung eines vorgespannten Betonelementes:
 $\epsilon_{cs} = 0,25 \text{ ‰}$; $\epsilon_{cc} = 0,4 \text{ ‰} \rightarrow \epsilon_{c,tot} = 0,65 \text{ ‰}$



Verkürzung Beton = Verkürzung Stahl:

$$\epsilon_{c,tot} = \Delta \epsilon_p \rightarrow \Delta \sigma_p = 0,65 \cdot 10^{-3} \cdot 2,1 \cdot 10^5 = \underline{136 \text{ N/mm}^2}$$



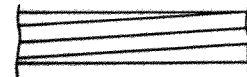
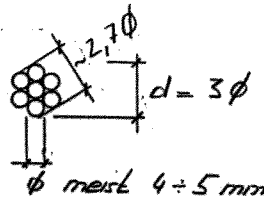
	<u>Spannstahl I</u>	<u>Spannstahl II</u>
$f_{tk} =$	1770 N/mm ²	1100 N/mm ²
$\sigma_{po} = 0,7 f_{tk} =$	1239 N/mm ²	770 N/mm ²
Verlust in % von σ_{po}	136 N/mm ² <u>11 %</u>	136 N/mm ² <u>18 %</u>

b) Arten von Spannstahl

Spannstähle teilweise typisch für ein bestimmtes Spannverfahren

Gebrauchlich sind:

- Patentiert kaltgezogene und künstlich gealterte Drähte mit ϕ von $3 \div 12$ mm. Oberfläche glatt oder leicht profiliert.
- als Einzeldrähte parallel geführt (Parallelstrahlbündel).
- Mehrere Drähte zu Litzen verwunden



Verwindungslänge $\sim 15d$
Meist 7-drahtig

- Legierte naturharte Stähle. Warmgewalzt, meist schlussvergütet
Auch dickere Stäbe $\phi 20 \div 30$ mm, mit warm aufgewalztem Gewinde \rightarrow einfache Endverankerung.

c) Anforderungen an den Spannstahl

- Sehr hohe Festigkeit verbunden mit guter Zähigkeit.
- Nicht anfällig auf Korrosion, im speziellen auf Spannungsrisskorrosion.
- Hohe Ermüdungsfestigkeit.
- Gutes Relaxationsverhalten

Die sehr hohen Anforderungen bedingen ständige und strenge Kontrollen.

d) Festigkeitseigenschaften

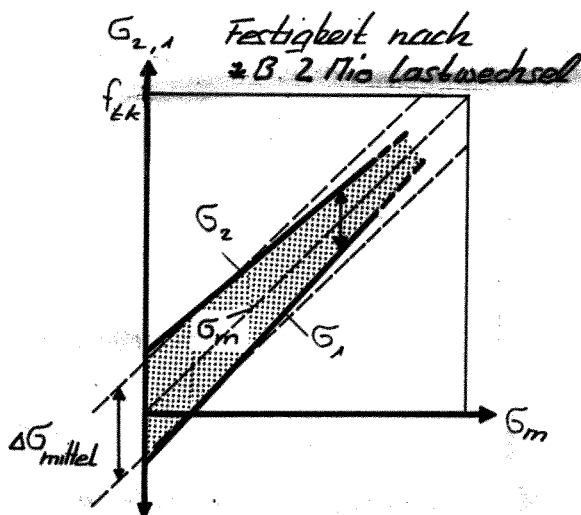
- Fließgrenze f_y und Zugfestigkeit f_{tk}

Definitionen wie bei Betonstahl.

Die höheren Festigkeitswerte bei kleineren ϕ können rechnerisch berücksichtigt werden:

Anforderungen gem. SIA 162				
	ϕ	A_p	Rechenwert der Fließgrenze	Zugfestigkeit (5-9% Frakt.) ($\epsilon > 0$)
	[mm]	[mm ²]	f_y [N/mm ²]	f_{tk} [N/mm ²]
Drähte gezogen	3		1670	1860
	4		1640	1820
	5+6		1590	1770
	7+8		1500	1670
	9+12		1410	1570
7-drählige Litzen		≤ 60	1670	1860
		60-100	1640	1820
		> 100	1590	1770
Stangen gerichtet	20, 26, 32		1000	1230
	26, 32, 36		830	1030

- Ermüdungsfestigkeit



Wie bei Betonstahl wird auch bei Spannstahl die Ermüdungsfestigkeit namentlich durch die Schwingbreite $\Delta\sigma$ bestimmt

Für gezogene Drähte gilt:

$$\Delta\sigma_{\text{mittel}} \approx (0,15 \div 0,2) f_{tk}$$

In Verankerungen wesentlich geringere Ermüdungsfestigkeiten:

$$\Delta\sigma (N=2 \text{ Mio}) \approx 100 \text{ N/mm}^2$$

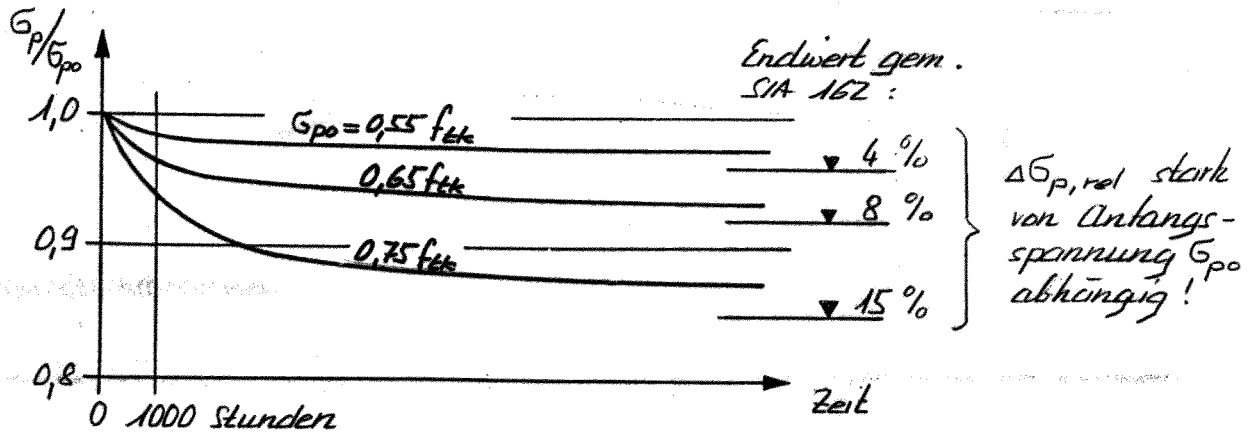
Da Verankerungen oft in weniger beanspruchten Zonen liegen, ist dieser geringere Wert meist ausreichend.

e) Verformungseigenschaften

- E-Modul: Einzeldrähte $E_p \approx 2,10 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Litzen $E_p \approx 1,95 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

- Relaxation:

Spannungsabfall bei gleichbleibender Dehnung:



Hohe Anfangsvorspannung bringt nur kleinen Gewinn:

Beispiel: $f_{tk} = 1770 \text{ N/mm}^2$

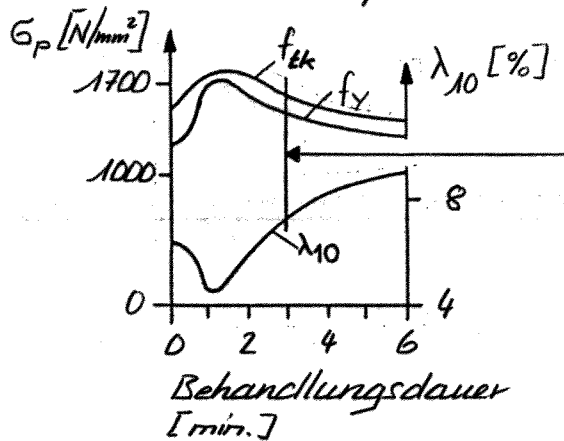
	σ_{po}	$\Delta \sigma_{pr}$	σ_{p00}	
Fall 1:	$0.65 f_{tk} = 1150$	$8\% \Delta 90$	1060	$[\text{N/mm}^2]$
Fall 2:	$0.75 f_{tk} = 1327$	$15\% \Delta 199$	1128	$[\text{N/mm}^2]$
	Bruttogewinn: 177	Nettogewinn: 68		$[\text{N/mm}^2]$

Durch sog. "Stabilisieren" kann Relaxationsverhalten verbessert werden (nachträglich auf $350^\circ \div 400^\circ \text{ C}$ erwärmen, 1% recken in Wasserbad abkühlen). Ursprüngliche Duktilität wird dabei jedoch reduziert!

- Duktilität:

Durch die Forderung nach ausreichender Duktilität werden die hohen Festigkeitswerte begrenzt.

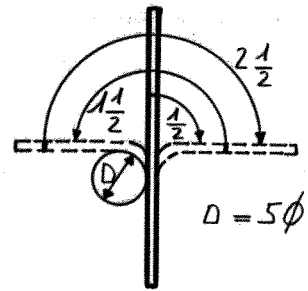
Beispiel: Einfluss der künstlichen Alterung (500°C) bei patentiert kaltgezogenen Drähten:



optimale Dauer als Kompromiss von Festigkeit und Duktilität
 → Nicht nur auf f_y und f_{tk} achten!

Kennzeichnende Größen für die Duktilität von Spannstahl sind:

- Bruchdehnung $\lambda_{10} \geq 5\%$
- Gleichmassdehnung $\lambda_{G1} \approx 2 \div 4\%$
- Umschlagzahl bei Hinz- und Herbiegeprüfung. Bruch nach 4 ÷ 10 Umschlägen
- Einschnürung beim Bruch: $\psi \approx 20 \div 30\%$



f) Korrosionsverhalten

Spannungskorrosion:

Interkristalline Rostbildung in gespannten Stählen durch Feuchtigkeit, Nibrote usw.. Vorsicht vor allem bei schlussvergüteten Stählen.

Lochfrasskorrosion:

Örtliche Anfressungen, vor allem durch Chloride.

Wasserstoffversprödung:

Eindringen des H aus Säuren → Versprödung!

Spannstähle sind allgemein vor Feuchtigkeit und chemischen Verunreinigungen (Säuren) zu schützen! Verboten sind Chloridzusätze und Tonerdeelement. Vorsicht vor allem bei schlussvergüteten Stählen! Patentiert-gezogene Drähte oft weniger anfällig.

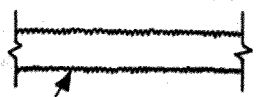
2.4. Verbund zwischen Stahl und Beton

Ein guter Verbund ist wichtigste Voraussetzung für die Stahlbetonbauweise. Der Verbund ist grob gesehen gewährleistet, falls die Stahlstäbe die gleiche Dehnung aufweisen wie die benachbarten Betonfasern.

Identische Temperaturausdehnungskoeffizienten $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ von Beton und Stahl begünstigen das Verbundverhalten.

2.4.1. Ursachen

- Kleben (Adhäsion) → Haftkräfte

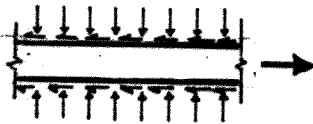


Mikroverzahnung zwischen Walzhaut und Zementfilm

Abhängig von Rauigkeit der Oberfläche. (Besserer Haftverbund bei leicht korodierter Stahloberfläche).

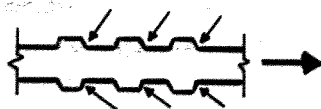
- Reibung

→ Reibungskräfte



Abhängig vom Buerdruck (z.B. Coulombsches Gesetz verwendbar)

- Mechanische Verzahnung → Druckkräfte zwischen Stahlrippen und Beton



Versagen des Verbundes durch Abscheren des Betons zwischen den Rippen



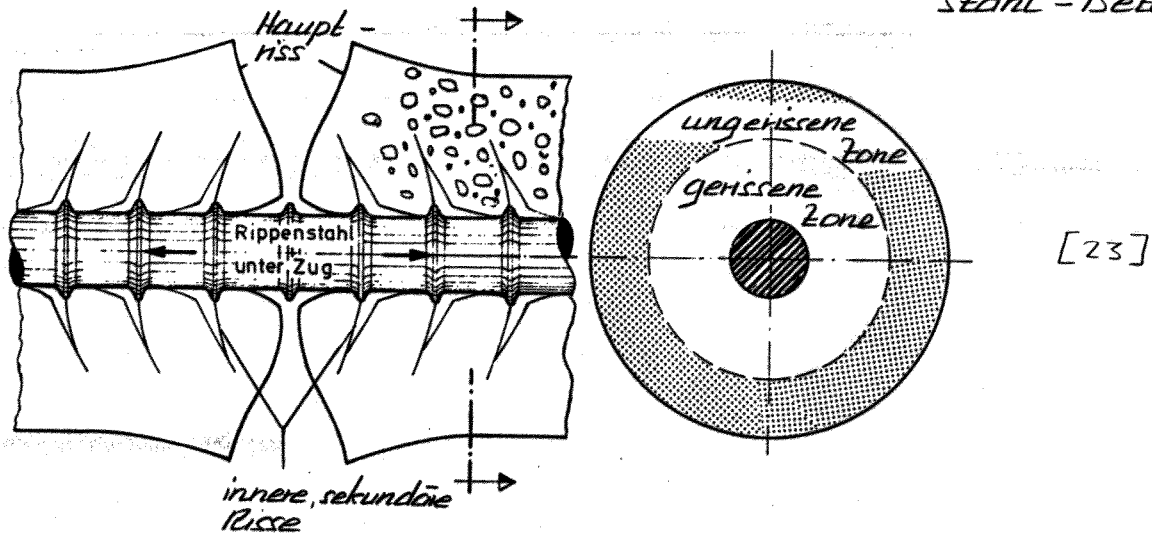
grosser Rippenabstand



kleiner Rippenabstand

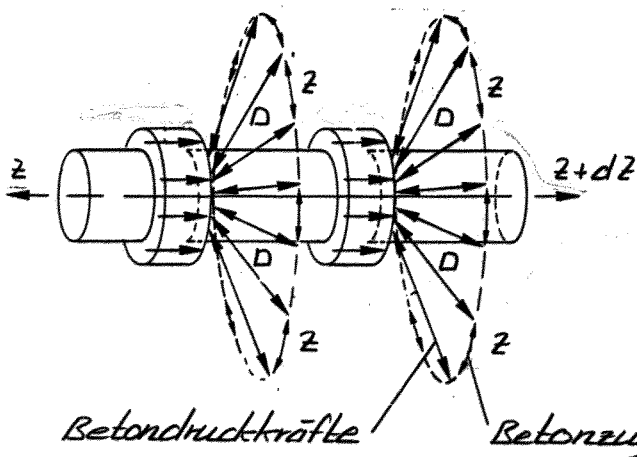
2.4.2. Schubübertragung beim profilierten Stab

- Rissebild im Mikrobereich (verursacht durch Relativverschiebung Stahl-Beton)



- Hauptriß :- An Bauteiloberfläche sichtbar.
- Verkleinerung der Rissbreite in Stabnähe.
- Sekundärriße :- An Bauteiloberfläche nicht sichtbar.
- Bildung von geneigten "Betonzähnen".

- Kräftemodell [40]



In den Betonzähnen entstehen radiale Betondruckkräfte, die sich auf den Betonzugring in der ungehissenen Zone abstützen.

Folgerungen

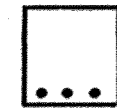
- Ausreichende Betonüberdeckung ermöglicht Betonzugringwirkung und verbessert das Verbundverhalten.
- Kleinere Stababstände führen zu kleineren Hauptrißweiten.

2.4.3. Einflüsse auf die Güte des Verbundes

- Betonqualität : ~ linear zur Würfeldruckfestigkeit
- Betonierrichtung : höhere Verbundfestigkeit gegen Betonierrichtung.
- Verdichtung : vollständige Umhüllung des Stabes.
- Stehende od. liegende Einbettung : bei stehender Einbettung bis nahezu doppelt so grosse Verbundfestigk..

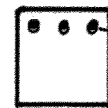
- Höhenlage der Bewehrung im Querschnitt :

über Schalungsboden :



günstig

oben :



ungünstig

Hohlräume durch Absetzen des Betons

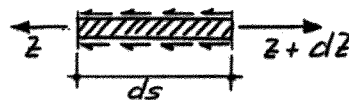
- Günstig für Verbundfestigkeit sind ferner :
 - Querdruck
 - geringes Schwinden
 - Längsdruck

2.4.4. Nominelle Verbundspannungen als rechnerisches Hilfsmittel

Anteile aus Kleben, Reibung und mechanischer Verzahnung am gesamten Verbund von Fall zu Fall sehr unterschiedlich und schwer bestimmbar.

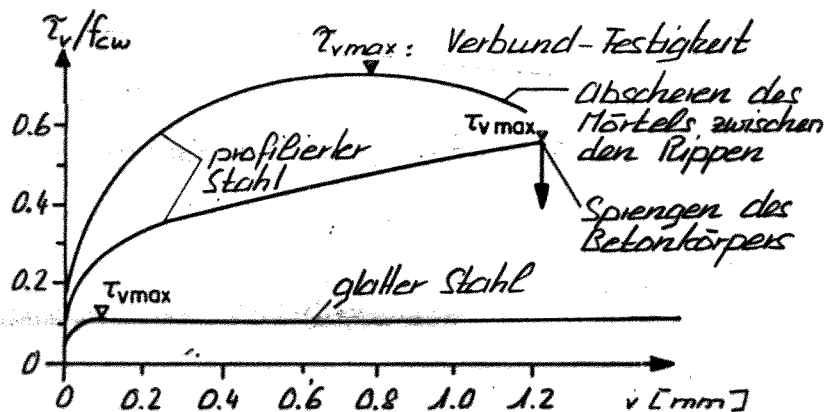
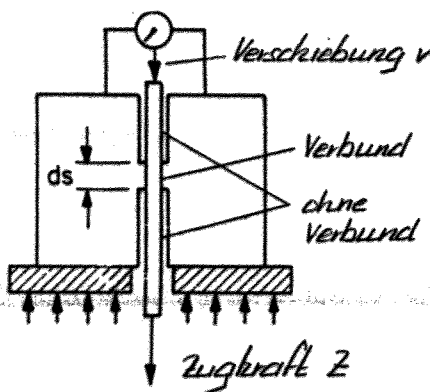
Vereinfachende Erfassung aller Verbundkräfte mit Hilfe der nominellen Verbundspannung τ_v

$$\tau_v = \frac{dZ}{\phi \cdot \pi \cdot ds}$$



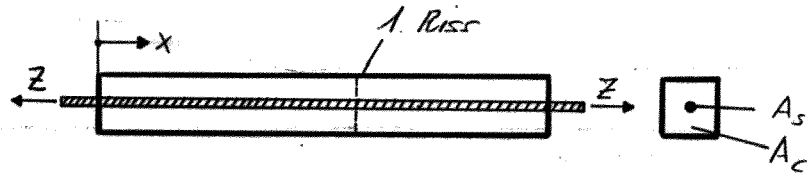
Verbundgesetz [41]

Zusammenhang zwischen Verbundspannungen τ_v und Relativverschiebung v am differentiellen Stabelement :

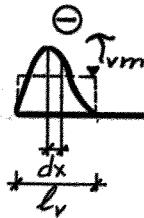


Spannungen längs der Axe eines Zugstabes

Zugstab:



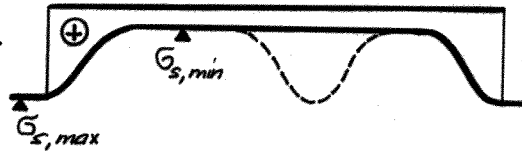
nominielle Verbundspannung τ_v



$$z_c = \int_0^{l_v} \tau_v(x) \cdot \phi \cdot \pi \cdot dx$$

$$= \tau_{vm} \cdot \phi \cdot \pi \cdot l_v$$

Stahlspannung σ_s



$$\sigma_{s,max} = \frac{z}{A_s}$$

$$\sigma_{s,min} = \frac{z}{A_s + \frac{E_c}{E_s} \cdot A_c}$$

Betonspannung σ_c



$$\sigma_{c,max} = \frac{z}{A_c + \frac{E_s}{E_c} \cdot A_s}$$

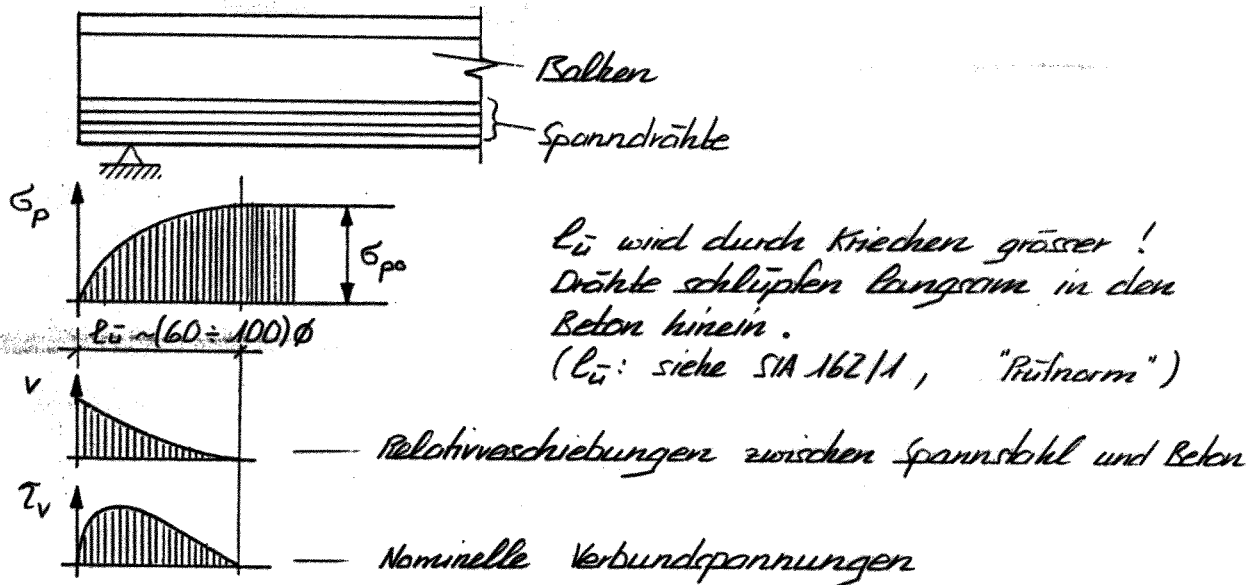
Rissbildung wenn $\sigma_{c,max}$ die Betonzugfestigkeit erreicht. l_v oft klein, da keine Schwindrissse und andere Störinflüsse den Beton auf Zug schwächen.

Daher genaue Berechnung von Rissabständen und Rissweiten i.o. nicht möglich.

2.4.5. Besonderheiten beim Verbund mit Spannstahl

Spannbett-Verfahren: Gleichzeitiger Verbund

Nach Loslösen der Drähte von der Endverankerung wird die Vorspannkraft durch Verbund auf den Beton übertragen



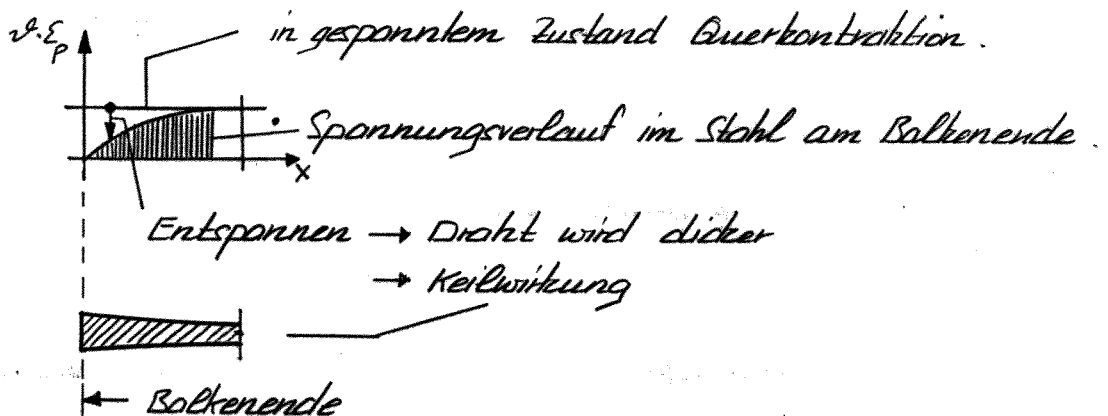
Verbundeigenschaften namentlich durch zwei Anbaue bestimmt:

- Mechanische Verzahnung der profilierten Spanndrähte. (glatte Stäbe ungünstig)



z.B. kalt eingewalzte Ver-
biefungen in pot.- kalt-
gezogenem Draht.

- Sog. Hoyer-Effekt

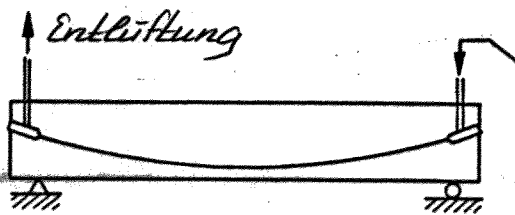


Spannglied-Verfahren: Nachträglicher Verbund

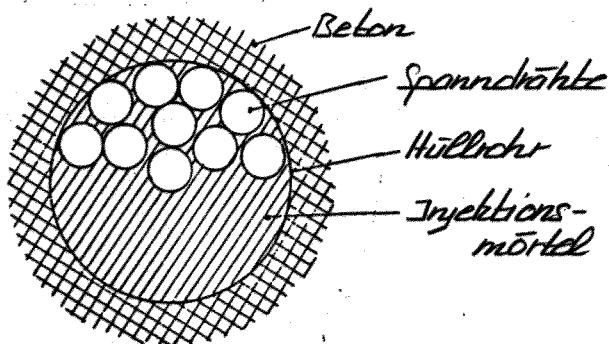
Vorspannkraft wird beim Spannen über Ankerplatte auf Beton übertragen.

Nachträgliche sorgfältige Injektion wichtig für:

- Korrosionsschutz des Spannstahles,
- Bruchverhalten des Trägers (Zusatzspannungen können wie beim Betonstahl durch Verbund übertragen werden),
- Risseverteilung.



Injektionsmörtel einpressen
→ keine Luft oder Wasser-
taschen.



Injektionsmörtel aus

- Zement
- Wasser
- Zusätze

} siehe SIA 162/1

Wichtig nebst Verbund Drähte-Mörtel: Verbund Hüllrohre-Beton!
→ i.a. gewellte Hüllrohre

2.5. Baustoffprüfungen

Die für Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit geforderten Qualitätseigenschaften von Beton und Stahl sind sog. Zielgrößen.

Bei Beton sind diese Zielgrößen oft nicht genügend frühzeitig überprüfbar. Es müssen deshalb andere für die Betoneigenschaften wesentliche Steuergößen wie Konsistenz, Wasserzementfaktor, Kornverteilung u.a. bestimmt werden. Diese Steuergößen sind in Vorversuchen zu ermitteln und während des Bauens laufend zu überwachen. Durch nachträgliche Prüfungen am Bauwerk sowie an separat hergestellten Prüfkörpern lassen sich dann die Zielgrößen bestimmen bzw. überprüfen.

Die Verantwortung für die Durchführung von Qualitätsprüfungen von Beton (v.a. Ortsbeton) und Stahl liegt normalerweise bei der Bauleitung. Die Prüfungen sollten jedoch im allgemeinen mit dem projektierenden Ingenieur abgesprochen werden.

Vorschriften für die Durchführung der in diesem Zusammenhang wichtigen Prüfungen sind in vereinheitlichter Darstellung in der Norm SIA 162/1 (sog. "Prüfnorm") [42] zusammengestellt.

3. Festigkeitslehre des Stahlbetons

Übersicht

Dieses Kapitel behandelt Beanspruchung und Bemessung von schloß bewehrten Querschnitten, bzw. (angrenzenden) Tragwerksbereichen unter den folgenden Beanspruchungsarten:

- Reine Biegung
- Biegung mit Längskraft
- Biegung mit Querkraft
- Torsion
- Kombiniertes Wirkung $M-V-T$

Dabei wird pro Beanspruchungsart jeweils etwa wie folgt vorgegangen:

1. Betrachtung der Phänomene (Wirklichkeit)
2. Darstellung möglicher Modelle und - je nach Fall - zugehöriger Algorithmen
3. Vertiefte Betrachtung von einem oder mehreren Rechenverfahren unter Einbezug der schweiz. Normenvorschriften.

Die Ermittlung der Schnittkräfte in den betrachteten Querschnitten bzw. Tragwerksbereichen ist Aufgabe der Baustatik. In statisch unbestimmten Systemen können die Schnittkräfte grundsätzlich sowohl aufgrund der Elastizitätstheorie, als auch aufgrund der Plastizitätstheorie bestimmt werden.

Baustatik $\left\{ \begin{array}{l} \text{Elast. Theorie} \\ \text{Plast. Theorie} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Schnittkräfte} \left\{ \begin{array}{l} \text{aufgrund der} \\ \text{Einwirkungen} \end{array} \right.$

Fest'lehre $\left\{ \begin{array}{l} \text{elastisch} \\ \text{plastisch} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Abmessungen} \\ \text{Spannungen} \\ \text{Verformungen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{aufgrund der} \\ \text{Schnittkräfte} \end{array} \right.$

Mit Hilfe der Festigkeitslehre müssen die Querschnitte bzw. Tragwerksbereiche untersucht und so ausgebildet werden, dass die Schnittkräfte aufgenommen und allfällige weitere Bedingungen (Spannungen, Dehnungen u.s.w.) eingehalten werden.

Die sog. "plastische Festigkeitslehre"

- betrachtet die Beanspruchung von Stabquerschnitten oder Stabbereichen beim Bruch oder bei übermäßigen druckähnlichen Verformungen (Fließen),
- berücksichtigt das plastische Verhalten der Baustoffe Stahl und Beton,
- kann vor allem zur Ermittlung des Tragwiderstandes des betrachteten Querschnittes verwendet werden.

Die plastische Festigkeitslehre dient im Rahmen neuerer Normen dem Nachweis einer genügenden Tragsicherheit.

Die sog. "elastische Festigkeitslehre"

- betrachtet die Beanspruchung von Stabquerschnitten oder Stabbereichen im Gebrauchszustand,
- setzt elastisches Verhalten der Baustoffe Stahl und Beton voraus,
- kann vor allem zur Ermittlung von Spannungen und Verformungen (Rissweiten, Durchbiegungen u.s.w.) verwendet werden.

Die elastische Festigkeitslehre dient im Rahmen neuerer Normen insbesondere dem Nachweis einer genügenden Gebrauchstauglichkeit.

Vergleicht man die plastische und die elastische Festigkeitslehre für die Beanspruchungen "Reine Biegung" und "Biegung mit Normalkraft", so stellt man fest:

- Gleichgewichtsbedingungen und Verträglichkeitsbedingungen sind grundsätzlich von gleicher Art.
- Abweichungen ergeben sich praktisch nur aus den unterschiedlichen Stoffgesetzen und dem unterschiedlichen Beanspruchungs-Niveau.

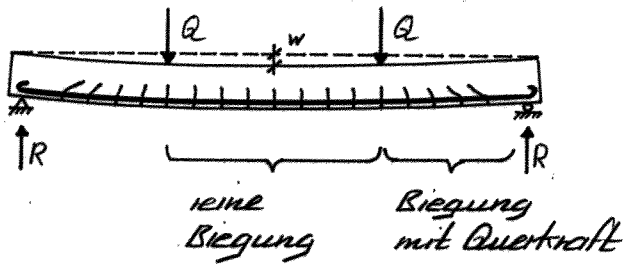
In den folgenden Abschnitten "Reine Biegung" und "Biegung mit Normalkraft" werden daher plastische und elastische Festigkeitslehre unmittelbar hintereinander behandelt.

3.1. Reine Biegung

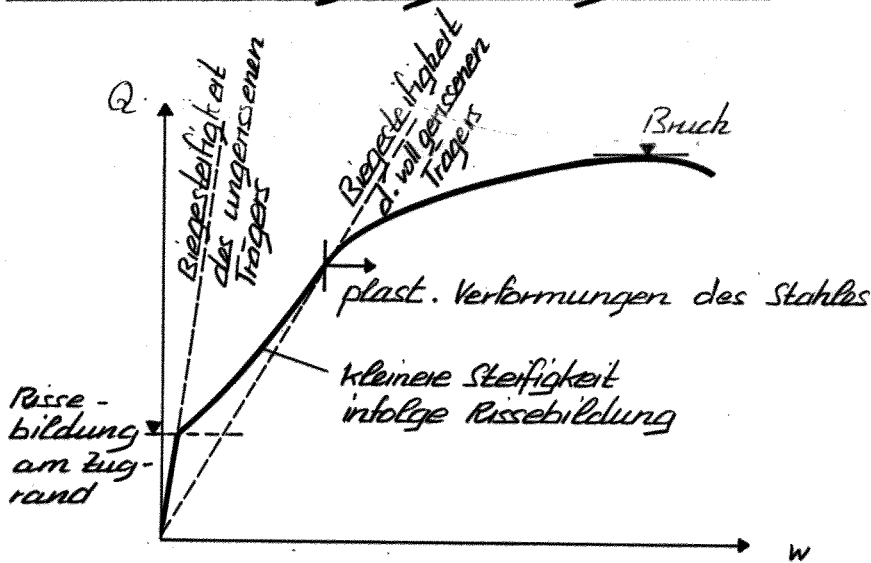
Anwendung v.a. bei Balken und Platten.

3.1.1. Phänomene

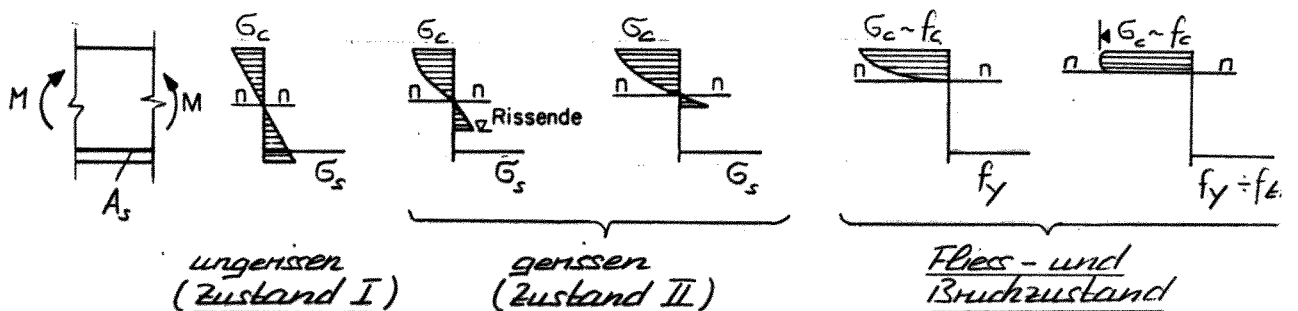
a) Rissebild



b) Last-Durchbiegungs-Diagramm



c) Stadien der Biegebeanspruchung



Ungerissener Zustand bei sehr kleiner Beanspruchung:

Kein Riss solange die Biegezugspannung am unteren Rand kleiner ist als die Betonzugfestigkeit f_{ct} .

Gerissener Zustand bei Beanspruchung unter Gebrauchslasten:

Mit zunehmender Stahldehnung wandert die neutrale Achse $n-n$ nach oben.

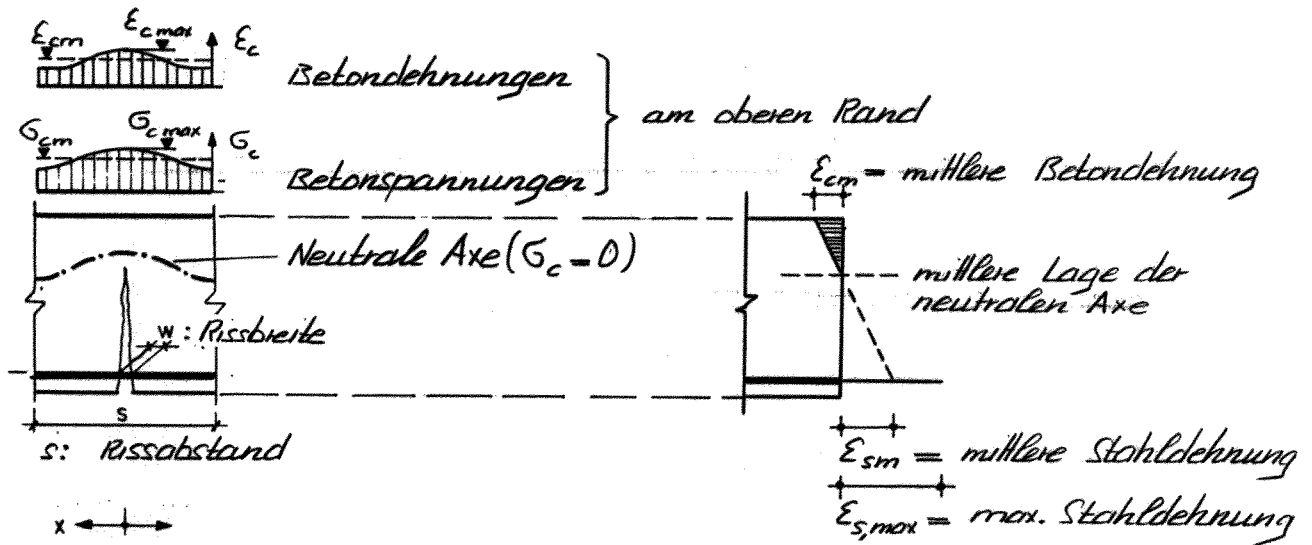
Fließzustand:

Nichtlineares Verhalten (plastische Verformungen, Fließen) des Stahls und des Betons. Starke Zunahme der Verformungen bei nur geringer Erhöhung der Biegebeanspr.

Bruchzustand:

Stahl ev. im Verfestigungsbereich. Abschuppen des Betons am oberen Rand \rightarrow Versagen der Betondruckzone.
(ev. andere Bruchart möglich \rightarrow siehe Brucharten).

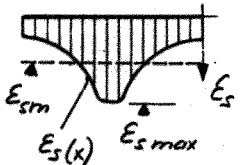
d) Modell des Biegeriss-Elementes



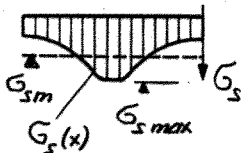
Verbundspannungen zwischen Bewehrungsstab und Beton (entsprechend Verbundgesetz)



Relativverschiebungen zwischen Bewehrungsstab und Beton



Stahldehnungen



Stahlspannungen $\sigma_s(x) = \sigma_{s,max} - \frac{1}{A_s} \cdot \int \tau_v(x) \cdot \phi \cdot \pi \cdot dx$



Betonzugspannungen auf Höhe Bewehrungsstab

Rissbreite auf Höhe der Zugbewehrung

$w \approx 2 v_{max}$

Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen in der Zugzone bewirkt eine Variation der Stahldehnungen und -spannungen längs der Bewehrungsreihen. Dieser Effekt kann durch die Einführung des Verbundkoeffizienten μ als Verhältnis der mittleren Stahldehnung (längs des ganzen Biegeriss-Elementes) und der max. Stahldehnung (im Riss) erfasst werden.

Verbundkoeffizient:

$$\eta = \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{smax}}$$

$$\epsilon_{sm} = \frac{1}{s} \int_0^s \epsilon_s(x) dx : \text{ mittlere Stahldehnung}$$

ϵ_{smax} : max. Stahldehnung (im Riss)

Die Grösse von η schwankt zwischen 0,2 und 1,0 und ist von zahlreichen Parametern abhängig wie:

- Güte des Verbundes d.h. Grösse und Verlauf der Verbundspannungen längs der Zugbewehrung
- Stabdurchmesser ϕ der Zugbewehrung
- Rissabstand s
- Form des σ - ϵ Diagrammes des Stahles
- Höhe der Beanspruchung

η kann für eine bestimmte Parameterkonstellation aus Biegeversuchen ermittelt werden (Bestimmung von ϵ_{smax} und der Längenänderung des Risselementes auf der Höhe der Zugbewehrung). Auch theoretische Ansätze für η sind möglich (vergl. elast. Festigkeitslehre).

Grobe Anhaltspunkte sind:

- Kein Verbund bzw. vollst. zerstörter Verbund: $\eta = 1,0$
- Dicke Stäbe, kleiner Rissabstand: $\eta \approx 0,8 \div 0,9$
- Mittlere Stäbe, mittlerer Rissabstand: $\eta \approx 0,5 \div 0,7$
- Dünne Stäbe, guter Verbund, grosser Rissabstand: $\eta \approx 0,2 \div 0,4$
(kommt u.a. vor wenn s klein ist)
- Beanspruchungshöhe:

Für $\sigma_{smax} < f_y$ werden die η -Werte i.d.R. mit zunehmender max. Stahlspannung grösser.

Für $\sigma_{smax} \geq f_y$ können zwei Extremfälle unterschieden werden:

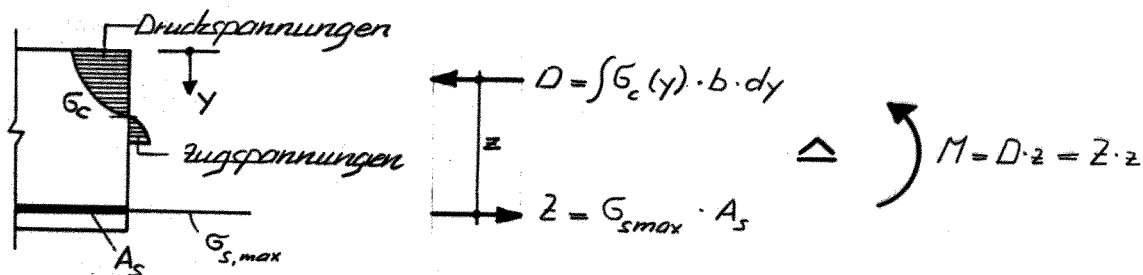
- Dicke Stäbe, weitgehend zerstörter Verbund. } \rightarrow hohe Werte (0,9 \div 1,0)
- Dünne Stäbe, guter Verbund, grosser Rissabstand (Fließen nur im Riss). } \rightarrow sehr kleine Werte (bis 0,2)

Dünne Stäbe, guter Verbund und grosser Rissabstand scheinen sich nach geläufigen Vorstellungen auszuschliessen. Da der Rissabstand aber häufig allein durch den Rügelabstand bestimmt wird (lokale Schwächung der Betonzugzone), ist diese Kombination durchaus möglich und auch beobachtet worden.

Der Einbezug der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bzw. die Einführung des Verbundkoeff. η ist nützlich und wesentlich für:

- die Ermittlung der Biegesteifigkeit im gemessenen Zustand,
- die Abgrenzung der verschiedenen Brucharten.

Innere Kräfte im Rissquerschnitt



Beurteilung des Modells des Biegers - Elementes, Folgerungen

Die Betrachtung am Biegers - Element ist für das qualitative Verständnis des Stahlbetons sehr wichtig. Oft lässt sich damit ein am Bauwerk beobachtetes, u.U. nicht erwartetes Verhalten ausreichend erklären.

Die wirklichen Verhältnisse in einem gemessenen Stahlbetonbalken sind jedoch sehr komplex und können auch durch das Modell des Biegers - Elementes nicht genau erfasst werden.

Vereinfachende Annahmen für die analytische Behandlung:

Längs des ganzen Biegers - Elementes bleiben konstant:

- Betonwandspannung u. Betonwandstauchung
 $\sigma_c = \sigma_{cm} = \text{konst.}; \quad \epsilon_c = \epsilon_{cm} = \text{konst.}$
- Lage der neutralen Axe
- Lage der Druck- und Zugresultierenden

Somit wird nur die Variation der Stahldehnung bzw. Stahlspannung längs des Biegers - Elementes berücksichtigt (η).

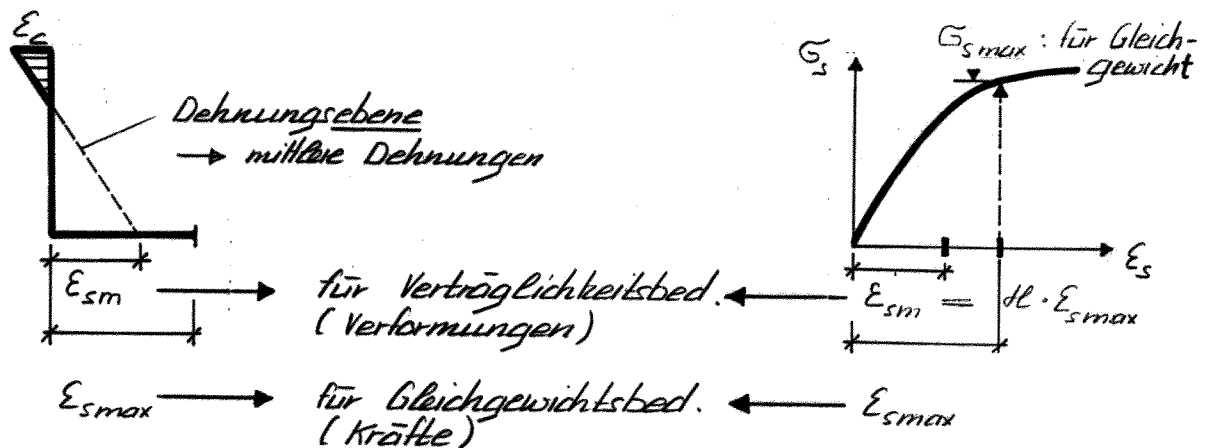
3.1.2. Biege widerstand im Bruchzustand (Plastische Festigkeitslehre)

a) Annahmen der plast. Biegetheorie

- ① Ebenbleiben der Querschnitte (Hypothese von Navier - Bernoulli, d.h. Dehnungen proportional zum Abstand der Neutralaxe.)

Wie das Modell des Biegeelementes zeigt, gilt diese Annahme nur im Mittel über das Biegeelement.

Verformungsberechnungen basieren auf mittleren Dehnungen. Kräfte hingegen werden v.a. im Biegequerschnitt betrachtet. Ihnen entsprechen die maximalen Dehnungen.



Bemerkung:

Ist σ_{smax} noch im linearelastischen Bereich, dann gilt

$$\frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{smax}} = \frac{\sigma_{sm}}{\sigma_{smax}} = d$$

- ② σ - ϵ -Gesetz Stahl

Grundlage ist das Verhalten im Zug bzw. Druckversuch am Probestab bzw. Prisma (Zylinder). Oft Vereinfachung (Idealisierung) der wirklichen Diagramme je nach Art und Zweck der Berechnung.

- ③ σ - ϵ -Gesetz Beton

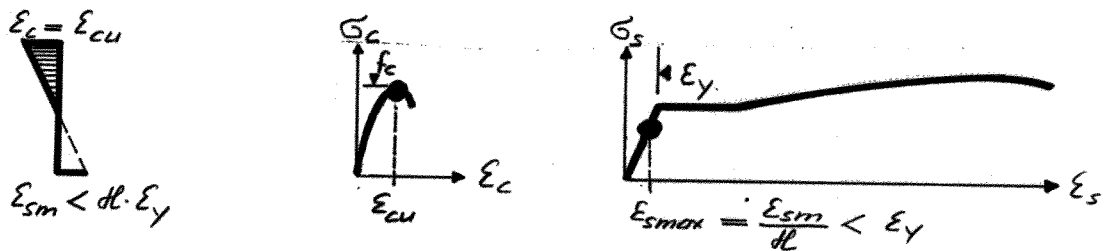
- ④ Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt : $f_{ct} = 0$

Annahme liegt auf der sicheren Seite

b) Zustände die zum Bruch führen

Der Biegewiderstand ist dann erschöpft, wenn entweder die Druckfestigkeit des Betons f_c in der Druckzone, oder die Zugfestigkeit des Stahles f_{tk} in der Zugzone erreicht ist. Es können dabei vier verschiedene Brucharten unterschieden werden:

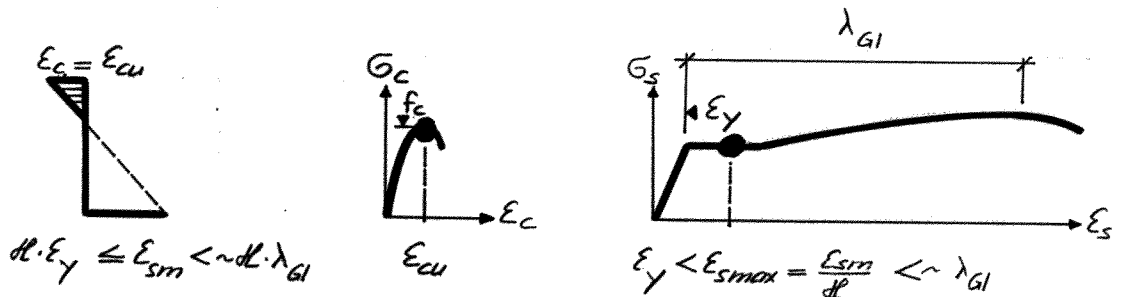
• Betonbruch vor Stahlfließen:



Spröder Bruch, nur geringe Vorankündigung, daher möglichst vermeiden!

Ist bei sehr hohen Bewehrungsgehalten möglich.

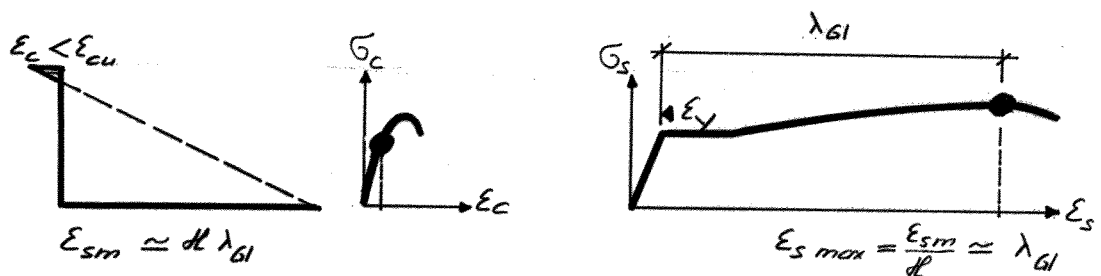
• Betonbruch während Stahlfließen:



Duktiler Bruch, kündigt sich durch Risse an.

Häufigste Bruchart. Ist anzustreben!

• Stahlbruch vor Betonbruch:

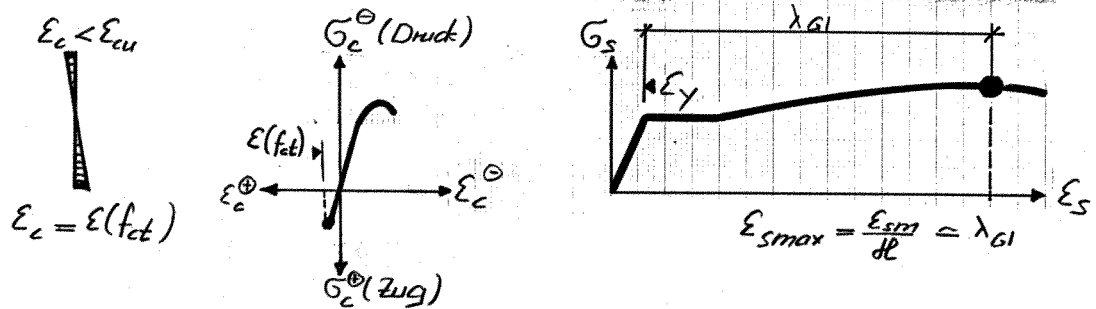


Duktiler Bruch, kündigt sich durch breite Risse an.

Ist möglich bei Stahlbeton- und insbesondere bei Spann-

Betonquerschnitten mit hochwertiger Zugbewehrung und sehr gutem Verbund. Tendenz zu dieser Bruchart grösser mit kleinerer Gleichmassdehnung, kleinerer Verfestigung, besserem Verbund, kleinerem Bewehrungsgehalt, stärker ausgebildeter Biegedruckzone (Druckflansch) und / oder stärker verformbarer Biegedruckzone (Druckeisen und enge Verbügelung).

● Stahlbruch bei Rissebildung:



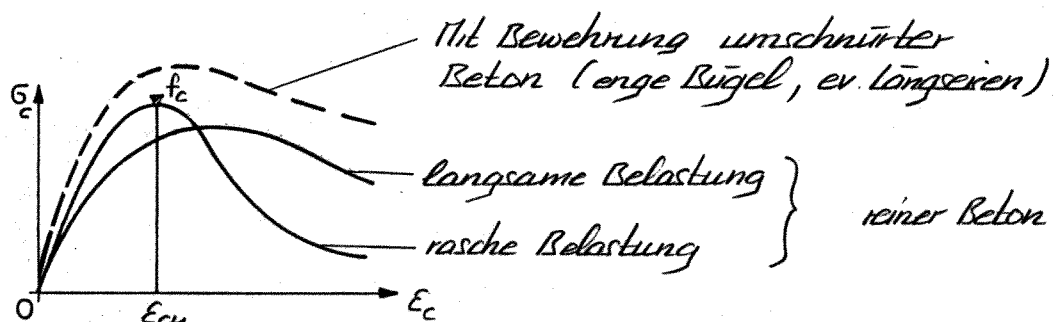
Plötzlicher, sehr spröder Bruch beim Auftreten des ersten Risses mit sofortigem Zerreissen des Stahles. Keine Vorankündigung, gefährlich. Muss durch Einlegen einer Mindestbewehrung vermieden werden!

Bruchart tritt dann ein, wenn die Bewehrung zu schwach ist, um die Kraft des Betonzugkeiles zu übernehmen, oder genauer - da der innere Hebelarm anwächst - sofern der Biege widerstand im gerissenen Zustand (analog Stahlbruch vor Betonbruch) kleiner ist als das Rissmoment.

c) Berechnung des plast. Momentes M_{pl}

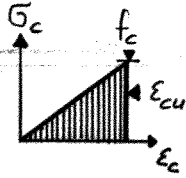
Stoffgesetze Beton

Wirklich:

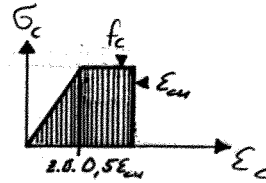


Idealisiert: Das tatsächliche Stoffgesetz lässt sich auf mehrere Arten annähern.

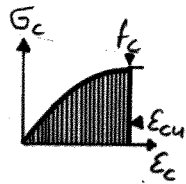
① linear-elastisch:



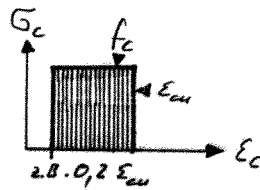
② elastisch-plastisch:



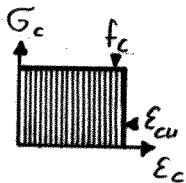
③ quadratische oder kubische Parabel:



④ starr-plastisch:



⑤ starr-plastisch:

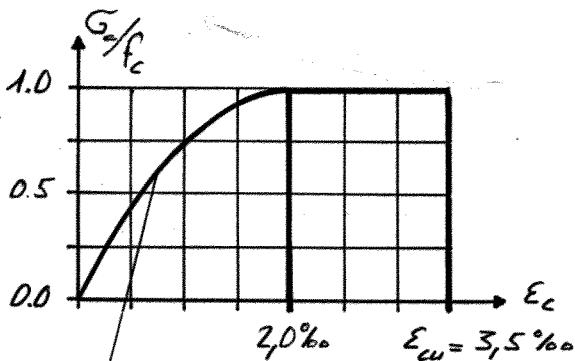


f_c : Rechenwert der Druckfestigkeit

ϵ_{cu} : Rechenwert der Bruchstauchung

Idealisierte Stoffgesetze gem. SIA 162:

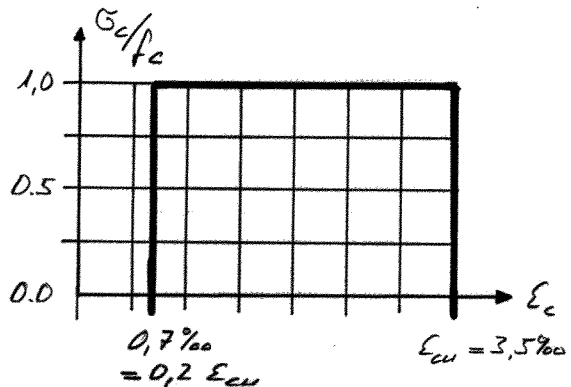
⑥ Quadratische Parabel mit "Fließgerade":



$$\frac{\sigma_c}{f_c} = -1000 \cdot \epsilon_c (1 + 250 \cdot \epsilon_c)$$

(ϵ_c negativ!)

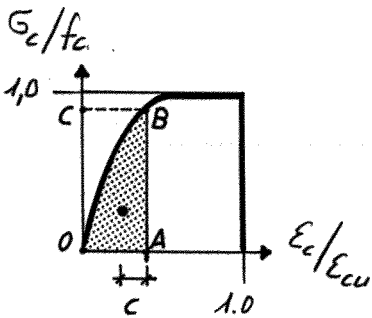
i.d.R. darf die vereinfachte starr-plastische σ -Verteilung angenommen werden:



$$f_c = 0,65 \cdot f_{cu, \min}$$

(vergl. S. 2-11)

Bei der Berechnung mit idealisierten Stoffgesetzen leisten die sog. Flächen- und Schwerpunktparameter gute Dienste:



normierte Darstellung

Flächenparameter k_1 :

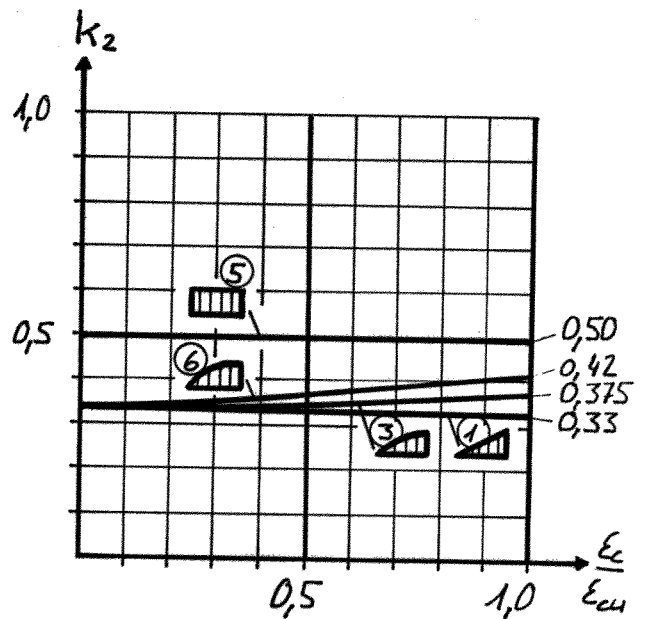
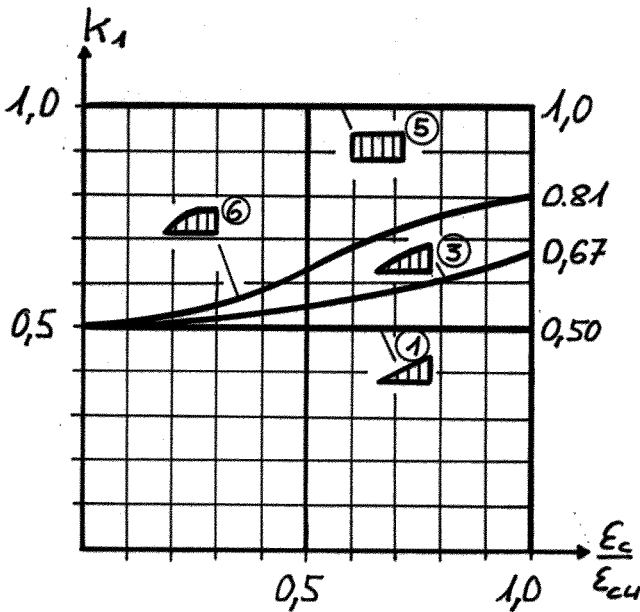
Verhältnis der Fläche A_{OAB} (punktiert) zur Fläche A_{OABC} (Rechteck).

$$A_{OAB} = k_1 \frac{\sigma_c}{f_c} \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}$$

Schwerpunktparameter k_2 :

$$c = k_2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}$$

Werte von k_1 und k_2 für den Fall gleichbleibender Breite der Biegedruckzone (z.B. Rechteck-BS) sind den folgenden Diagrammen u. Tabellen zu entnehmen:



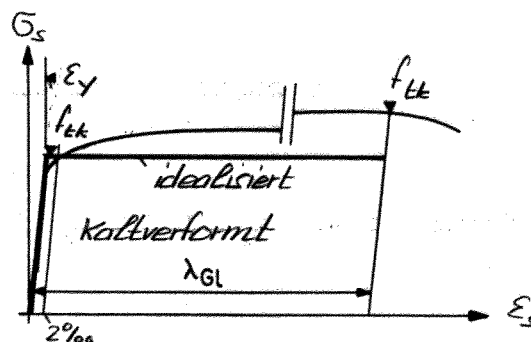
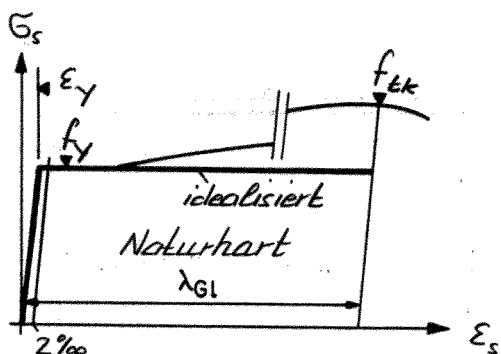
- ① linear elastisch
- ③ quadrat Parabel
- ⑤ starr plastisch

⑥ SIA 162

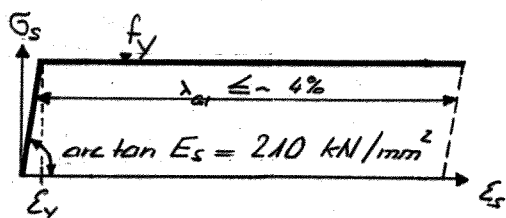
$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}$	$\frac{\sigma_c}{f_c}$	k_1	k_2
0,5	0,44	0,52	0,33
1,0	0,75	0,55	0,34
1,5	0,94	0,60	0,36
2,0	1,00	0,66	0,37
2,5	1,00	0,73	0,39
3,0	1,00	0,78	0,41
3,5	1,00	0,81	0,42

Stoffgesetze Stahl

Wirklich und idealisiert (Rechenwert) vergl. S. 2.-31.



Idealisiertes Stoffgesetz gem. SIA 162:



f_y : Rechenwert der Fließgrenze

S 235 : $f_y = 220 \text{ N/mm}^2$ (stift)

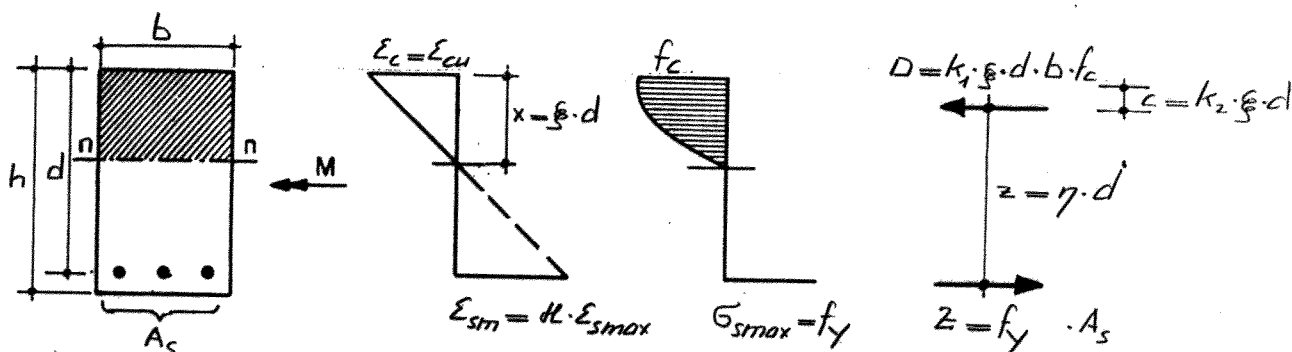
S 500 : $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$ (profiliert)

S 550 : $f_y = 520 \text{ N/mm}^2$ (")

ϵ_y : Rechenwert der Fließdehnung

$$\epsilon_y = f_y / E_s$$

M_{pl} beim Rechteck-Querschnitt ohne Druckbewehrung



Annahmen zur Berechnung des plastischen Momentes:

Versagen des Querschnittes durch Betonbruch während Stahlfließens!

-
- Betonrandstauchung : $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ (Rechenwert d. Bruchstauchung)
 - Betonrandspannung : $\sigma_c = f_c$ (Rechenwert d. Druckfestigkeit)
 - Dehnung der Zugbewehrung im Riss : $\epsilon_y < \epsilon_{smax} < \left(\frac{f_y}{E_s} + \lambda_{GI}\right) \approx \lambda_{GI}$
 - Spannung der Zugbewehrung im Riss : $\sigma_{smax} = f_y$ (Rechenwert der Fließgrenze)

Infolge linearer Dehnungsverteilung (Ebenbleiben des Querschnittes), ist die Kurve der Betonspannungen affin zum $\sigma_c - \epsilon_c$ -Diagramm.

→ Grösse und Lage von D durch k_1 und k_2 festgelegt!

Lage der neutralen Axe n-n:

$$\sum N = 0 : N = \int \sigma \cdot dA = 0 = k_1 \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot f_c - A_s \cdot f_y$$

mit $s = \frac{A_s}{b \cdot d}$: s = "geometrischer" Bewehrungsgehalt

resp. $w = \frac{A_s}{b \cdot d} \cdot \frac{f_y}{f_c}$: w = "mechanischer" oder "bezogener" Bewehrungsgehalt

→

$$\xi = \frac{s}{k_1} \cdot \frac{f_y}{f_c} = \frac{w}{k_1}$$

$x = \xi \cdot d$
 d : "statische Höhe" des Querschnittes

Plastisches Moment M_{pl} :

$$M_{pl} = z \cdot z = D \cdot z$$

$$M_{pl} = z \cdot d \left(1 - k_2 \cdot \xi\right) = A_s \cdot f_y \cdot d \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \cdot s \cdot \frac{f_y}{f_c}\right)$$

$$\text{mit } k_3 = \frac{k_2}{k_1}$$

$$M_{pl} = f_y \cdot s \cdot b \cdot d^2 \left(1 - k_3 \cdot s \cdot \frac{f_y}{f_c}\right) = A_s \cdot f_y \cdot \underbrace{\eta \cdot d}_z$$

$$z = d \left(1 - k_3 \cdot s \cdot \frac{f_y}{f_c}\right) : \text{Hebelarm der inneren Kräfte}$$

7

Näherungsformel für M_{pl} :

Für den Rechteckquerschnitt gilt näherungsweise: $\eta \approx 0,9$

$$M_{pl} \approx 2 \cdot 0,9d = A_s \cdot f_y \cdot 0,9d$$

Gültigkeitsbereich der Formel für M_{pl} :

Der gereichte Berechnungsgang ist nur zulässig, falls die weitangs erwähnte Annahme "Versagen durch Betonbruch während Stahlfließen" tatsächlich zutrifft. Die Annahme kann durch (Auszeichnen der Dehnungsebene) oder durch Eingrenzung des Bewehrungsgehaltes kontrolliert werden.

Es gilt:

$$s_{krit} < s < s_{grenz}$$

(Die Begriffe s_{krit} und s_{grenz} werden im Abschnitt Biegebrucharten S.3.1-23 definiert)

Für $s > s_{grenz}$ resp. $s < s_{krit}$ kann M_{pl} z.B. mit Hilfe des "Probierverfahrens" ermittelt werden (siehe S. 3.1-20)

Da allerdings für $s > s_{grenz}$ ein gefährliches, sprödes Bruchversagen zu erwarten ist und $s < s_{krit}$ eine geringe, ev. unwirtschaftl. Ausnutzung der Betondruckzone zur Folge hat, sollen diese Fälle möglichst vermieden werden (Betonabmessungen od. Querschnittsform ändern, ev. Druckbewehrung einlegen).

Diskussion

① Einfluss der Druckfestigkeit des Betons f_c auf M_{pl} :

Beispiel: Rechteck-QS ohne Druckbewehrung

Stahl: $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$; $s = 1\%$

Beton I: $f_c = 24 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \eta = 0,901$

Beton II: $f_c = 12 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \eta = 0,801$

M_{pl} wird um 11% reduziert

Folgerung: Einfluss von f_c auf η resp M_{pl} gering.





Achtung: Geringere Betonfestigkeiten jedoch für Gebrauchsvverhalten ungünstig wegen grösseren Verformungen (elastisch und Kriechen!).

② Einfluss der angenommenen σ_c -Verteilung auf η_{pl} :

Beispiel: Rechteck-BSt ohne Druckbewehrung

Beton: $f_c = 24 \text{ N/mm}^2$; Stahl: $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$

Verbundkoeffizient $\mu = 0,9$

σ_c -Verteilung	$k_3 = \frac{k_2}{k_1}$	$\rho = 0,7\%$			$\rho = 1,4\%$		
		$\xi = \frac{x}{d}$	η	$\eta [\%]$	$\xi = \frac{x}{d}$	η	$\eta [\%]$
 ⑥ SIA 162	$\frac{0,42}{0,81} = 0,52$	0,166	0,930	100	0,331	0,860	100
 ③ Parabel (quadrat.)	$\frac{0,375}{0,67} = 0,56$	0,200	0,925	99,5	0,400	0,850	98,8
 ⑤ Rechteck	$\frac{0,5}{1,0} = 0,50$	0,134	0,933	100,3	0,268	0,866	100,7
 ① Dreieck	$\frac{0,33}{0,50} = 0,67$	0,268	0,910	97,8	0,537	0,820	95,3

Ergebnis: Einfluss der σ_c -Verteilung auf η resp. η_{pl} (ohne Biegung) gering. Unterschiede liegen innerhalb der Versuchsgenauigkeit.

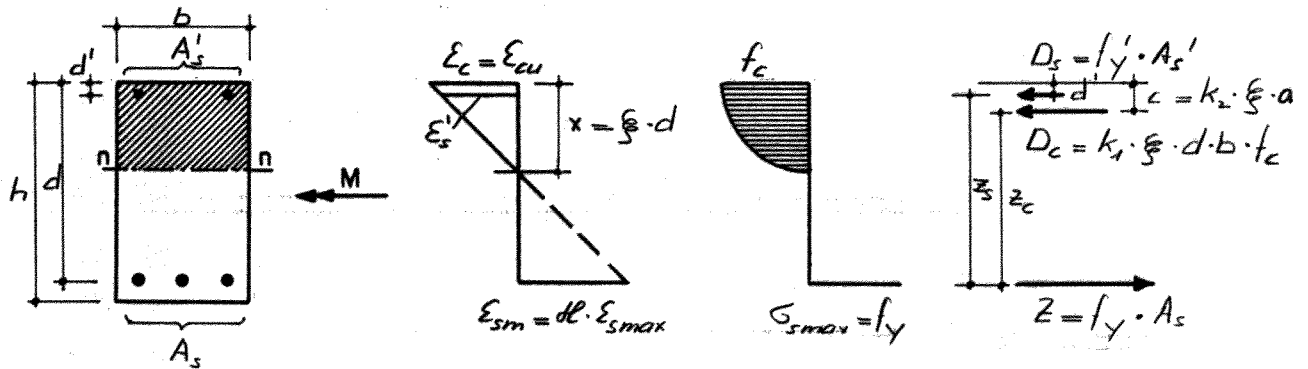
→ η_{pl} kann rel. genau mit Hilfe der rechteckigen σ_c -Verteilung abgeschätzt werden.

Achtung: Für Verformungsbedingungen rechteckige σ_c -Verteilung nicht benutzen, da $x = \xi \cdot d$ unterschätzt wird!

③ Einfluss der Fließgrenze von Stahl f_y auf η_{pl} :

Einfluss gross, da η ca. proportional zu f_y

M_{pl} bei Rechteck-BS mit Druckbewehrung



Annahmen zur Berechnung des plastischen Momentes:

Versagen des Querschnittes durch Betonbruch während Stahlfließen (Fließen der Druck- und Zugbewehrung)

→ Bedingungen analog Rechteckquerschnitt ohne Druckbewehrung.
Zusätzlich:

Dehnung der Druckbewehrung: $\epsilon_s' > \epsilon_y$

Spannung der Druckbewehrung: $\sigma_s' = f_y'$

Lage der neutralen Axe n-n:

$$\sum N = 0: N = \int \sigma dA = 0 = D_c + D_s - Z$$

$$= k_1 \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot f_c + A_s' \cdot f_y' - A_s \cdot f_y$$

$$\text{mit } \rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \text{ und } \rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d} \text{ und } f_y = f_y'$$

$$\rightarrow \boxed{\xi = \frac{\rho - \rho'}{k_1} \cdot \frac{f_y}{f_c}} \quad x = \xi \cdot d$$

d : statische Höhe

Plastisches Moment M_{pl} :

$$M_{pl} = D_c \cdot z_c + D_s \cdot z_s$$

$$M_{pl} = A_s \cdot f_y \cdot d \cdot (1 - k_2 \cdot \xi) + A_s' \cdot f_y \cdot (k_2 \cdot \xi \cdot d - d')$$

$$\rightarrow \boxed{M_{pl} = f_y \cdot b \cdot d^2 \left[(1 - k_2 \cdot \xi) + \frac{\rho'}{\rho} (k_2 \cdot \xi - \frac{d'}{d}) \right]}$$

Anzahl inf. A_s'

Gültigkeitsbereich der Formel für M_{pe} :

Die Annahme "Betonbruch während Fließens der Druck- und Zugbewehrung" wird vorzugsweise direkt mit Hilfe der Dehnungsebene kontrolliert.

Fließt die Druckbewehrung beim Bruch des Betons noch nicht ($\epsilon_s' < \epsilon_{sy}$), muss ϵ_s' aus der vorerst angenommenen Dehnungsebene ermittelt werden (iteratives Vorgehen).

→ Gewisse Reduktion des nach obiger Formel berechneten M_{pl} .

Einfluss der Druckbewehrung auf M_{pl} :

Beispiel: Rechteckquerschnitt mit $\frac{d'}{d} = 0,1$

Beton: $f_c = 18 \text{ N/mm}^2$; $k_1 = 0,81$; $k_2 = 0,42$

Stahl: $f_{sy} = 460 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_s = 2\%$; $\kappa = 0,8$

	ξ	η	$\eta\%$
$s' = 0$	0,631	0,735	100
$s' = s/2$	0,316	0,884	120
$s' = s$	0,181	0,916	125

Druckbewehrung fließt
Druckbew. fließt nicht

Bemerkung: Da bei $s' = s$ die Druckbew. nicht mehr ins Fließen kommt, muss η resp M_{pl} iterativ berechnet werden.

Beurteilung der Druckbewehrung:

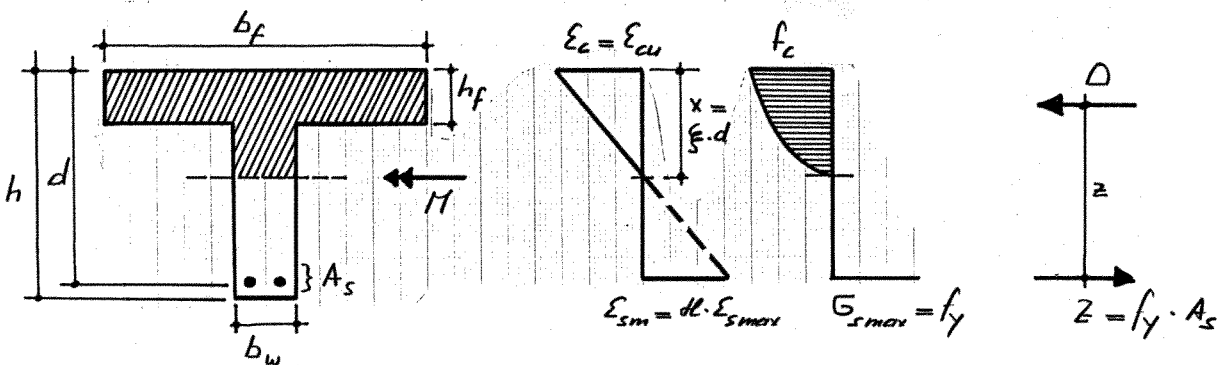
- Einfluss auf die Größe von M_{pl} meist klein, insbesondere dann wenn A_s' nicht mehr ins Fließen kommt.
→ Druckbewehrung i.a. unwirtschaftlich.
- Durch Austricken der Druckbewehrung evtl. vorzeitiges Versagen der Biegedruckzone.
→ Gute Verbügelung wichtig (~ analog Stützen).
- Druckbewehrung vermindert Kriechen der Betondruckzone.
→ Druckbewehrung nützlich z.B. bei Kragarmen.

- Druckbewehrung erhöht bei enger Verbügelung die Verformungsfähigkeit (sog. Rotationsfähigkeit).
- Äußere Betonschale löst sich ab, nur Beton innerhalb Bügel und Druckeisen noch wirksam. ϵ_{cu} kann bis auf $8 \div 12\%$ anwachsen.

Regelung des Druckbewehrungsgehaltes nach SIA 162:

Die in Rechnung gestellte Druckbewehrung darf i.o. höchstens die Hälfte der Betondruckkraft aufnehmen und muss gegen Ausweichen verbügelt sein: $D_s \leq D_c/2$

M_{pl} beim Plattenbalken-Querschnitt



Vorteil Plattenbalkenquerschnitt gegenüber (hohem) Rechteckquerschnitt:

Reduktion der für den Biege-widerstand im gerissenen Zustand unwirksamen Betonmasse in der Zugzone.

→ Geringere Betonkubaturen, kleineres Eigengewicht.

Nachteile: Aufwendigere Schalung, kompliziertere Bewehrung (Bügel)

Annahmen zur Berechnung des plastischen Momentes M_{pl} :

Analog Rechteckquerschnitt:

Versagen des Querschnittes durch Betonbruch während Stahlfließens

Problematik bei der Berechnung:

Analytische Formulierung von Druckkraft D und Hebelarm z bei allg. Stoffgesetz des Betons umständlich!

→ Iterative Verfahren vorteilhaft.

Mögliches Vorgehen für beliebiges Stoffgesetz des Betons

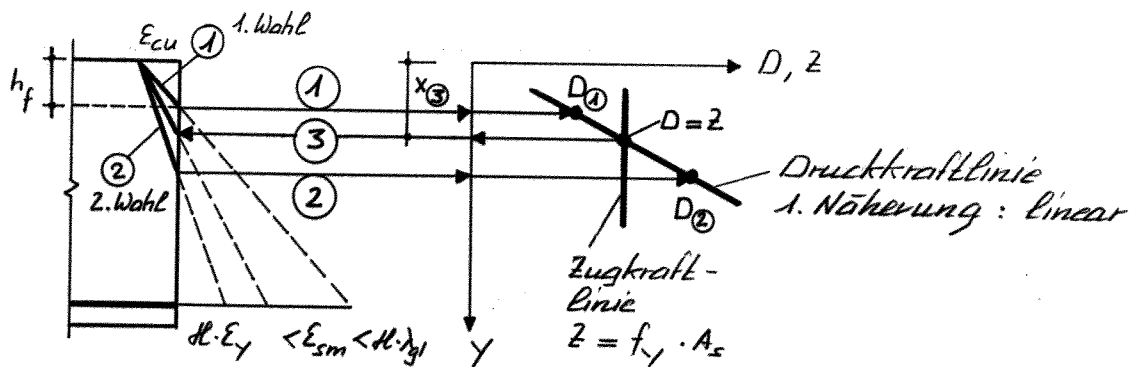
(sog. Probierverfahren)

1. Berechnung von $Z = f_y \cdot A_s$
2. Annahme: $x = h_f \rightarrow D = k_1 \cdot h_f \cdot b_f \cdot f_c$
(Dehnungsebene gegeben durch ϵ_{cu} und h_f)
3. Für $D \geq Z : x \leq h_f \rightarrow$ Berechnung wie Rechteck-BS

Für $D < Z : x > h_f$ wählen und variieren bis das Gleichgewicht $D = Z$ genügend genau erfüllt ist.

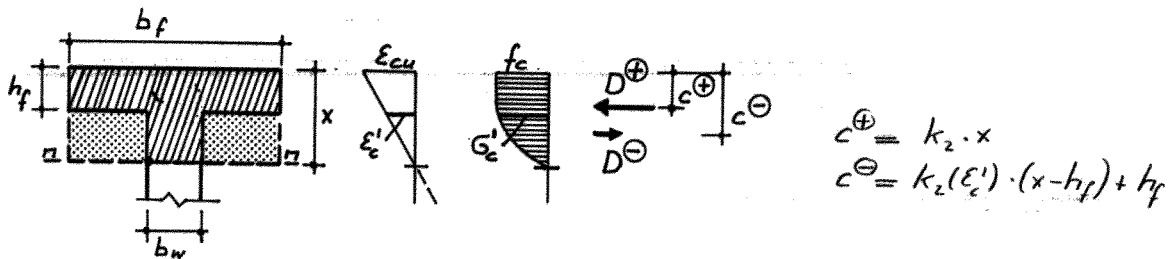
4. Plastisches Moment $M_{pl} = D \cdot z = Z \cdot z$
5. Kontrolle ob tatsächlich "Fließen im Stahl" durch Aufzeichnen der Dehnungsebene

Graphische Hilfe zur Bestimmung von $D=Z$



Kontrolle mit x_{III} : $D_{\text{III}} = Z$; falls nicht genügend genau erfüllt: nochmalige Iteration.

Praktische Methode für die Berechnung von D :



gedachte Rechteckfläche $\rightarrow D^{\oplus} = k_1 \cdot b_f \cdot x \cdot f_c$



Hilfsfläche $\rightarrow D^{\ominus} = k_1(\varepsilon_c') \cdot (b_f - b_w) \cdot (x - h_f) \cdot \sigma_s'$

$$D = D^{\oplus} - D^{\ominus}$$

$$\Rightarrow \underline{M_p = D^{\oplus}(d - c^{\oplus}) - D^{\ominus}(d - c^{\ominus})}$$

Die Werte für $k_1(\varepsilon_c')$, $k_2(\varepsilon_c')$, σ_s' können den Diagrammen S. 3.1-11 und S. 3.1-12 entnommen werden.

Eine allfällige Druckbewehrung lässt sich analog mitberücksichtigen, hat jedoch nur geringen Einfluss.

M_{pl} des allg. Querschnittes

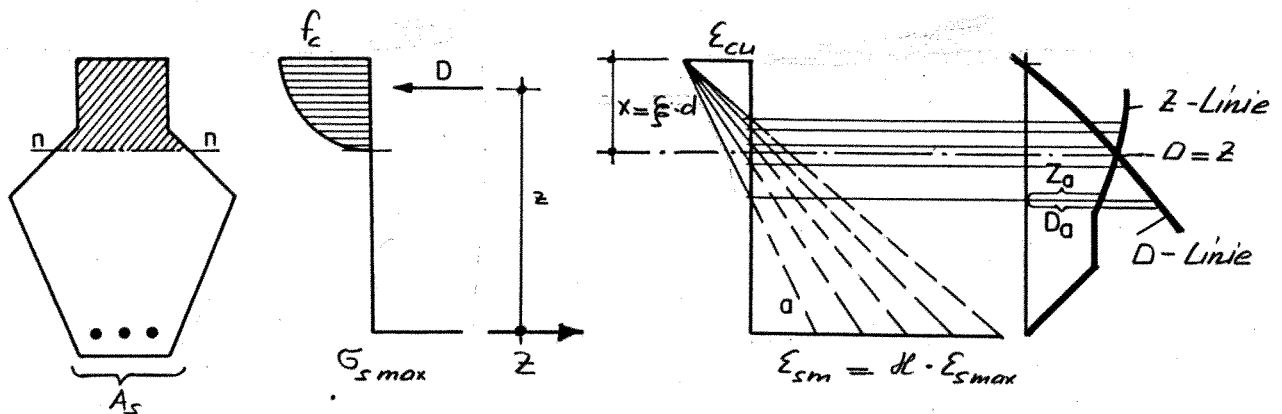
Beim allgemeinen Querschnitt wird der Biege­widerstand vorzugsweise mit Hilfe des rechteckigen $\sigma_c - \epsilon_c$ -Diagrammes ermittelt. Es kann dabei nach dem Probiervorgehen vorgegangen werden.

Für "genauere" Berechnungen stehen Tabellenwerte (z.B. Walther-Tabelle [30]) und Computerprogramme (z.B. FAGUS 2 [56] od. STARENA [65]) zur Verfügung.

d) Berechnung des "genauen" Bruchmomentes M_{Br}

Durch die Annahme von idealisierten, charakteristischen Stoffgesetzen zur Ermittlung des plastischen Momentes wird der tatsächliche Biege­widerstand i.d.R. unterschätzt.

Die Berechnung des sog. Bruchmomentes basiert auf wirklichkeitsnäheren, aus Kraft-Verformungsversuchen bestimmten Stoffgesetzen und ermöglicht eine genauere Bestimmung von Widerstand und Krümmung beim Bruch.



Beim gezeigten Beispiel ergibt z.B. die Berücksichtigung der Verfestigung des naturharten Stahles (Z-Linie) einen etwas höheren Biege­widerstand.

Beurteilung:

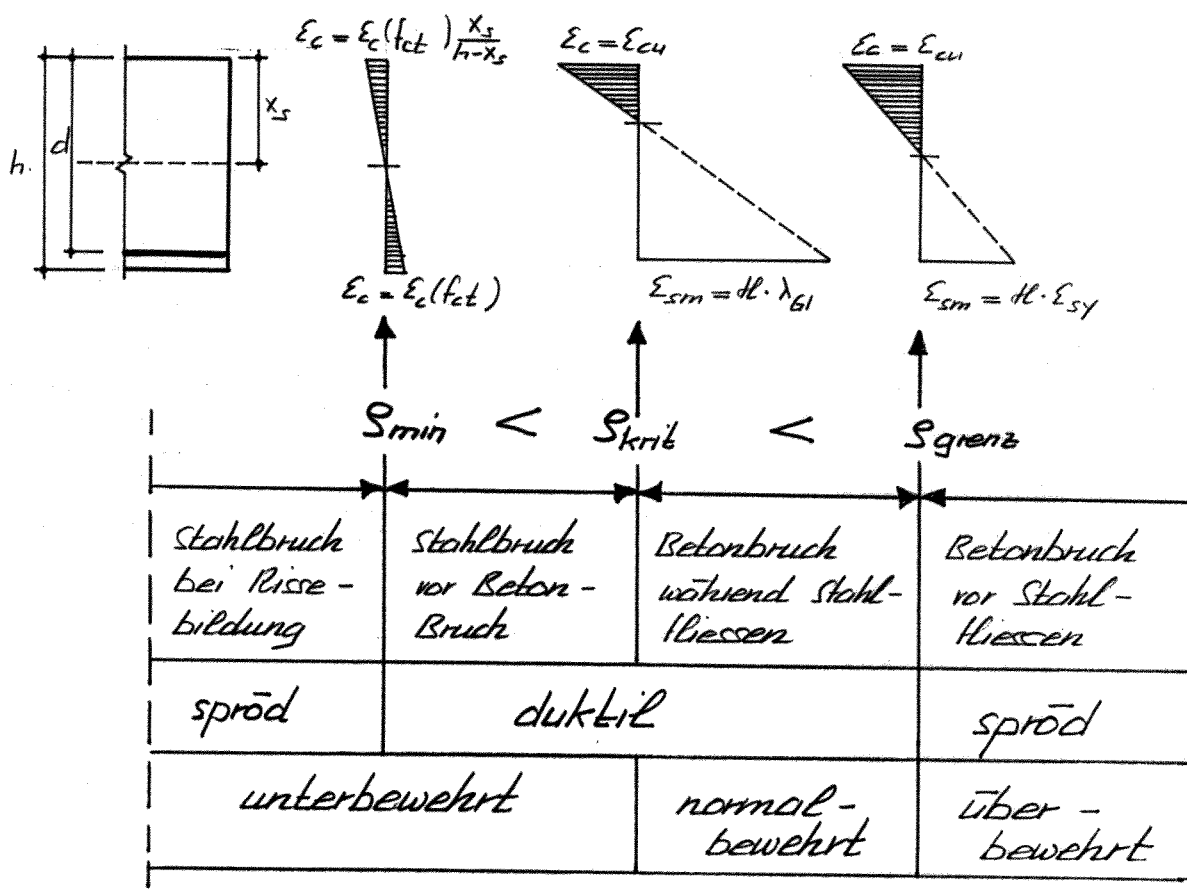
Die verfeinerte Berechnung des Bruchmomentes lohnt sich oft nicht, da andere unsichere Annahmen (v.a. Ebenbleiben, ϵ_{cu} , k) die Erfassung der wirklichen Verhältnisse ohnehin verunmöglicht.

Bruchmoment rel. wichtig für Forschungs- und Belastungsversuche.

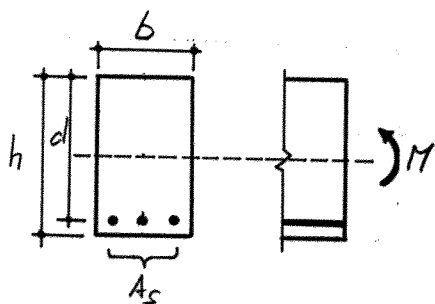
e) Biegebrucharten

- Die vier Brucharten
- Betonbruch vor Stahlfließen
 - Betonbruch während Stahlfließen
 - Stahlbruch vor Betonbruch
 - Stahlbruch bei Rissebildung

lassen sich mit Hilfe von charakteristischen Werten des Bewehrungsgehaltes und den zugehörigen charakteristischen Dehnungsebenen abgrenzen.



Beispiel: Rechteckquerschnitt ohne Druckbewehrung



$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$$

Beton: $f_c = 18 \text{ N/mm}^2$
 $f_{ct} = 3 \text{ N/mm}^2$
 $k_1 = 0,81 \text{ (SIA 162)}$

Stahl: $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$
 $f_{tk} = 600 \text{ N/mm}^2 \text{ (S 500 a)}$

S_{min} : "Minimale Bewehrungsgehalt":

Gleicher Biege widerstand bei Bildung des ersten Risses und bei Bruch des Stahls.

$$M_{Riss} = M_r = f_{ct} \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} = M_{br} = A_s \cdot f_{tk} \cdot z$$

$$\text{mit } z \approx 0,9 \cdot d \approx (0,9)^2 \cdot h$$

$$\rightarrow \boxed{S_{min} = \frac{1}{4,4} \cdot \frac{f_{ct}}{f_{tk}}} \quad (\text{nur für Rechteckquerschnitt})$$

Variante:

Häufig wird zur Berechnung einer konstruktiv erforderlichen Mindestbewehrung S_{min} nicht f_{tk} , sondern f_y oder (sicherheitshalber) eine noch kleinere Spannung σ_s eingesetzt. S_{min} ist dann derjenige Bewehrungsgehalt, bei dem bei Bildung des ersten Risses gerade die Spannung σ_s in der Bewehrung erreicht wird:

$$M_{Riss} = M_r = f_{ct} \cdot \frac{b h^2}{6} = A_s \cdot \sigma_s \cdot z$$

$$\text{mit } z = 0,9 d \approx (0,9)^2 \cdot h$$

$$\rightarrow \boxed{S_{min} = \frac{1}{4,4} \cdot \frac{f_{ct}}{\sigma_s}} \quad (\text{nur für Rechteckquerschnitt})$$

numerisch für Bsp S. 3.1-23 mit $\sigma_s = f_y$:

$$\boxed{S_{min} = 0,15 \%}$$

S_{krit} : "Kritischer Bewehrungsgehalt"

Bruch des Stahls (Beginn der Einschnürung) gleichzeitig mit Betonbruch:

Entsprechend der Dehnungsebene für S_{krit} auf S. 3.1-23 folgt:

Aus Verträglichkeit: $\frac{\epsilon_{cu}}{\eta \cdot \lambda_{GI}} = \frac{x}{d-x} \rightarrow x = \frac{d}{1 + \frac{\eta \cdot \lambda_{GI}}{\epsilon_{cu}}} \quad (1)$

Aus Gleichgewicht: $D = Z$

$$k_1 \cdot x \cdot b \cdot f_c = A_s \cdot f_{tk} \rightarrow x = \frac{A_s \cdot f_{tk}}{k_1 \cdot b \cdot f_c} \quad (2)$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt sich
für $\xi = \frac{A_s}{b \cdot d}$:

$$\rightarrow \xi_{krit} = k_1 \cdot \frac{f_c}{f_{tk}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\eta \cdot \lambda_{GI}}{\epsilon_{cu}}} \quad (\text{nur für Rechteckquerschnitt})$$

numerisch für Bsp. S. 3.1-23

λ_{GI} [‰]	η	ϵ_{cu} [‰]	ξ_{krit} [‰]
40	0,5	3,5	0,36
80	0,5	3,5	0,20
40	0,5	5,0	0,48
40	0,8	3,5	0,24

S_{grenz}: "Grenzbewehrungsgehalt"
Fließbeginn des Stahles gleichzeitig mit Betonbruch:

Herleitung analog zu ξ_{krit} :

$$\rightarrow S_{grenz} = k_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\eta \cdot \epsilon_y}{\epsilon_{cu}}} \quad (\text{nur für Rechteckquerschnitt})$$

numerisch für Beispiel S. 3.1-23:

ϵ_y [‰]	h	ϵ_{cu} [‰]	S_{grenz} [%]
2,2	0,8	3,5	2,11
2,2	0,8	5,0	2,73

Begrenzungen des Bewehrungsgehaltes nach SIA 162:

Untere Begrenzung: $S \geq S_{\text{min}}$

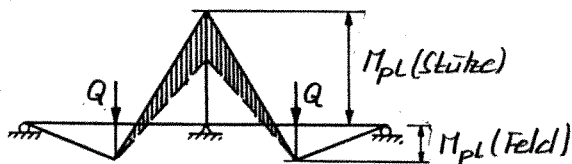
Obere Begrenzung: Höhe der Druckzone ist auf $x_{\text{max}} = 0,5d$ zu beschränken ($\approx S_{\text{grenz}}$)

f) Rotationsfähigkeit plast. Gelenke

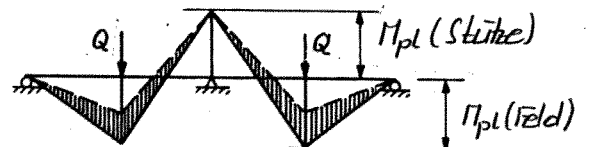
Wird bei der Bemessung eines statisch unbestimmten Tragwerks eine Umlagerung der Momente durch Zulassen von "plastischen Gelenken" in Rechnung gestellt, muss der betreffende Bereich des Tragwerkes eine ausreichende Rotationsfähigkeit aufweisen.

Beispiel symmetrischer Zweifeldträger

Schnittkraftumlagerung nach plastischem Gelenk im Feld:

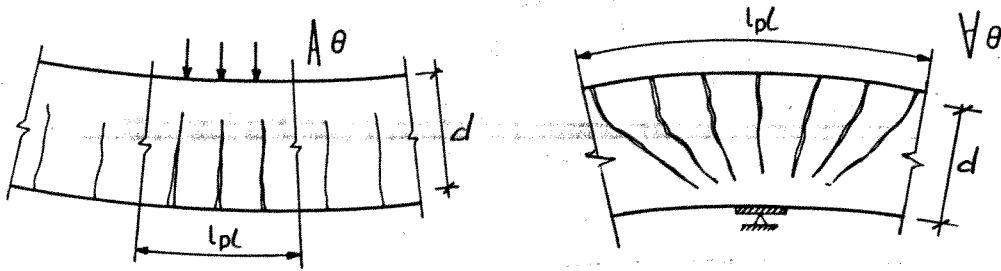


Schnittkraftumlagerung nach plastischem Gelenk über d. Stütze:



- Gerade nach "elastische" M -Linie bei Rotationsbeginn unter der Fließlast Q_{fl} .
- Endgültige "plastische" M -Linie unter maximal möglicher Traglast Q_{pl} .

Rotationsfähigkeit plastischer Gelenke = Verformungsfähigkeit
plastifizierter Bereiche.



"Biegemoment-Gelenk"

"Schubmoment-Gelenk"

l_{pl} : Plastische Länge (Bereich der plastischen Verformungen des
Stahles)

$$l_{pe} \approx (0,5 \div 2) d$$

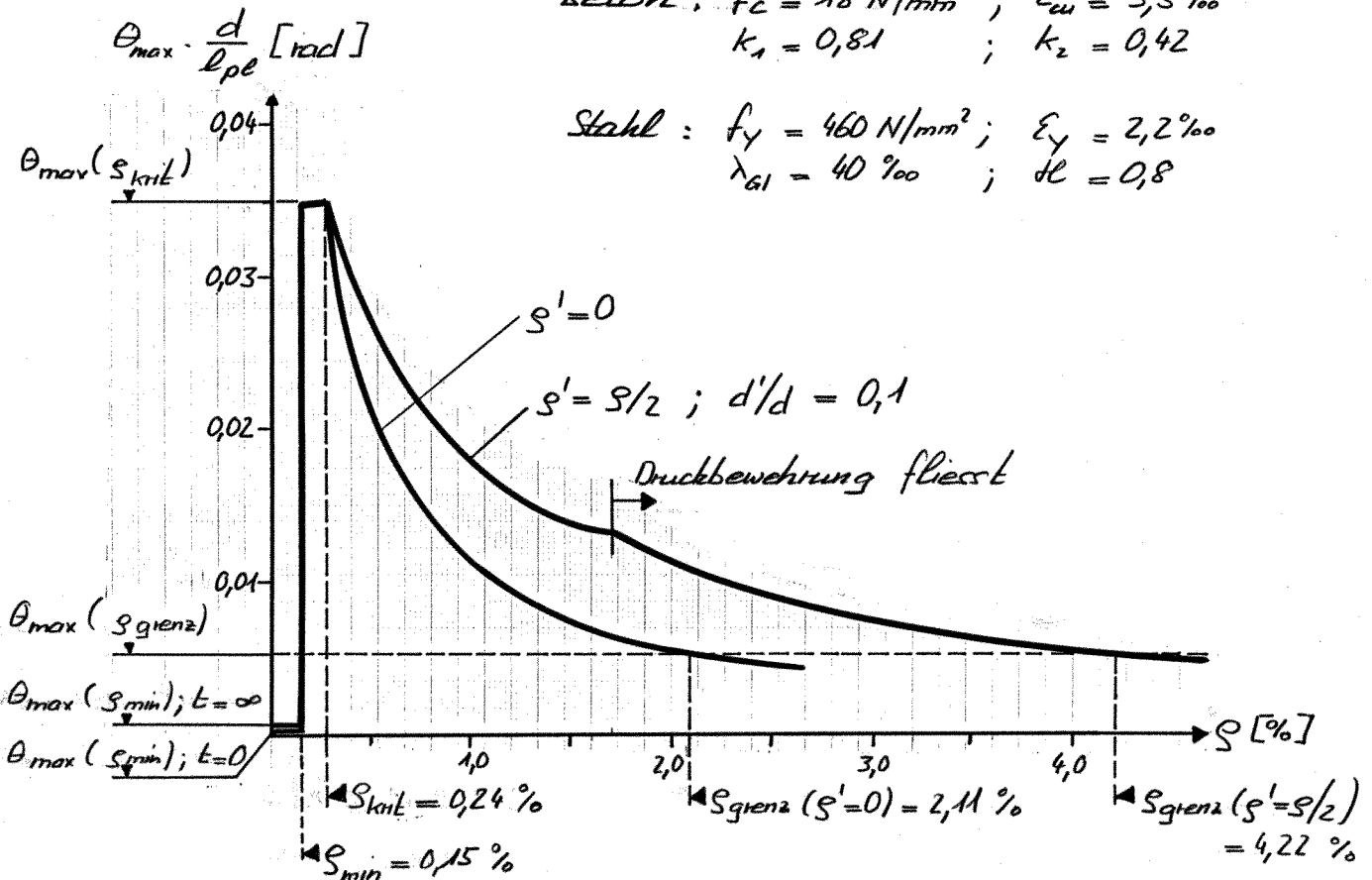
θ_{max} : Gelenkwinkel beim Bruch im Gelenk (Rotationsfähigkeit)
Berechnungsprinzip: $\theta_{max} = \text{Bruchkrümmung} \times \text{plast. Länge } l_{pe}$

Rotationsfähigkeit nimmt mit zunehmendem Bewehrungsgehalt
($s > s_{min}$) stark ab.

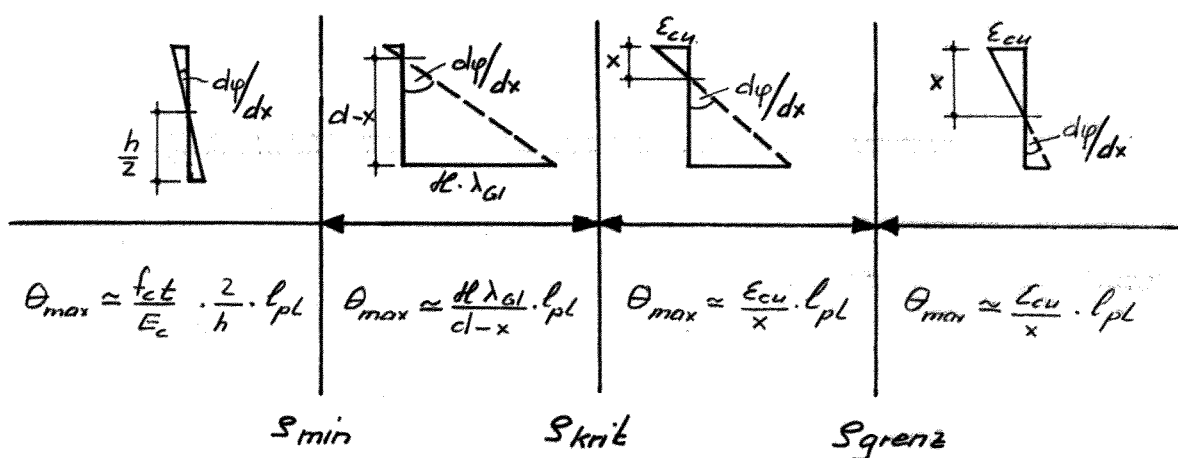
Beispiel Rechteckquerschnitt

Beton: $f_c = 18 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{cu} = 3,5\%$
 $k_1 = 0,81$; $k_2 = 0,42$

Stahl: $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_y = 2,2\%$
 $\lambda_{sl} = 40\%$; $\lambda_c = 0,8$



θ_{max} lässt sich nach den folgenden, von der Lage der Dehnungsebene abhängigen Beziehungen ermitteln.



Infolge der verschiedenen unsicheren Annahmen (z.B. l_{pl} , E_{cu} , d) kann θ_{max} kaum genau bestimmt werden. Oft genügt jedoch eine grobe Abschätzung.

3.1.3. Bemessung für M

a) Vorgehen bei der Bemessung

Ausgehend von einer nach baustatischen Methoden ermittelten Schnittkraftverteilung, kann bei der Bemessung meist wie folgt vorgegangen werden (vgl. Kap. 4 Grundelemente):

- ① Annahme der Betonabmessungen mit Hilfe von Erfahrungsregeln oder überschlägigen Berechnungen.
- ② Ermittlung der statisch erforderlichen Bewehrung
- ③ Kontrolle der Betonabmessungen ($s < s_{\text{grenz}}$; $\tilde{\eta} < \tilde{\eta}_{\text{max}}$)
- ④ Überprüfung des Mindestbewehrungsgehaltes ($s > s_{\text{min}}$)
- ⑤ Überprüfung bezüglich konstruktiver Durchbildung der Bewehrung (Platzverhältnisse, Stab- ϕ , Stababstände, usw.)
- ⑥ Nachweis der Tragsicherheit. (Kann in einfachen Fällen mit Schritt 2. kombiniert werden.)
- ⑦ Nachweis der Gebrauchstauglichkeit.
- ⑧ Sofern erforderlich: Änderungen in den ursprünglichen Festlegungen im Sinne einer Iteration.

Die Ermittlung der stat. erforderlichen Bewehrung ist somit Bestandteil der umfassenden Bemessungsaufgabe!

b) Abschätzung der Biegebewehrung

Die Bewehrung soll dem Querschnitt den nötigen Biege-
widerstand verleihen, damit folg. Ungleichung erfüllt
werden kann (vgl. S. 1-14):

$$\pi_d \leq \frac{\pi_R}{\gamma_R}$$

od. $\pi^* = \gamma_R \cdot \pi_d \leq \pi_R$

$$\gamma_R = 1,20 \quad (\text{SA 162})$$

(Widerstandsbeiwert)

π_d : Bemessungswert der Biegebeanspruchung
= "Bemessungsmoment"

π_R : Biegewiderstand

π^* : "Biegebeanspruchung auf Bruchniveau"

Der Biegewiderstand π_R lässt sich durch das plastische Moment
 π_{pl} oder durch das Bruchmoment π_{Br} beschreiben.

Der Bewehrungsquerschnitt A_s bzw. der Bewehrungsgehalt ρ
kann z.B. aus den Gleichungen für π_{pl} (S. 3.1-14, S. 3.1-17)
hergeleitet werden.

Es gilt allgemein: $\pi = D \cdot z = z \cdot z = A_s \cdot \sigma_s \cdot \eta \cdot d$

$$\rightarrow A_s \geq \frac{\pi^*}{\eta \cdot d \cdot \sigma_s}$$

bzw.

$$\rho \geq \frac{\pi^*}{\eta \cdot b \cdot d^2 \cdot \sigma_s}$$

Def: $\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$: Rechteck-BS

$\rho = \frac{A_s}{b_f \cdot d}$: Plattenbalken-BS

Diskussion:

d: Die Lage des Schwerpunktes der Bewehrung und somit
auch die statische Höhe d lassen sich unter Berücksichtigung
von Betonüberdeckung und ev. Bügel- ϕ meistens rel. genau schätzen

Näherung: $d \approx 0,9 \cdot h$

σ_s :

Die Stahlspannung σ_s ist abhängig von der zu erwartenden Bruchart. In der Regel tritt bei Biegung "Betonbruch während Stahlfließen" ein. Für eine Abschätzung des Bewehrungsgehaltes darf

$$\sigma_s = f_y$$

angenommen werden.

η : Der Hebelarm der inneren Kräfte $z = \eta \cdot d$ kann angenähert werden mit:

$$\begin{array}{l} \text{Rechteckquerschnitt: } z \approx 0,9 \cdot d \\ \text{Plattenbalken: } z \approx d - h_f/2 \end{array}$$

(h_f : Flanschdicke)

Näherungsformeln für A_s :

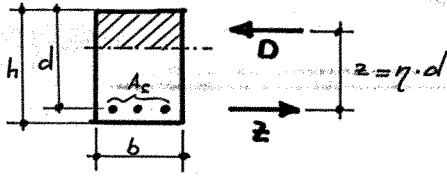
$$A_s = \rho \cdot b \cdot d \approx \frac{\eta^*}{0,9 \cdot d \cdot f_y}$$

für Rechteck-BS

$$A_s = \rho \cdot b_f \cdot d \approx \frac{\eta^*}{(d - \frac{h_f}{2}) \cdot f_y}$$

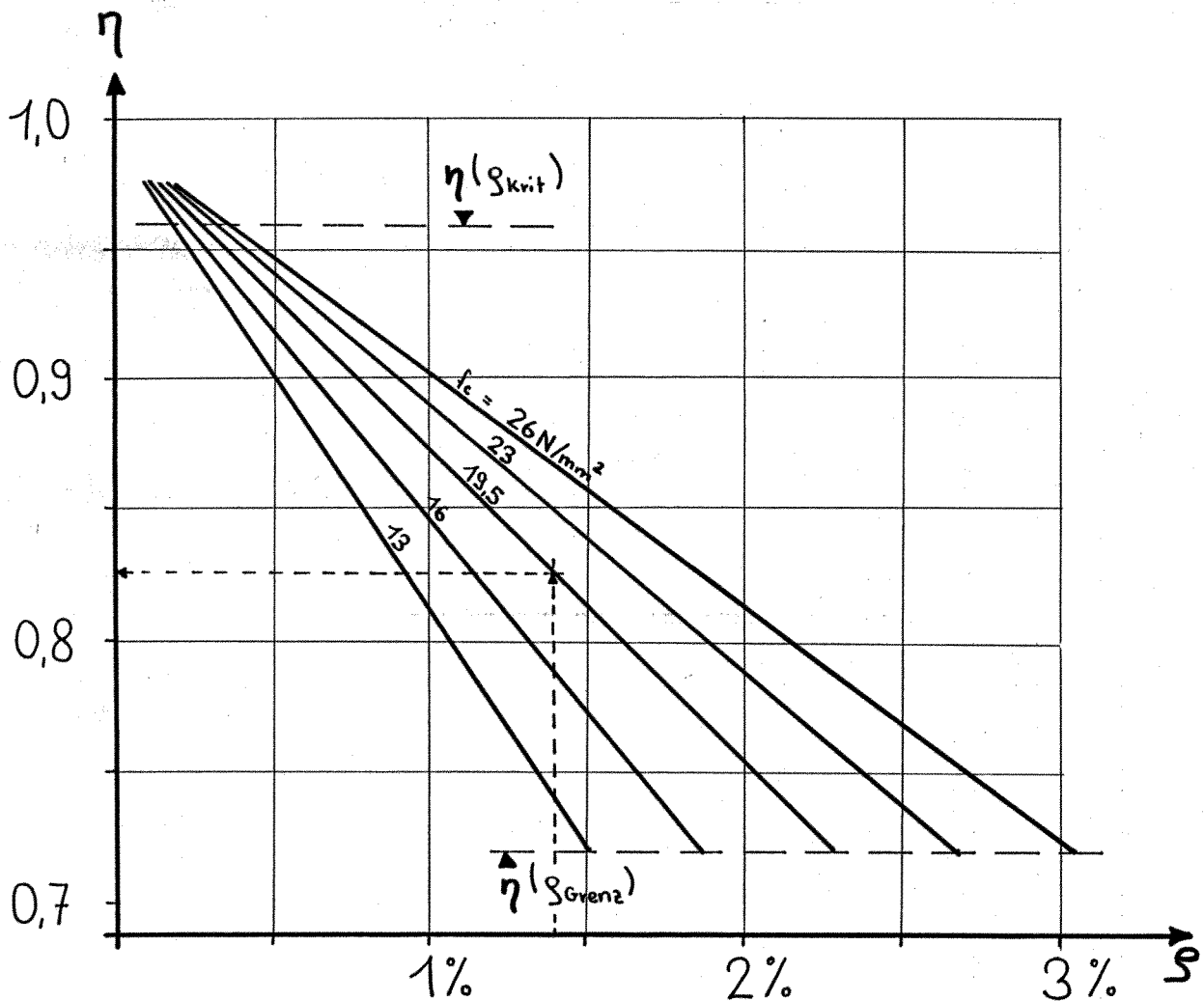
für Plattenbalken-BS

Nachfolgendes Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Hebelarmes der inneren Kräfte $z = \eta \cdot d$ von ρ für den Rechteckquerschnitt:



Annahmen:

- Stahl S 500 b : $\lambda_{sl} = 40 \text{‰}$; $f_{tk} = 530 \text{ N/mm}^2$
- Verbundkoeff. : $\eta = 0,80$
- Flächenparameter: $k_1 = 0,81$
- Schwerpunktpar.: $k_2 = 0,42$



Anwendungsbeispiel: $b = 200 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $f_c = 19,5 \text{ N/mm}^2$,
 $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$, $M^* = 150 \text{ kNm}$

- Aus Näherungsformel: $d \approx 0,9 \cdot h = 360 \text{ mm} \Rightarrow \rho \approx \frac{150 \cdot 10^6}{0,9 \cdot 360^2 \cdot 200 \cdot 460} = 1,4 \text{‰}$

- Aus Diagramm : Für $\rho = 1,4 \text{‰} \Rightarrow \eta = 0,825$
 $\Rightarrow \rho = 1,4 \text{‰} \cdot \frac{0,9}{0,825} = \underline{\underline{1,53 \text{‰}}}$

$\rho_{krit} < \rho = 1,53 \text{‰} < \rho_{grenz} \Rightarrow$ Berechnung fließt

3.1.4. Spannungen Dehnungen und Biegesteifigkeiten im Gebrauchszustand (Elastische Festigkeitslehre)

Vorbemerkung:

Spannungen, Dehnungen, Krümmungen und Biegesteifigkeiten eines Stahlbeton-AS lassen sich nie exakt bestimmen, da die wirklichen Verhältnisse stark beeinflusst werden durch

- Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (vergl. Biegeelement S. 3.1-5),
- Kriechen und Schwinden des Betons.

Zu hohe numerische Rechengenauigkeit hat somit meist keinen Sinn.

Im folgenden werden

a) Spannungen und Dehnungen im idealisierten AS
d.h. ohne Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen betrachtet. Die nach der

- direkten Methode oder der
- allgemeinen Biegelehre

ermittelten Werte sind somit Rechengrößen und müssen unter Beachtung der wirklichen Verhältnisse entsprechend gewertet werden!

Anschließend werden

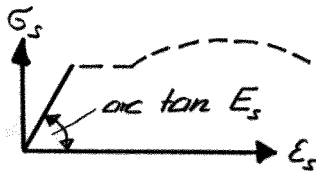
b) Krümmungen und Biegesteifigkeiten des Stahlbeton-AS
behandelt. Es werden Methoden gezeigt, mit welchen sich die Mitwirkung des Betons zw. den Rissen, sowie Einflüsse aus Kriechen und Schwinden des Betons berücksichtigen lassen.

a) Spannungen und Dehnungen im idealisiertem Stahlbeton- QS

Annahmen der elast. Biegetheorie für Stahlbetonquerschnitte

1. Ebenbleiben der Querschnitte
(vergl. mit S. 3.1-8 "Annahmen der plastischen Biegetheorie")

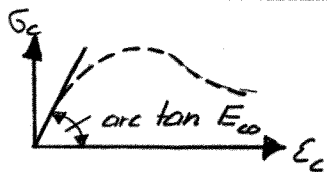
2. Lineares σ - ϵ -Gesetz für Stahl



$$E_s = 2,10 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

(Zug und Druck)

3. Lineares σ - ϵ -Gesetz für Beton

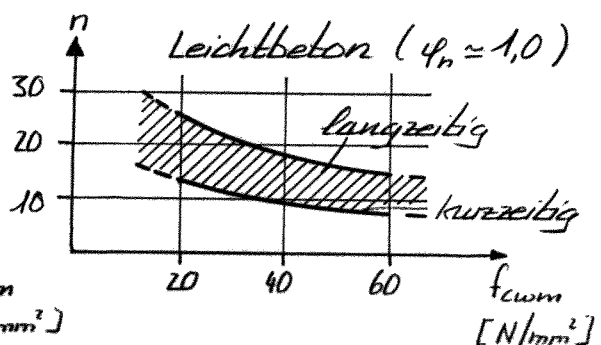
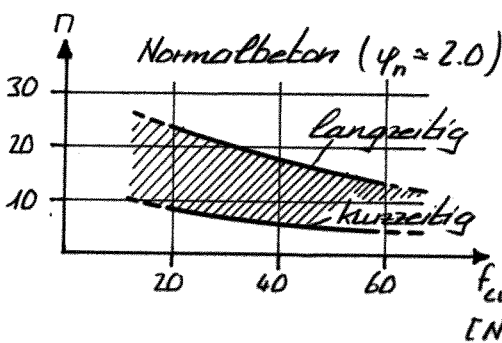


	Normalbeton	Bleibton- Leichtbeton
Kurzfristige Belastung	$E_{co} \approx 6000 \sqrt{f_{cwm}}$	$E_{co} \approx 3500 \sqrt{f_{cwm}}$
Langfristige Belastung	$E_{cn} = \frac{E_{co}}{1+\psi_n} \approx \frac{E_{co}}{3}$	$E_{cn} \approx \frac{E_{co}}{2}$

ψ_n : Endkriechzahl
 f_{cwm} : mittlere Würfeldruckfestigkeit in N/mm^2

Die Linearität tritt nur für $\sigma_c < \sim f_c / 3$ einigermassen zu

Von Bedeutung ist die Verhältniszahl der E-Moduli $n = E_s / E_c$. Sie schwankt in den folg. Bereichen:



Nach SIA 162 (1968) wird für Normalbeton $n=10$ gesetzt (Mittelwert zwischen kurz- und langzeitiger Beanspruchung, d.h. Kriechen teilw. berücksichtigt).

4. Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt: $f_{ct} = 0$
(Annahme liegt auf sicherer Seite)

5. Keine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen:

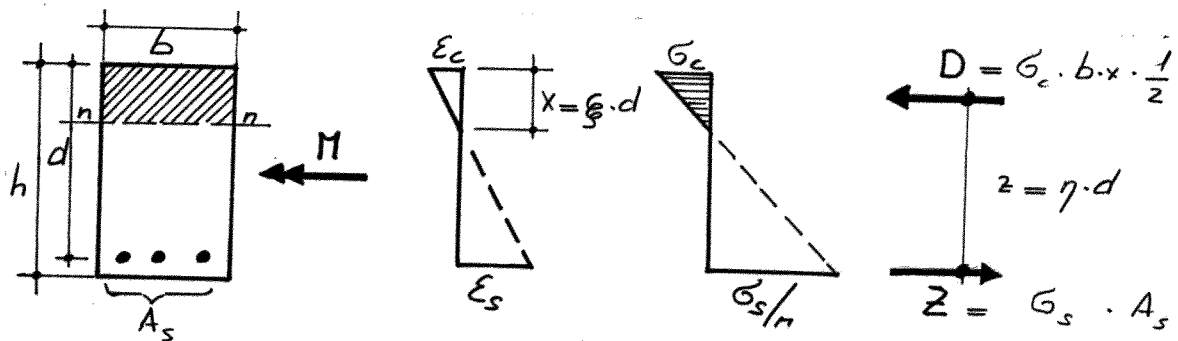
$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_s = \varepsilon_{sm} = \varepsilon_{smax} \\ \sigma_s = \sigma_{sm} = \sigma_{smax} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Verbundkoeff. } \eta = 1, \text{ d.h. } \underline{\text{vollkommen gerissen}}$$

Direkte Methode zur Berechnung von σ und ε

"direkt": direkt aus Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen d.h. ohne "Umweg" über ideale Querschnittswerte.

Rechteck-QS ohne Druckbewehrung

(vollkommen gerissen, $\eta = 1$)



● Lage der neutralen Axe:

Gleichgewicht: $\sum N = \int \sigma \cdot dA = 0 \rightarrow D = Z$

$$A_s \cdot \sigma_s = \sigma_c \cdot b \cdot x \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sigma_c}{\sigma_s} = \frac{2A_s}{x \cdot b}$$

Verträglichkeit: $\left. \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s} = \frac{x}{d-x} \end{array} \right\}$

Hooke:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c \\ \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_c}{\sigma_s} = \frac{x}{d-x} \cdot \frac{E_c}{E_s} = \frac{x}{d-x} \cdot n$$

$$\rightarrow x^2 + \left(2n \cdot \frac{A_s}{b}\right) x - 2n \cdot \frac{A_s}{b} \cdot d = 0$$

$$\text{mit } \rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \text{und } x = \xi \cdot d$$

$$\xi^2 + (2n\rho) \cdot \xi - 2n\rho = 0$$

$$\xi = n \cdot \rho \left[\sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho}} - 1 \right]$$

Lage der neutralen Achse ist abhängig von n und ρ , nicht aber von der Beanspruchung M .

• Spannungen und Dehnungen:

$$M = z \cdot z = D \cdot z$$

$$M = A_s \cdot \sigma_s \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) = \frac{b \cdot x}{2} \cdot \sigma_c \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = \frac{M}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{\xi}{3}\right)} \cdot \frac{M}{b \cdot d^2} \\ \sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{2M}{b \cdot x \left(d - \frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{\xi \left(1 - \frac{\xi}{3}\right)} \cdot \frac{M}{b \cdot d^2} \end{cases}$$

- Vergleich mit homogenem QS: $\sigma = \sigma \cdot \frac{M}{b \cdot d^2}$
(nur Beton)

- Berechnung mit Tabellen (z.B. Hofachertab. [31]):

$$\sigma_{s \max} = c_s \cdot \frac{M}{b \cdot d^2} ; \quad \sigma_c = c_c \cdot \frac{M}{b \cdot d^2}$$

c_s und c_c sind in Funktion von ρ tabelliert.

Die Tabellenwerte gelten meistens für bestimmtes n !
(z.B. $n = 10$ bei Hofachertab.)

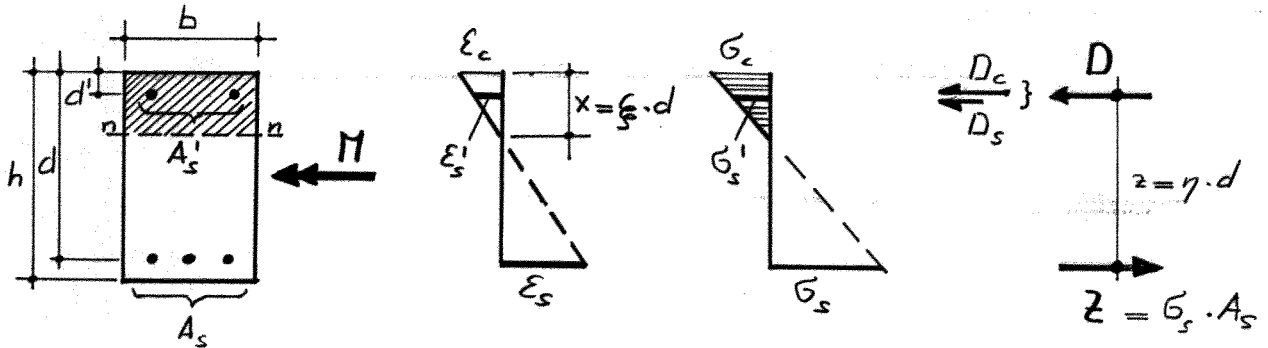
- Näherungsformel für Stahldehnung und Stahlspannung:
(nicht für Beton!)

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s \approx \frac{M}{0,9 \cdot d \cdot A_s}$$

Rechteckquerschnitt

Rechteck-QS mit Druckbewehrung

(vollkommen gerissen, $\mu = 1$)



● Lage der neutralen Axe :

Gleichgewicht : $\Sigma N = \int \sigma \cdot dA = 0 : \rightarrow Z = D_s + D_c$

$$A_s \cdot \sigma_s = \sigma_s' \cdot A_s' + \sigma_c \cdot x \cdot b \cdot \frac{1}{2}$$

Verträglichkeit : $\epsilon_s' = \frac{x-d'}{x} \cdot \epsilon_c = \frac{x-d'}{d-x} \cdot \epsilon_c$

$$\rightarrow n \cdot \sigma_c \frac{d-x}{x} \cdot A_s = \frac{x-d'}{x} \cdot \sigma_c \cdot n \cdot A_s' + \sigma_c \cdot \frac{x}{2} \cdot b$$

mit $s' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$

$$\xi^2 + [2n(s+s')] \cdot \xi - 2n(s + \frac{d'}{d} \cdot s') = 0$$

$$\xi = n \cdot (s+s') \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2(s + \frac{d'}{d} \cdot s')}{n(s+s')^2}} - 1 \right]$$

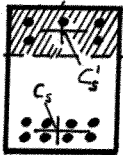
● Spannungen und Dehnungen

Aus Momentenbedingung:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \varepsilon_s \cdot E_s = \frac{1}{s(1-\frac{\xi}{3}) + s'(\frac{\xi}{3} - \frac{d'}{d})(\frac{\xi - d'/d}{1-\xi})} \cdot \frac{M}{b \cdot d^2} \\ \sigma_s' &= \varepsilon_s' \cdot E_s = \sigma_s \cdot \frac{\xi - d'/d}{1-\xi} \\ \sigma_c &= \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{\sigma_s}{n} \cdot \frac{\xi}{1-\xi} \end{aligned}$$

Berechnung mit Tabellen wie beim Rechteckquerschnitt ohne Druckbewehrung.

Verschiedene Bewehrungslagen



Näherungslösung: Bewehrung im jeweiligen Schwerpunkt von A_s und A_s' konzentriert annehmen.
(Für praktische Zwecke meist genügend).

Andere Querschnittsformen

Die am Beispiel des Rechteck-BS gezeigte Ermittlung von Spannungen und Dehnungen auf "direkte" Weise d.h. ohne Berechnung von ideellen BS-Werten, gilt analog auch für andere BS-Formen. Die analytische Formulierung wird allerdings schnell kompliziert und unübersichtlich. Deshalb ist es vorteilhafter, für kompliziertere Querschnitte die "allgemeine Biegelohre" anzuwenden.

Für gebräuchliche Querschnittsformen existieren Tabellenwerke (z.B. Plattenbolzen-BS und Kreis-BS in Tafelwertabelle [31].)

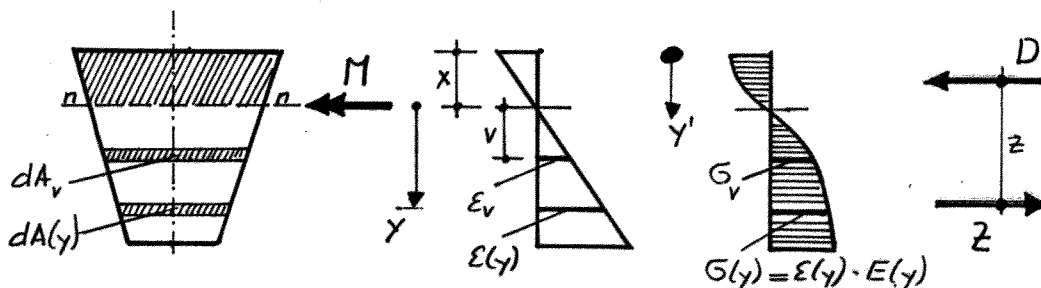
Allgemeine Biegelehre zur Berechnung von G und ε

"allgemein": gedachte Aufteilung des (vertikal symmetrischen) Querschnittes in horizontale Fasern, wobei jede Faser einen andern E -Modul aufweisen und druck- und zugfest sein kann.

→ Elastischer Werkstoff - Verbundquerschnitt, nicht unbedingt Stahlbeton.

- Annahmen:
- Ebenbleiben der Querschnitte
 - Lineare G - ε -Gesetze mit zugehörigem E -Modul für jede Faser.
 - Zugfestigkeit kann berücksichtigt werden
 - Bei Anwendung auf Stahlbeton: keine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, d.h. vollkommen gerissener QS.

Annahme 4 gem. S. 3.1-33 "Zugfestigkeit wird vernachlässigt" muss nicht gebrochen werden, d.h. die folgenden Formeln gelten für Materialien, die druck- und zugfest sein können. Dadurch wird die Behandlung sowohl ungerissener als auch vollkommen gerissener Querschnitte ($E_{ct} = 0$) möglich.



Faser v : "Vergleichsfaser", "Bezugsfaser"

- Lage der neutralen Axe:

$$\text{Gleichgewicht: } \sum N = \int G(y) dA = 0$$

$$\text{Verträglichkeit: } G(y) = G_v \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot \frac{y}{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gleichgewicht: } \sum N = \int G(y) dA = 0 \\ \text{Verträglichkeit: } G(y) = G_v \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot \frac{y}{v} \end{array} \right\} \rightarrow \int G(y) dA = \frac{G_v}{v} \int y \frac{E(y)}{E_v} dA = 0$$

mit $dA_i = \frac{E(y)}{E_v} \cdot dA$: "ideelles Flächenelement"

$S_i = \int y \cdot dA_i$: "statisches Moment der ideellen Fläche"

$$\int y \cdot dA_i = S_i = 0$$

Bei reiner Biegung ist das statische Moment der ideellen Fläche bezüglich der neutralen Axe gleich Null d.h. die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt der ideellen Fläche.

Bei allgemeineren Querschnitten für die Ermittlung der neutralen Axe feste Bezugsaxe wählen, z.B.

oberer Rand: $\rightarrow x = \frac{\int y' \cdot dA_i}{\int dA_i}$

● Spannungen und Dehnungen

Momente**n**bedingung : $\int y \cdot G(y) \cdot dA = \frac{G_v}{v} \int y^2 \frac{E(y)}{E_v} \cdot dA = M$

mit $I_i = \int y^2 \cdot dA_i$: "Trägheitsmoment der ideellen Fläche"

$$\int y \cdot G(y) \cdot dA = M = \frac{G_v}{v} \cdot I_i \quad \rightarrow \quad G_v = \frac{M}{I_i} \cdot v$$

$$G(y) = G \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot \frac{y}{v} = \frac{M}{I_i} \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot y \quad \text{mit } n = \frac{E(y)}{E_v}$$

$$G(y) = \varepsilon(y) \cdot E(y) = n \cdot \frac{M}{I_i} \cdot y$$

● Hebelarm der inneren Kräfte

$$z = \frac{M}{D} = \frac{M}{Z}$$

$$D = \int_{\text{Druck}} G(y) \cdot dA = \frac{G_v}{v} \int_{\text{Druck}} y \frac{E(y)}{E_v} \cdot dA = \frac{G_v}{v} \int_{\text{Druck}} y \cdot dA_i = \frac{G_v}{v} \cdot |S_{iD}| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} |S_{iD}| = S_{iZ}$$

$$Z = \frac{G_v}{v} \cdot S_{iZ}$$

S_{iD} : statisches Moment der gedrückten Fläche bezügl. n-n

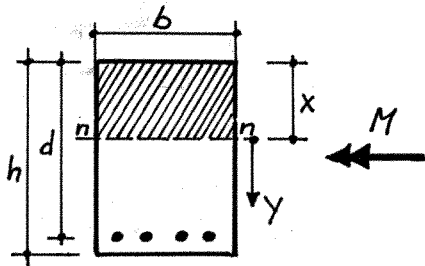
S_{iZ} : " " " gezogenen " " "

$$z = \frac{M}{\sigma_y} \cdot \nu \cdot \frac{1}{|S_{iD}|} = \frac{M}{\sigma_y} \cdot \nu \cdot \frac{1}{S_{iZ}}$$

$$z = \frac{I_i}{|S_{iD}|} = \frac{I_i}{S_{iZ}}$$

Anwendung der allg. Biegelehre auf ungerissene und gerissene Stahlbeton-QS

Rechteck-QS ohne Druckbewehrung



- Gedrückter Beton: $E_c = \frac{\sigma_c}{\epsilon_c}$: als Bezugsmod. angenommen

- Gezogener Beton:

gerissen : $E_{ct} = 0$: $n = \frac{E_{ct}}{E_c} = 0$

ungerissen : $E_{ct} = E_c$

- Stahl : $E_s = \frac{\sigma_s}{\epsilon_s}$; $n = \frac{E_s}{E_c}$

● Statisches Moment der ideellen Fläche:

$$S_i = \int y \cdot \frac{E(y)}{E_c} dA$$

Querschnitt ungerissen:

$$\begin{aligned} S_i^I &= \frac{x}{2} \cdot \frac{E_c}{E_c} \cdot x \cdot b - \frac{h-x}{2} \cdot \frac{E_{ct}}{E_c} (h-x) \cdot b - (d-x) \frac{E_c}{E_c} \cdot A_s \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot b - \frac{(h-x)^2}{2} \cdot b - n \cdot (d-x) \cdot A_s \end{aligned}$$

Querschnitt vollkommen gerissen:

$$S_i^{\bar{I}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{E_c}{E_c} \cdot x \cdot b - 0 - (d-x) \frac{E_s}{E_c} \cdot A_s = \frac{x^2}{2} \cdot b - (d-x) \cdot n \cdot A_s$$

● Lage der neutralen Axe:

$$S_i = 0 \rightarrow x = \xi \cdot d = n \cdot \frac{A_s}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2bd}{n \cdot A_s}} - 1 \right) \quad (\text{gerissen})$$

(für ungerissene QS analog)

- Trägheitsmoment der ideellen Fläche :

$$I_i = \int y^2 \cdot \frac{E(y)}{E_c} \cdot dA$$

Querschnitt ungerissen :

$$I_i^I = \frac{b \cdot x^3}{3} + \frac{b(h-x)^3}{3} + (d-x)^2 \cdot n \cdot A_s$$

Querschnitt vollkommen gerissen

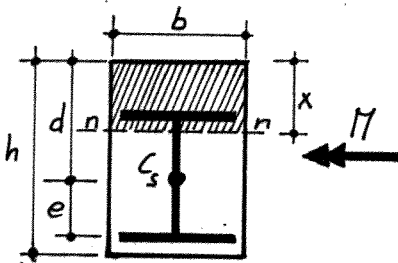
$$I_i^{II} = \frac{b \cdot x^3}{3} + 0 + (d-x)^2 \cdot n \cdot A_s$$

- Spannungen und Dehnungen :

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = n \frac{M}{I_i} (d-x) ; \quad \sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{M}{I_i} \cdot x$$

- Bemerkung :
- Eigenträgheitsmoment der Bewehrungsstäbe wird vernachlässigt.
 - Der vom Stahl verdrängte Beton wird vernachlässigt [(n-1) ≈ n].

Rechteck-AS mit einbetoniertem Walzprofil



Walzprofil :
 A_s : gesamte Fläche
 C_s : Schwerpunkt
 I_s : Eigenträgheitsmoment

$$S_i = \frac{bx^2}{2} - (d-x)n \cdot A_s$$

$$\bar{I}_i = \frac{bx^3}{3} + (d-x)^2 \cdot n \cdot A_s + \underbrace{n \cdot I_s}_{\text{neu}}$$

Berechnung von x , G_c , $\frac{dy}{dx}$ analog oben.

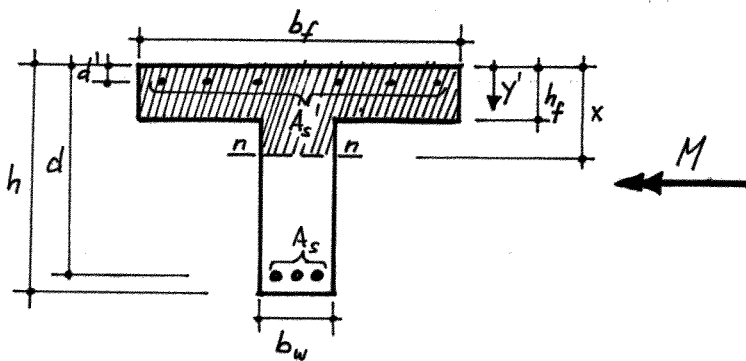
Stahlspannungen: im Schwerpunkt: $\sigma_{smax} = n \frac{\sigma}{I_i} (d-x)$

am unteren Profilrand: $\sigma_{smax} = n \cdot \frac{\sigma}{I_i} (d+e-x)$

Bemerkung: Der durch das Profil verdrängte Druckbeton-Querschnitt kann vernachlässigt werden.
(Gilt generell für Druckbewehrung).

Wichtig: Vorkehrungen zur Erzeugung eines guten Verbundes (Dübel etc.) unbedingt erforderlich.

Plattenbalken-AS



• $x < h_f$ oder $x > h_f$?

S_i bezüglich des unteren Flanschrandes:

$$S_i(x=h_f) = b_f \cdot \frac{h_f^2}{2} + n \cdot A_s' (h_f - d') - n \cdot A_s (d - h_f)$$

$S_i(x=h_f) > 0 \rightarrow$ Berechnung am Rechteck-AS.

$S_i(x=h_f) < 0 \rightarrow$ Berechnung am Plattenbalken-AS.

• $x > h_f$:

Als Bezugsaxe für die Berechnung des Neutralenabstandes ist mit Vorteil der obere Betonrand zu wählen:

Ideelle Fläche: $A_i = \int \frac{E}{E_c} \cdot dA$ (gerissen)

$$A_i = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot x + n(A_s + A_s')$$

S_i bezüglich des oberen Randes:

$$S_i = (b_f - b_w) \frac{h_f^2}{2} + b_w \frac{x^2}{2} + n A_s' d' + n A_s \cdot d$$

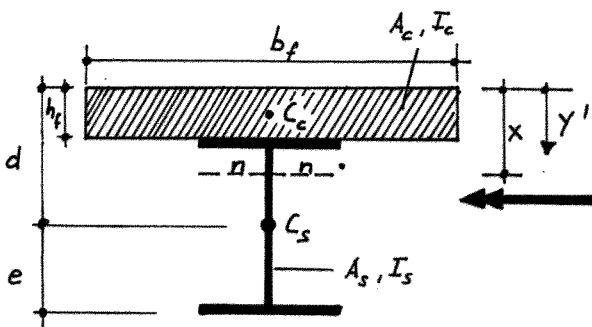
I_i bezüglich der neutralen Axe:

$$I_i = (b_f - b_w) \cdot \frac{h_f^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot \frac{x^3}{3} + n \cdot A_s' (x - d')^2 + n \cdot A_s (d - x)^2$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{\int y' dA_i}{\int dA_i} = \frac{S_i}{A_i}} \rightarrow \text{quadratische Gleichung für } x$$

Spannungen und Dehnungen lassen sich nach den beim Rechteckquerschnitt angegebenen Beziehungen (S. 3.1-40) ermitteln.

Verbund-QS



I_c : Eigenträgheitsmoment Beton
 I_s : " " Holzprofil

$$I_c = \frac{b_f \cdot h_f^3}{12} \quad ; \quad A_c = b_f \cdot h_f$$

$$S_i(x=h_f) = b_f \cdot \frac{h_f^2}{2} - n \cdot A_s (d - h_f) > 0 \rightarrow x < h_f : \text{wie Rechteck-QS mit einbetoniertem Holzprofil.}$$

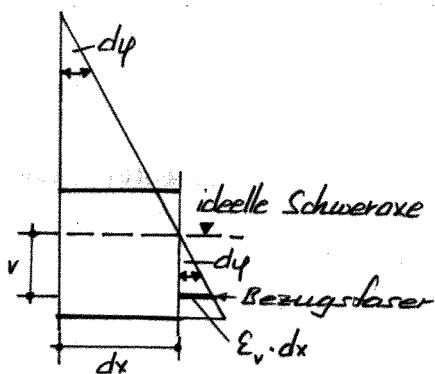
$$S_i(x=h_f) < 0 \rightarrow x > h_f : x = \frac{\int y' \cdot dA_i}{\int dA_i} = \frac{A_c \cdot \frac{h_f}{2} + n \cdot d \cdot A_s}{A_c + n \cdot A_s}$$

$$I_i = A_c \left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2 + I_c + (d - x)^2 \cdot n \cdot A_s + n \cdot I_s$$

b) Krümmungen und Biegesteifigkeiten des Stahlbetonquerschnittes

Zusammenhang Krümmungen-Durchbiegung

Krümmungen und Biegesteifigkeiten sind Grundlage für die Abschätzung von Tragwerksdurchbiegungen. Aufgrund der allg. Biegelehre idealisierter Stahlbetonquerschnitte ergibt sich:



φ : Neigung der Biegelinie gegenüber der unverformten Stabachse

$$dy = \frac{\epsilon_v}{v} \cdot dx ; \quad \sigma_v = \frac{\pi}{I_i} \cdot v = \epsilon_v \cdot E_v$$

$$dy = \frac{\pi}{E_v \cdot I_i} \cdot dx$$

$$\text{Krümmung: } \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{E_v \cdot I_i}}$$

Diese Beziehung kann verallgemeinert werden zu

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{EI(x)} = \frac{\pi}{B(x)}}$$

Darin ist $EI(x) = B(x)$ die Biegesteifigkeit eines irgendwie beschaffenen, d.h. homogenen oder inhomogenen, ungerissenen oder gerissenen Querschnittes bzw. Balkenelementes im Schnitt x unter der Wirkung von $\pi(x)$.

Die Tragwerksdurchbiegung w ist bei reiner Biegung die integrale Folge der Querschnittskrümmungen $dy(x)/dx$:

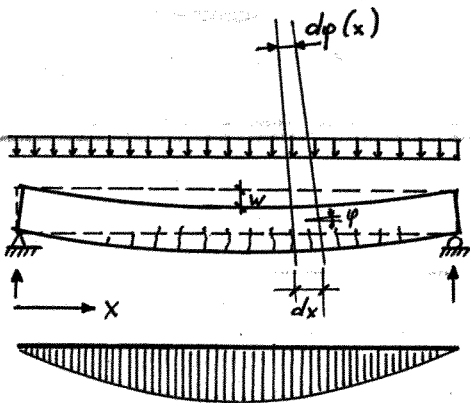
$$\boxed{w = \int_0^e \frac{dy(x)}{dx} \cdot \bar{\pi} dx = \int_0^e \frac{\pi(x)}{EI(x)} \cdot \bar{\pi}(x) dx}$$

$\frac{dy(x)}{dx}$: Krümmung inf. des eff. Verschiebungszustandes (π)

$\bar{\pi}(x)$: Moment des virtuellen Belastungszustandes

Beispiel:

- Elf. Verschiebungszustand (VZ)

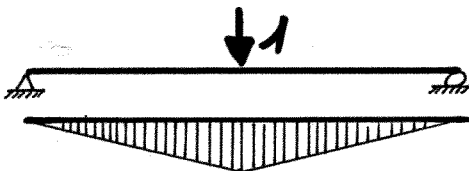


$M(x)$: Moment des VZ

$B(x) = EI(x)$: Steifigkeit bei $M(x)$,
abhängig von der Grösse von M , d.h. von der Beanspruchungshöhe

Steifigkeit des ungerissenen Querschnittes
 Reduzierte Steifigkeit durch Rissebildung

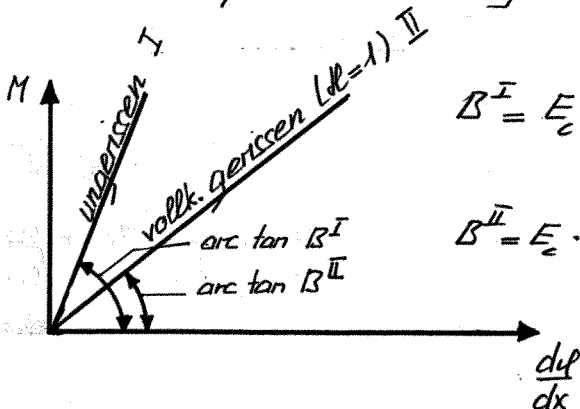
- Virtueller Belastungszustand (BZ) für die Durchbiegung in Balkermitte:



$\bar{M}(x)$: Moment der BZ

Momenten - Krümmungs - Diagramm

Das $M - \frac{d\varphi}{dx}$ - Diagramm ergibt sich aus der Beziehung $M = B \cdot \frac{d\varphi}{dx}$ und lässt sich für ungerissene bzw. vollkommen gerissene Stahlbetonquerschnitte folgendermassen darstellen:



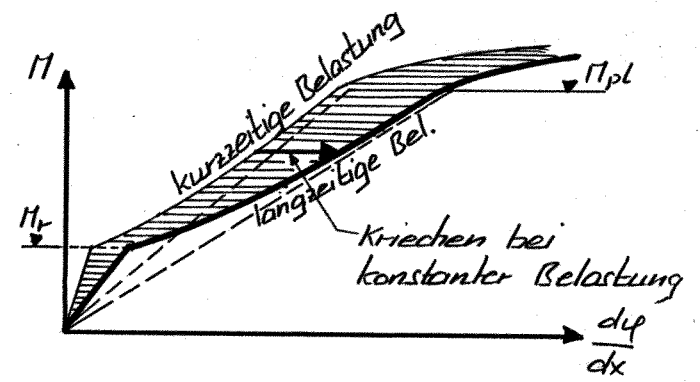
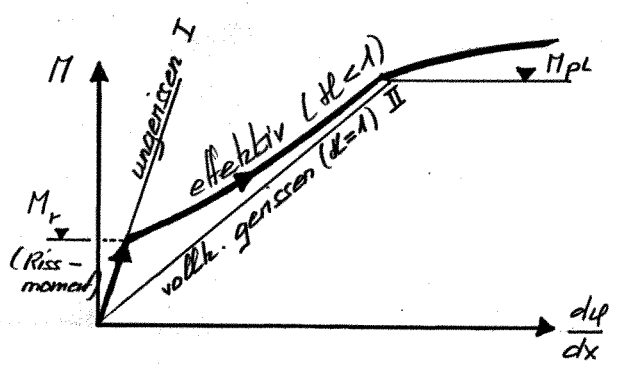
$B^I = E_c \cdot I_c^I$: Biegesteifigkeit des ungerissenen Querschnittes

$B^{II} = E_c \cdot I_c^{II}$: Biegesteifigkeit des vollk. gerissenen Querschnittes mit $dl = 1,0$ d.h. ohne Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen.

I_i^I und I_i^{II} vergl. S. 3.1-40

B^I und B^{II} dienen zur Eingrenzung der "effektiv" vorhandenen Steifigkeit $B^{II\text{eff}}$

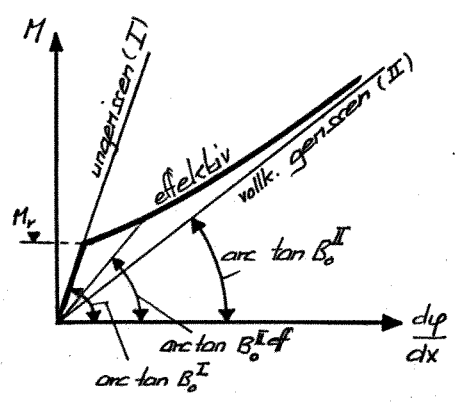
In Versuchen lässt sich folg. Verlauf des eff. $M-d\mu/dx$ -Diagr. beobachten:



Das tatsächliche Verhalten wird durch verschiedene Phänomene beeinflusst:

- Eff. vorhandene Zugfestigkeit (siehe Studien der Rissebildung S. 3.1-3.)
- Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen $\alpha = \frac{E_{sm}}{E_{smax}} < 1$
- Langzeiteinflüsse (Kriechen)

Steifigkeiten im Belastungszeitpunkt $t=0$



Steifigkeiten = Sekantensteifigkeiten

Ungelasteter QS : $B_0^I = E_{c0} \cdot I_{i0}^I$

Vollk. gelasteter QS : $B_0^{II} = E_{c0} \cdot I_{i0}^{II}$

Eff. gelasteter QS : $B_0^{II\text{eff}} > B_0^{II}$
 ↑
 Inf. Mitw. des Betons zwischen den Rissen

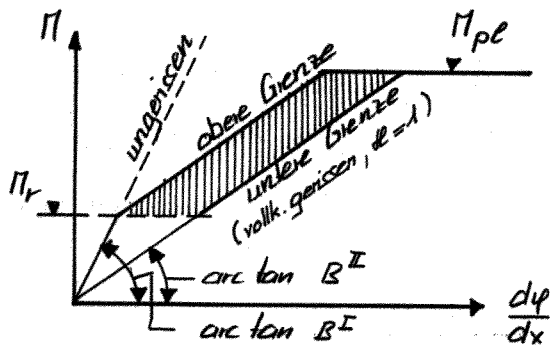
Es bedeuten: $E_{co} \approx 6000 \cdot \sqrt{f_{cwm}}$; f_{cwm} in N/mm^2

I_{io}^I : Trägheitsmoment im Belastungszeitpunkt $t=0$ des idealen ungerissenen BS
(Bei kleinem ϵ ist Trägheitsmoment der reinen Beton-BS I_o^I oft genügend genau).

I_{io}^{II} : Trägheitsmoment im Belastungszeitpunkt $t=0$ des idealen vollkommen gerissenen BS

Empirische Ansätze für $B_o^{II,eff}$ bzw. allg. für $B^{II,eff}$

Es darf angenommen werden, dass die ef. Steifigkeit innerhalb der folgenden Grenzen liegt:



Tendenz zur oberen Grenze:

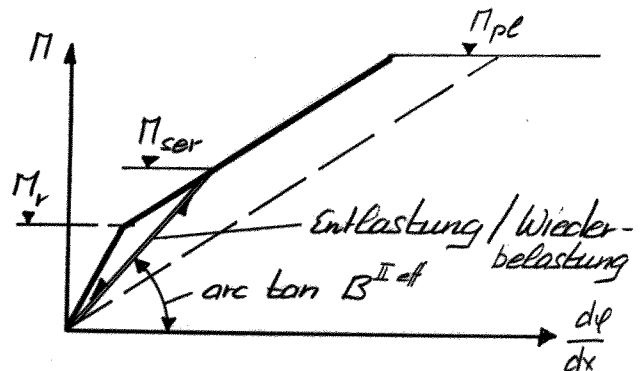
- $\alpha < 1$: - Erstbelastung
- dünne Stäbe
- guter Verbund

Tendenz zur unteren Grenze:

- $\alpha = 1$: - nach wiederholter Bel.
- dicke Stäbe
- schlechter Verbund

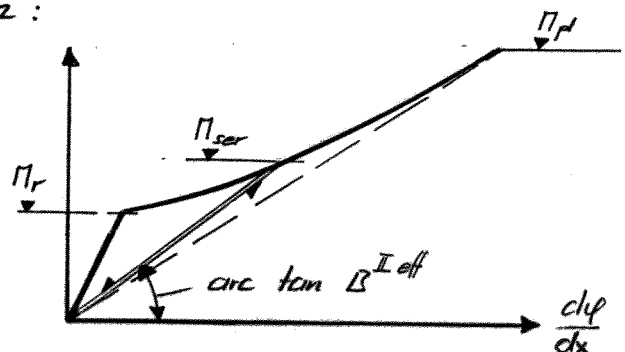
Die obere Grenze der Biegesteifigkeit lässt sich erfassen durch

$$B^{II,eff} = \frac{B^{II}}{1 - \frac{M_r}{M_{ser}} \left(1 - \frac{B^{II}}{B^I}\right)}$$



Ein möglicher Verlauf dazwischen:

$$B^{II,eff} = \frac{B^{II}}{1 - \left(\frac{M_r}{M_{ser}}\right)^2 \left(1 - \frac{B^{II}}{B^I}\right)}$$



π_r : Bissmoment, darf näherungsweise am reinen Beton-BS ermittelt werden:

aus $G = \frac{\pi}{E} \cdot y$ wird:

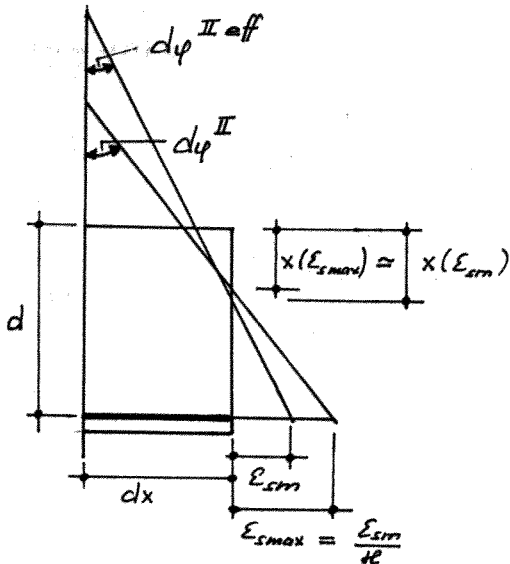
$$\pi_r = f_{ct} \cdot \frac{I^I}{y_{max}}$$

y_{max} : max. Randabstand zur Neutralaxe

$$f_{ct} \approx 0,5 \cdot \sqrt{f_{ct,geom}}$$

Folgerungen für den Verbundkoeff. μ (vergl. S. 3.1-5 ff)

Die obigen empirischen Ansätze für die Biegesteifigkeit lassen sich auch für eine Abschätzung von μ verwenden:



$$dy \approx \epsilon_s \cdot dx \cdot (d-x)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} \approx \epsilon_s (d-x)$$

mit $x(\epsilon_{sm}) \approx x(\epsilon_{smax})$ wird:

$$\frac{dy^{II,eff}}{dx} \approx \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{smax}} = \mu$$

$$\frac{dy^{II,eff}}{dx} = \frac{\pi}{B^{II,eff}}$$

$$\mu = \frac{B^{II}}{B^{II,eff}}$$

Der oberen Grenze der Biegesteifigkeit entspricht somit:

$$\mu \approx 1 - \frac{\pi_r}{\pi_{ser}} \left(1 - \frac{B^{II}}{B^I} \right)$$

(untere Grenze für μ)

Dem möglichen Verlauf dazwischen entspricht:

$$\mu \approx 1 - \left(\frac{\pi_r}{\pi_{ser}} \right)^2 \left(1 - \frac{B^{II}}{B^I} \right)$$

(vergl. Bsp. S. 3.1-52)

Mittlere Stahlspannungen σ_{sm} und -dehnungen ϵ_{sm}

Bei Kenntnis von η können die mittleren Stahlspannungen und -dehnungen eines Biegeelementes auf 2 verschiedene Arten abgeschätzt werden:

1. Berechnung von σ bzw. ϵ an einem vollkommen gerissenen (idealisierten) Querschnitt (gem. Kap. 3.1.4.a)) für den tatsächlichen Bewehrungsgehalt $\rho \rightarrow \sigma_{smax}, \epsilon_{smax}$
Multiplikation von σ und ϵ mit $\eta \rightarrow \sigma_{sm}, \epsilon_{sm}$.

2. Berechnung von σ und ϵ an einem vollkommen gerissenen (idealisierten) Querschnitt (gem. Kap. 3.1.4.a)) für den fiktiven erhöhten Bewehrungsgehalt

$$\rho_k = \rho / \eta \rightarrow \sigma_{sm}, \epsilon_{sm}$$

(Annahme einer durch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen verstärkten Zugbewehrung.)

Langzeiteinflüsse auf Krümmungen und Biegesteifigkeiten infolge Kriechen

Vorbemerkungen zum Einfluss des Kriechens:

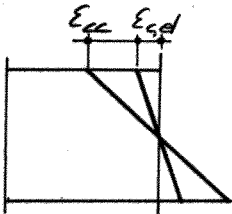
Beim ungerissenen QS kriecht sowohl die Druck- als auch die Zugzone unter langzeitiger Beanspruchung. Dies hat grosse Verformungszunahmen bei Lastbeanspruchung, resp. erheblicher Spannungsabbau bei Zwangsbeanspruchung zur Folge.

Beim gerissenen QS bleibt die Stahldehnung langzeitig nahezu unverändert, sodass sich praktisch nur das Kriechen der Druckzone auswirkt. Kriechen hat daher beim gerissenen QS erheblich geringere Auswirkungen als beim ungerissenen QS.

Druckbeanspruchung reduziert die Kriechverformungen!

Ungerisener Querschnitt

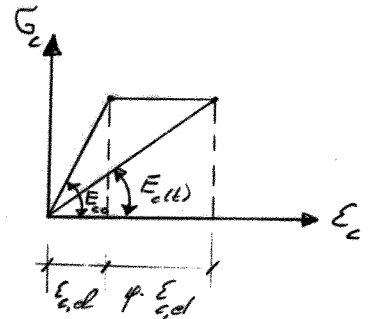
- Unbewehrter Beton :



Bei gleichen Eigenschaften für Zug und Druck gilt :

$$\epsilon_{cc} = \varphi \epsilon_{sel} ; \epsilon_{c,tot} = \epsilon_{sel} (1 + \varphi)$$

Die Gesamtverformung ist somit gleich der mit $(1 + \varphi)$ multiplizierten elast. (kurzzeitigen) Verformung. Daraus folgt die Möglichkeit der



Berechnung mit reduziertem E-Modul $E_{c(t)} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t)}$

(vergl. S. 2-23)

Biegesteifigkeit :

$$B_{c(t)} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t)} \cdot I \cdot I$$

$I \cdot I$ des reinen Beton-BS ist unabhängig von der Zeit.

- Bewehrter Beton :

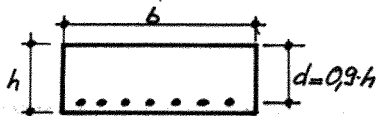
$$B_{c(t)} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi(t)} \cdot I_{i(t)}$$

Das ideale Trägheitsmoment $I_{i(t)}$ wird durch den zeitabh. E-Modul des Betons $E_{c(t)}$ beeinflusst

$$n(t) = \frac{E_s}{E_{c(t)}} = \frac{E_s}{E_{co}} (1 + \varphi)$$

• Einfluss der Zugbewehrung am Beispiel:

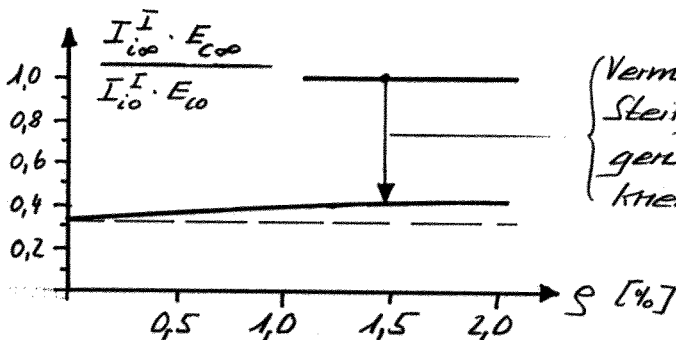
Rechteckquerschnitt



Kurzzeit: $E_{co} = 30 \text{ kN/mm}^2 \rightarrow n_0 = 7$

Kriechen: $\psi_n = 2 \rightarrow E_{c\infty} = \frac{E_{co}}{3} \rightarrow n_\infty = 21$

$n = \frac{E_s}{E_c}$

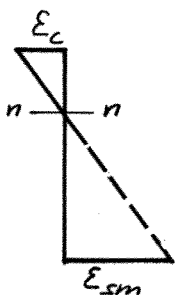


Verminderung der Steifigkeit des ungerissenen BS durch Kriechen.

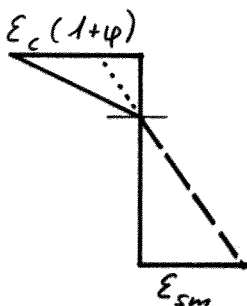
Einfluss der Zugbewehrung gering. Steifigkeitsabminderung nahezu proportional zur Abnahme des E-Moduls.

Gerissener Querschnitt

$t = 0$

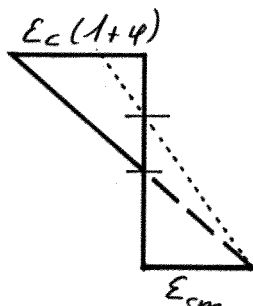


Kriechen der Druckzone allein:



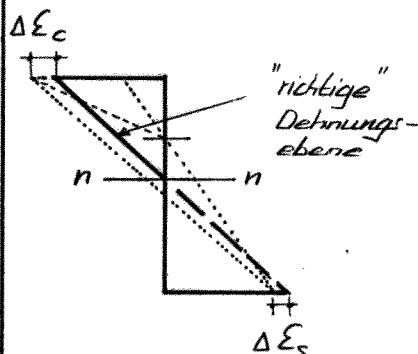
Ebenbleiben nicht erfüllt

Ebenbleiben erfüllt:



Gleichgewicht nicht erfüllt (Vergrößerung der Druckzone).

Gleichgewicht erfüllt:



Folgen des Kriechens:

- n - n rückt herunter
- σ_c wird kleiner
- σ_s wird etwas größer

Kann näherungsweise mit reduziertem E-Modul erfasst werden: $E_c(t) = \frac{E_{co}}{1+\varphi}$

$$\rightarrow B^{\text{II}}(t) = \frac{E_{co}}{1+\varphi} \cdot I^{\text{II}}(t)$$

Das ideale Trägheitsmoment I^{II} wird durch den zeitabhängigen E-Modul des Betons $E_c(t)$ beeinflusst

$$n(t) = \frac{E_s}{E_c(t)} = \frac{E_s}{E_{co}} (1+\varphi)$$

$$B^{\text{II eff}}(t) \approx \frac{B^{\text{II}}(t)}{n}$$

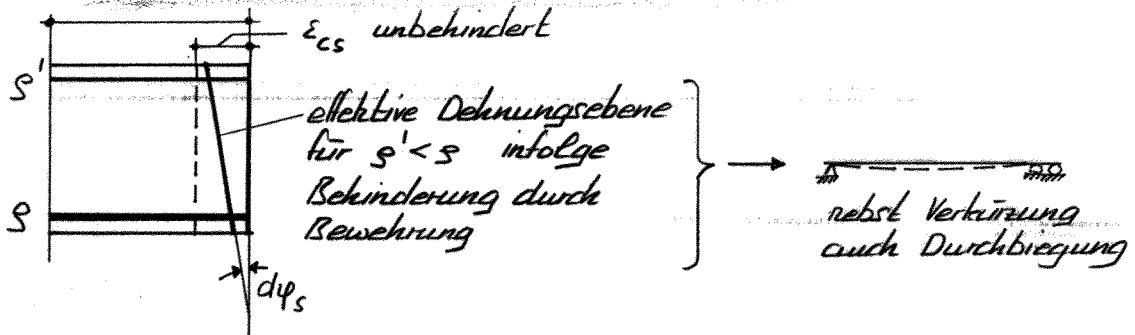
↪ analog S. 3.1-47 zu bestimmen.

Langzeiteinflüsse auf Krümmungen infolge Schwindens

Vorbemerkung zum Einfluss des Schwindens

Sowohl beim ungerissenen, wie beim gerissenen QS, entstehen im Falle von unsymmetrischen Bewehrungen durch das Schwinden Krümmungen und somit auch Durchbiegungen. Durchbiegungen inf. Schwindens sind allerdings oft klein und können i.d.R. vernachlässigt werden.

Ungerissener Querschnitt



Schwinden erzeugt Eigenspannungszustand σ_s, σ_c . Da die Spannungen σ_c durch Kriechen reduziert werden, dürfen Schwindspannungen mit dem abgeminderten E_{c0} -Modul $E_c(t) = \frac{E_{c0}}{1+\varphi}$ berechnet werden.

Beispiel mit $s' = 0$:

1. Für eine Verkürzung von Beton und Stahl um ϵ_{cs} müsste auf A_s die fiktive Kraft F (sog. Festhaltekraft) aufgebracht werden.

$$F = A_s \cdot \epsilon_{cs} \cdot E_s$$

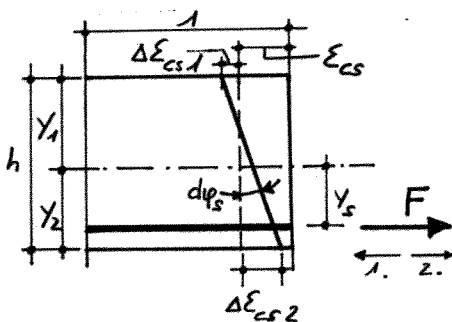
2. Eine Kraft F , die auf der Höhe von A_s wirkt (Elimination von F aus 1.), verursacht am Verbund-BS die Randspannungen

$$\sigma_{c1,2} = \frac{F}{A_{i00}} + \frac{F \cdot y_s}{I_{i00}} \cdot y_{1,2}$$

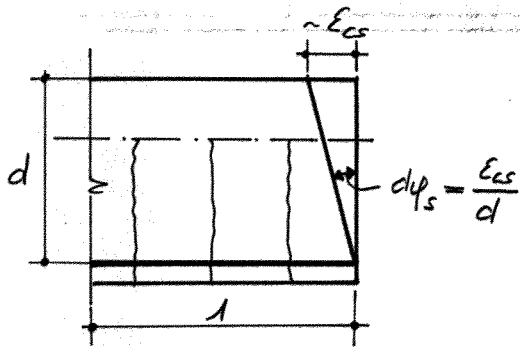
3. Schwindkrümmung:

$$\Delta \epsilon_{cs1} = \frac{\sigma_{c1}}{E_{c00}}; \quad \Delta \epsilon_{cs2} = \frac{\sigma_{c2}}{E_{c00}}$$

$$\rightarrow \frac{d\psi_s}{dx} = \frac{|\Delta \epsilon_{cs1}| + |\Delta \epsilon_{cs2}|}{h}$$



Gerissener Querschnitt



Vereinfachende Annahmen:

Druckzone: Randfaser schwindet um ϵ_{cs}

Zugzone: Schwinden zwischen den Rissen sei ohne Einfluss auf die Stahldehnung

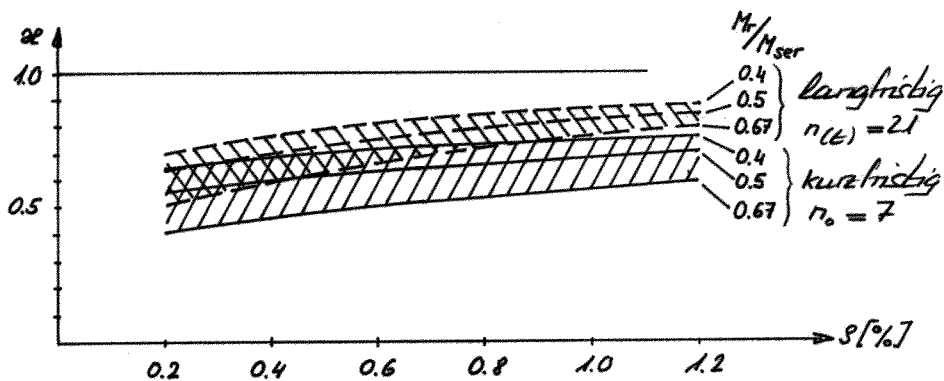
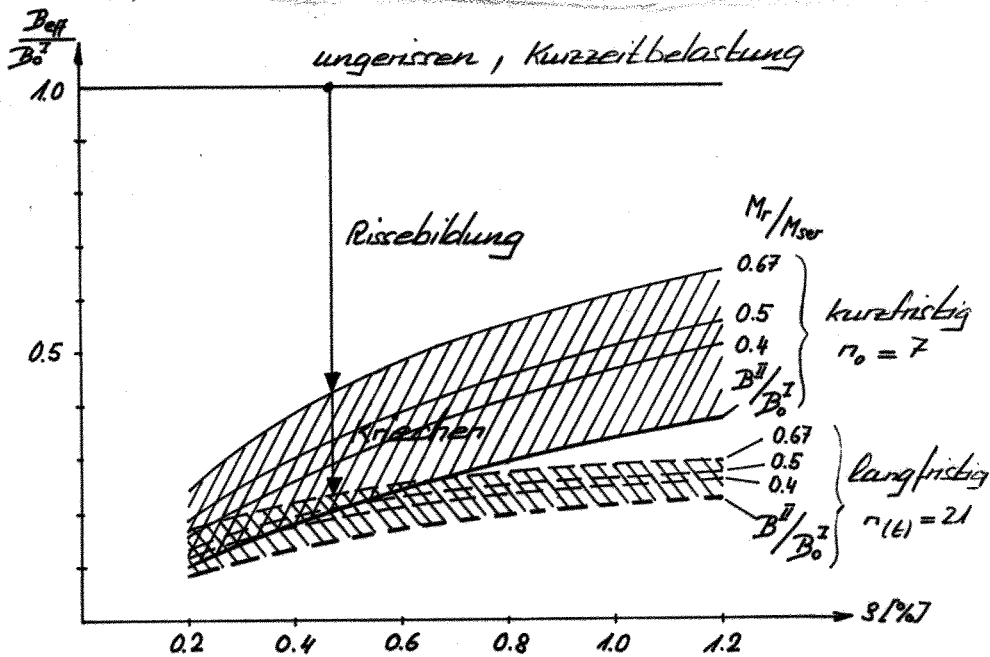
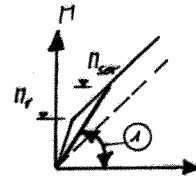
Verminderung der Biegesteifigkeit durch Rissebildung und nachfolgendes Kriechen

Beispiel: Rechteckquerschnitt mit $d/h = 0,9$

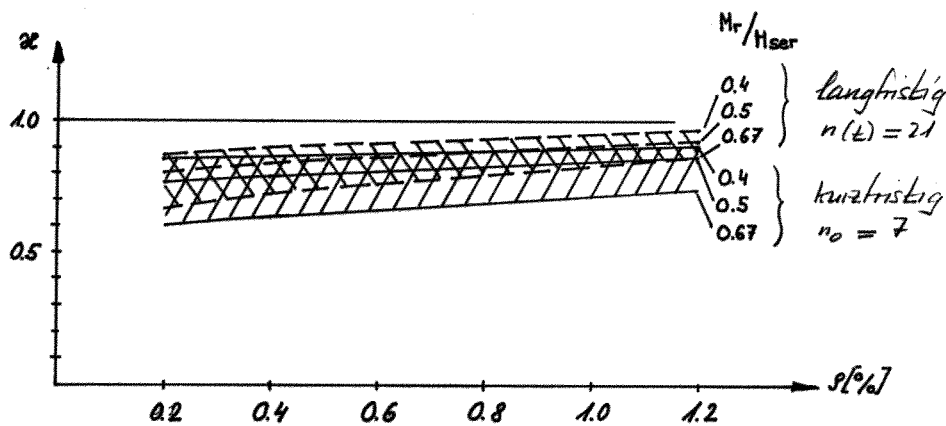
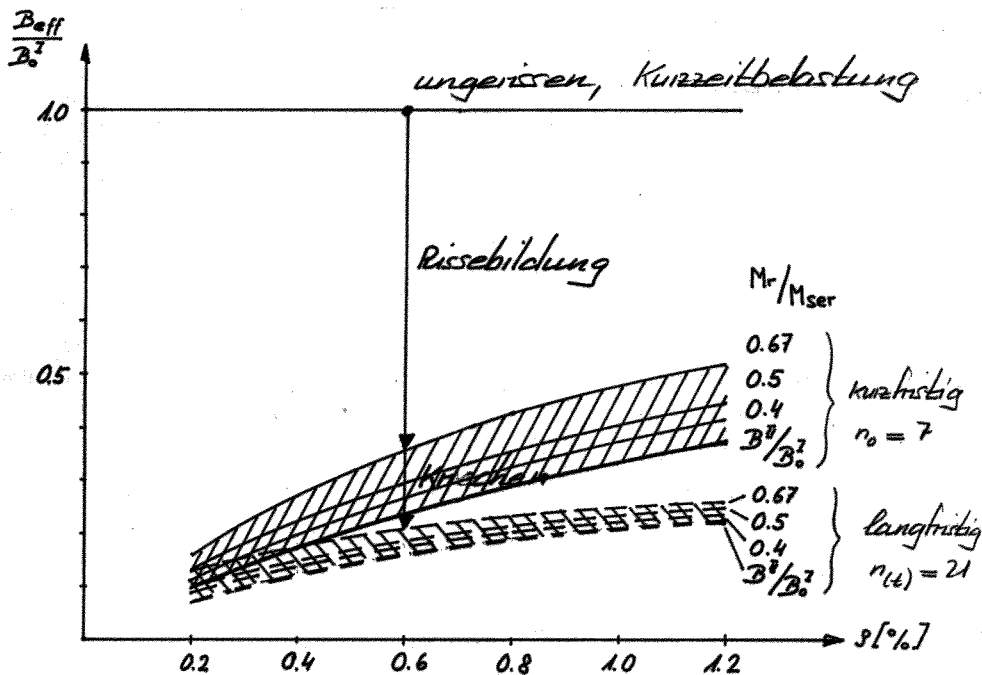
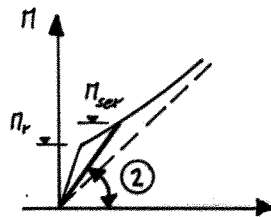
$E_{co} = 30 \text{ kN/mm}^2 \rightarrow r_0 = 7$

$\varphi(t) = 2 \rightarrow n(t) = 21$

Fall ①: Mit oberer Grenze der Biegesteifigkeit bzw. unterer Grenze des Verbundkoeffizient η :



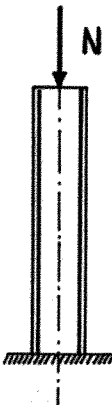
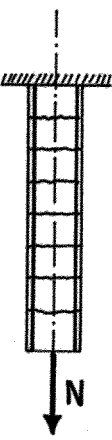
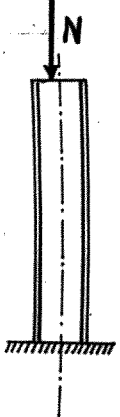
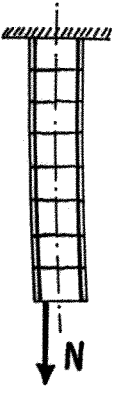
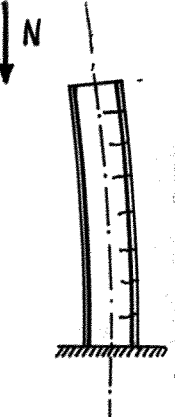
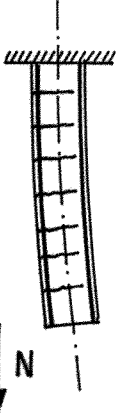
Fall ② : Mit möglichem Verlauf dazwischen :



3.2. Biegung mit Längskraft

Anwendung vor allem bei Stützen

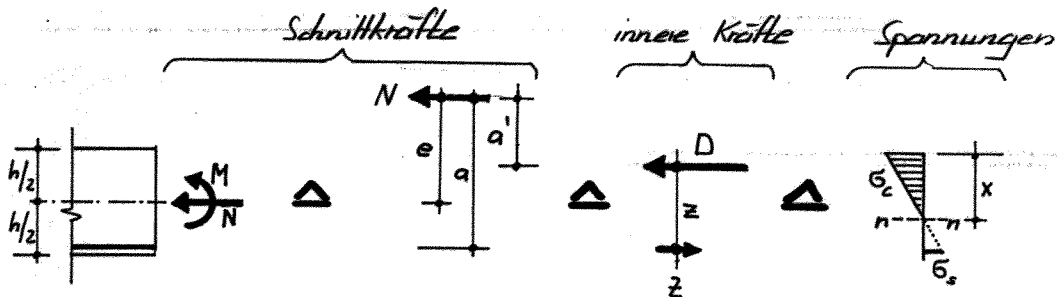
Unterscheidungen

	Druck	Zug
<ul style="list-style-type: none"> ● Zentrisch <p>Nur Druck - oder nur Zugspannungen</p>	 <p>N im Schwerpunkt der ideellen Fläche → keine Risse</p>	 <p>N im Schwerpunkt der Stahlfläche → Risse durchgehend</p>
<ul style="list-style-type: none"> ● Kleine Exzentrizität <p>Nur Druck- oder nur Zugspannungen</p>	 <p>N innerhalb Kern → keine Risse</p>	 <p>N innerhalb Längsbe- wehrung → Risse durch- gehend</p>
<ul style="list-style-type: none"> ● Grosse Exzentrizität <p>Druck- und Zug- spannungen</p>	 <p>N ausserhalb Kern → kurze, feine Risse</p>	 <p>N ausserhalb Längsbe- wehrung → lange, breite Risse</p>

3.2.1. Schnittkräfte - innere Kräfte - Spannungen

(Betrachtungen für grosse Exzentrizität)

Biegung mit Druck



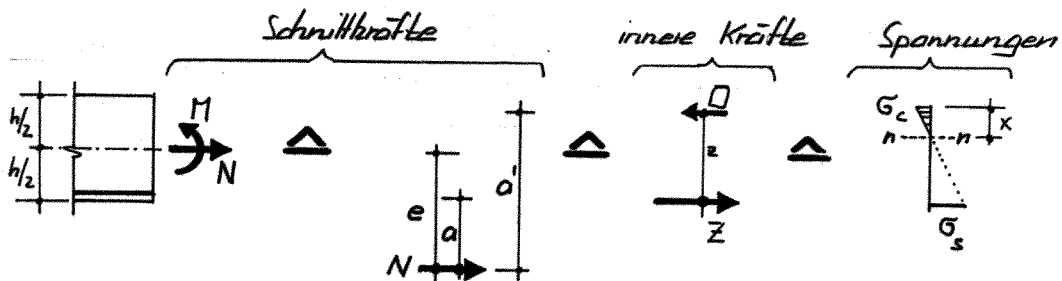
Aus stat. Äquivalenz:

$$N = D - Z \quad ; \quad D \cdot z = N \cdot a \quad \rightarrow \quad D = N \cdot \frac{a}{z}$$

$$Z \cdot z = N \cdot a' \quad \rightarrow \quad Z = N \cdot \frac{a'}{z}$$

$$M = N \cdot e$$

Biegung mit Zug



Aus stat. Äquivalenz:

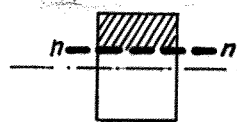
$$N = Z - D \quad ; \quad D \cdot z = N \cdot a \quad \rightarrow \quad D = N \cdot \frac{a}{z}$$

$$Z \cdot z = N \cdot a' \quad \rightarrow \quad Z = N \cdot \frac{a'}{z}$$

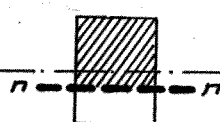
$$M = N \cdot e$$

Einfluss von N auf die Lage der neutralen Axe

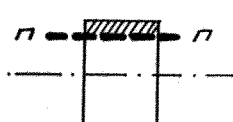
Reine Biegung:



Biegung mit Druck:



Biegung mit Zug:



Druckzone stärker belastet

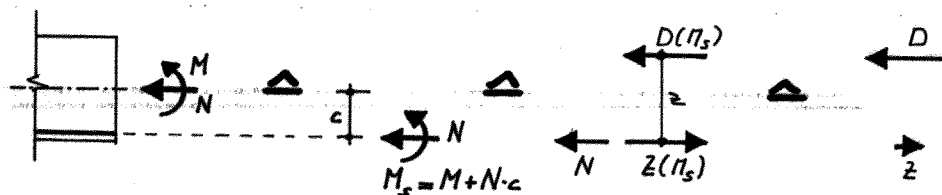
→ n-n geht nach unten

Druckzone entlastet

→ n-n geht nach oben

Vergleich mit reiner Biegung

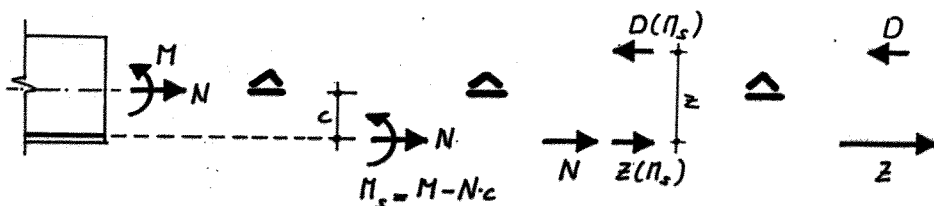
Biegung mit Druck:



$$z(\pi_c) = D(\pi_c) = D = \frac{\pi_s}{z} ; \quad z(\pi_s) - N = z$$

$$\rightarrow \boxed{z = \frac{\pi_s}{z} - N}$$

Biegung mit Zug:



$$z(\pi_s) = D(\pi_s) = D = \frac{\pi_s}{z} ; \quad z(\pi_s) + N = z$$

$$\rightarrow \boxed{z = \frac{\pi_s}{z} + N}$$

Durch die Reduktion der Schnittkräfte in den Schwerpunkt der Zugbewehrung lässt sich das Problem mit dem Spezialfall der reinen Biegung vergleichen:

- dh.
- Das Moment π_c entspricht dem Kräftepaar $z(\pi_s) = D(\pi_s)$.
 - Die resultierende Betondruckkraft ist (analog zur reinen Biegung) bestimmt durch $D = D(\pi_c) = \pi_s / z$.
 - Die resultierende Stahlzugkraft kann durch Superposition von N und $z(\pi_s) = \pi_s / z$ gefunden werden.

Merke: Druck erhöht π_s und verkleinert den Hebelarm z .
 $z = z(\pi_s) - N$ wird insgesamt jedoch reduziert.
 \rightarrow kleinerer Bewehrungsgehalt erforderlich!

Zug verkleinert π_s und vergrößert den Hebelarm z .
 $z = z(\pi_s) + N$ wird insgesamt jedoch erhöht.
 \rightarrow größerer Bewehrungsgehalt erforderlich!

3.2.2. Widerstand im Bruchzustand (Plastische Festigkeitslehre)

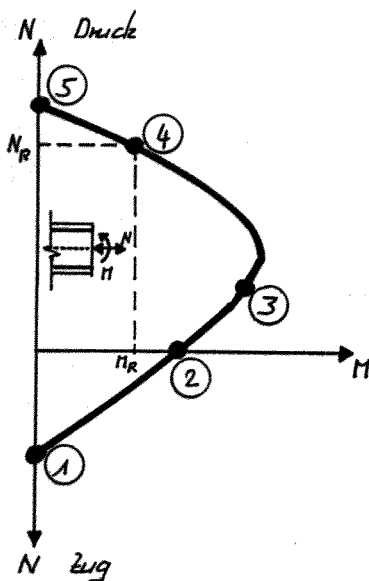
a) Annahmen

Wie bei reiner Biegung:

- Ebenbleiben der Querschnitte.
- Stoffgesetze aus Versuchen oder idealisiert.
- Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit.

b) Interaktionsdiagramm

Das Zusammenwirken von Biegung und Normalkraft kann am N - M -Interaktionsdiagramm veranschaulicht werden:



Das Interaktionsdiagramm gilt für einen ganz bestimmten, vollständig gegebenen Querschnitt (Betonabmessungen, Lage und Querschnitt der Bewehrungen).

Jeder Punkt der Kurve entspricht einem Wertepaar N_R, M_R , bei welchem Bruch des Querschnittes eintritt.

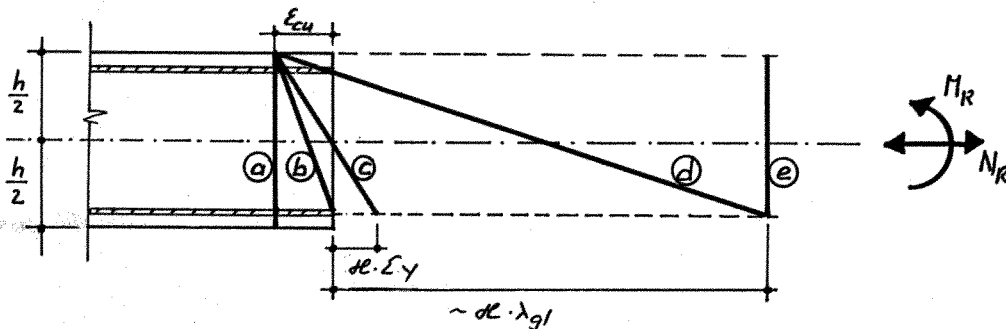
- ① Reiner Zug ($M=0$)
- ② Reine Biegung
- ③ N erhöht den Biege widerstand des Querschnittes.
(Voraussetzung: Betonbruch während Stahlfließens.)
- ④ Große Normalkraft verursacht Betonbruch vor Stahlfließens.
Der Biege widerstand wird mit zunehmender Normalkraft reduziert.
- ⑤ Reiner Druck ($M=0$)

c) Vorgehen bei der Berechnung

Der Verlauf des Interaktionsdiagrammes eines gegebenen Querschnittes kann punktweise bestimmt werden. Ausgehend von zweckmässig gewählten Dehnungsebenen lassen sich die entsprechenden inneren Kräfte ermitteln und das zugehörige Wertepaar N_R, M_R berechnen.

Fall I : (Vorwiegend auf Biegung beanspr. QS)

Im allgemeinen sind die folgenden Dehnungsebenen zweckmässig:

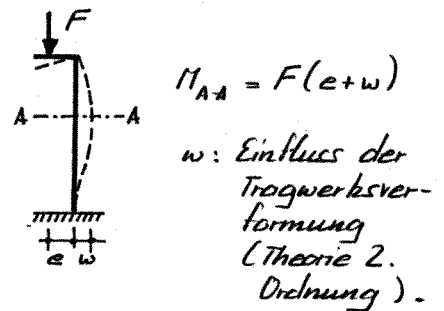


Die Dehnungsebene (c) grenzt die Brucharten "Betonbruch vor Stahlfließen" und "Betonbruch während Stahlfließen" ab.

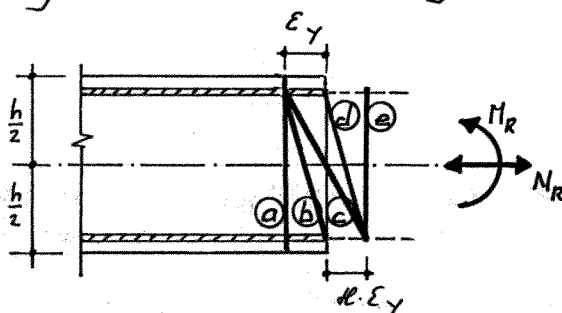
Die Dehnungsebene (d) grenzt die Brucharten "Betonbruch während Stahlfließen" und "Stahlbruch vor Betonbruch" ab.

Fall II : (Vorwiegend auf Druck beanspr. QS)

Solfern die Verformungen des Tragwerkes die Schnittkräfte erheblich beeinflussen, wie bei vorwiegend auf Druck beanspruchten, schlanken Stützen, nimmt nach Fließbeginn der Bewehrungen (auf Druck oder Zug) die Beanspruchung mit zunehmender Verformung schneller zu als der Biege Widerstand (Einfluss 2. Ordn.).

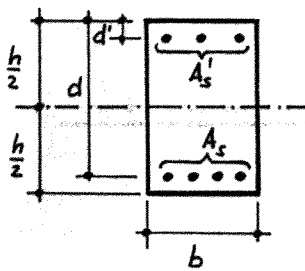


In diesem Fall müssen die in Rechnung gestellten Dehnungen begrenzt und die folgenden Dehnungsebenen verwendet werden:



d) Rechteckquerschnitt

Beispiel zur Ermittlung des Interaktionsdiagrammes

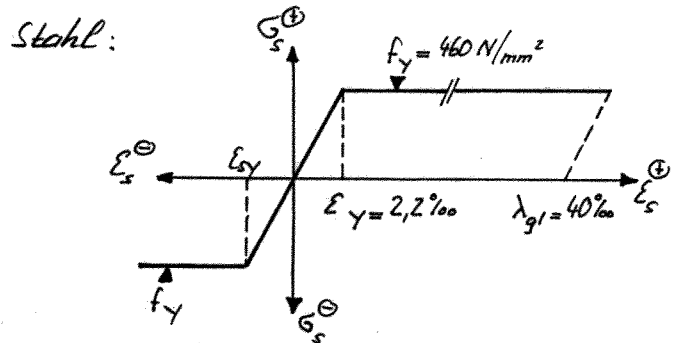
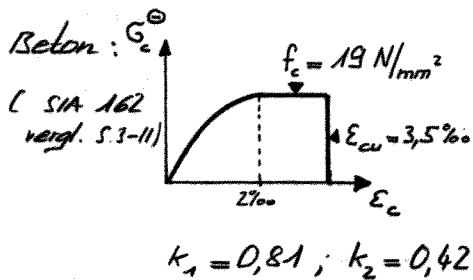


Numerische Angaben:

Geometrie: $h = 0,6 \text{ m}$; $d = 0,55 \text{ m}$;
 $b = 0,3 \text{ m}$; $d' = 0,05 \text{ m}$.

Bewehrung: $\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = 1,5\%$; $\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d} = \frac{\rho}{2} = 0,75\%$

Verbund: $\alpha = 0,8$



Dehnungsebene (a):

$$N_R = \underbrace{N_{Rc}}_+ + \underbrace{N_{Rs}}_+ + \underbrace{N_{Rs'}}_+ = +b \cdot h \cdot f_c + A_s \cdot f_y + A_s' \cdot f_y = +3420 + 1139 + 569 = +5128 \text{ kN}$$

$$M_R = \underbrace{M_{Rc}}_0 + \underbrace{M_{Rs}}_- + \underbrace{M_{Rs'}}_+ = 0 - N_{Rc} \left(d - \frac{h}{2}\right) + N_{Rs} \left(\frac{h}{2} - d'\right) = 0 - 285 + 142 = -143 \text{ kNm}$$

Dehnungsebene (b):

$$N_R = \underbrace{N_{Rc}}_+ + \underbrace{N_{Rs}}_0 + \underbrace{N_{Rs'}}_+ = +b \cdot d \cdot k_1 \cdot f_c + 0 + A_s' \cdot f_y = +2540 + 0 + 569 = +3109 \text{ kN}$$

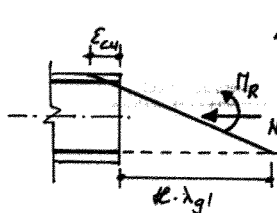
$$M_R = \underbrace{M_{Rc}}_+ + \underbrace{M_{Rs}}_0 + \underbrace{M_{Rs'}}_+ = +N_{Rc} \left(\frac{h}{2} - k_2 \cdot d\right) + 0 + N_{Rs}' \left(\frac{h}{2} - d'\right) = +175 + 0 + 142 = +317 \text{ kNm}$$

Dehnungsebene (c):

$$N_R = \underbrace{N_{Rc}}_+ + \underbrace{N_{Rs}}_- + \underbrace{N_{Rs'}}_+ = +b \cdot \frac{d}{1 + \frac{d \cdot \epsilon_y}{\epsilon_{cu}}} \cdot k_1 \cdot f_c - A_s \cdot f_y + A_s' \cdot f_y = +1630 - 1139 + 569 = +1120 \text{ kN}$$

$$M_R = \underbrace{M_{Rc}}_+ + \underbrace{M_{Rs}}_+ + \underbrace{M_{Rs'}}_+ = +N_{Rc} \left(\frac{h}{2} - k_2 \cdot \frac{d}{1 + \frac{d \cdot \epsilon_y}{\epsilon_{cu}}}\right) - N_{Rs} \left(d - \frac{h}{2}\right) + N_{Rs}' \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) = +247 + 285 + 142 = +674 \text{ kNm}$$

Dehnungsebene (d):



$$N_R = \underbrace{N_{Rc}}_+ + \underbrace{N_{Rs}}_- + \underbrace{N_{Rs}'}_+ = + b \cdot \frac{d}{1 + \lambda \cdot \lambda_{gl}} \cdot k_1 \cdot f_c - A_s \cdot f_y + A_s' \cdot \sigma_s'$$

$$= + 250 - 1138 + 71 = - 817 \text{ kN}$$

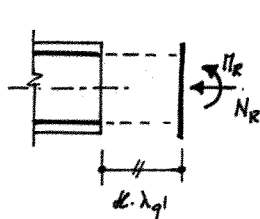
$$M_R = \underbrace{M_{Rc}}_+ + \underbrace{M_{Rs}}_+ + \underbrace{M_{Rs}'}_+ = + N_{Rc} \left(\frac{h}{2} - k_2 \cdot \frac{d}{1 + \lambda \cdot \lambda_{gl}} \right) - N_{Rs} \left(\frac{d-h}{2} \right) + N_{Rs}' \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

$$= + 69 + 285 + 18 = + 372 \text{ kNm}$$

$$\text{mit } \sigma_s' = E_s \cdot \left[\frac{d'}{d} (\epsilon_{cu} + \lambda \cdot \lambda_{gl}) - \epsilon_{cu} \right] = -57 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_s' \leq 460 \text{ N/mm}^2$$

Dehnungsebene (e):



$$N_R = \underbrace{N_{Rc}}_0 + \underbrace{N_{Rs}}_- + \underbrace{N_{Rs}'}_- = 0 - A_s \cdot f_y - A_s' \cdot f_y$$

$$= 0 - 1138 - 569 = - 1707 \text{ kN}$$

$$M_R = \underbrace{M_{Rc}}_0 + \underbrace{M_{Rs}}_+ + \underbrace{M_{Rs}'}_- = 0 - N_{Rs} \left(\frac{d-h}{2} \right) + N_{Rs}' \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

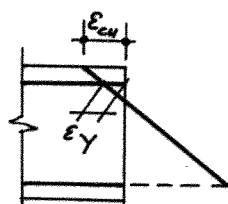
$$= 0 + 285 - 142 = + 143 \text{ kNm}$$

Zusätzliche Dehnungsebenen (Foll I)

Im Interaktionsdiagramm für Rechteck-BS führt eine lineare Verbindung der Wertepaare aus den Dehnungsebenen (a) bis (e) in weiten Bereichen zu einer guten Näherung (vergl. nächste Seite).

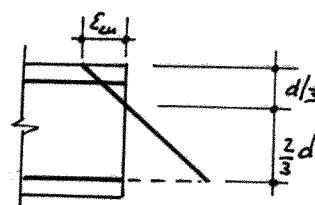
Für eine bessere Annäherung an den genauen Kurvenverlauf zwischen den Dehnungsebenen (c) und (d) kann es sinnvoll sein, die Wertepaare einer zusätzlichen Dehnungsebene zu berechnen.

z.B. aus:

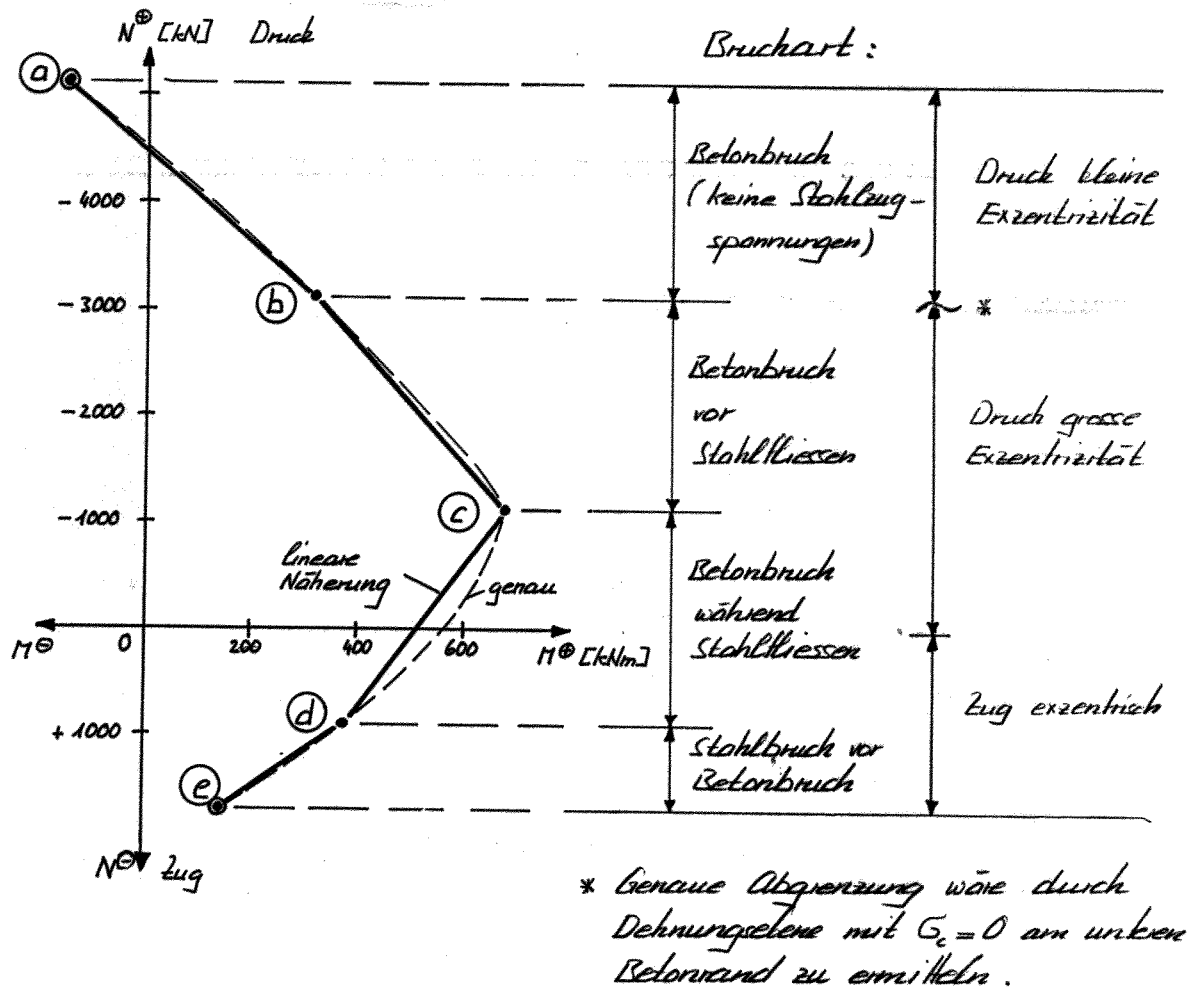


Fließbeginn von A_s'

oder



Interaktionsdiagramm: (mit Dehnungsebenen Fall I)

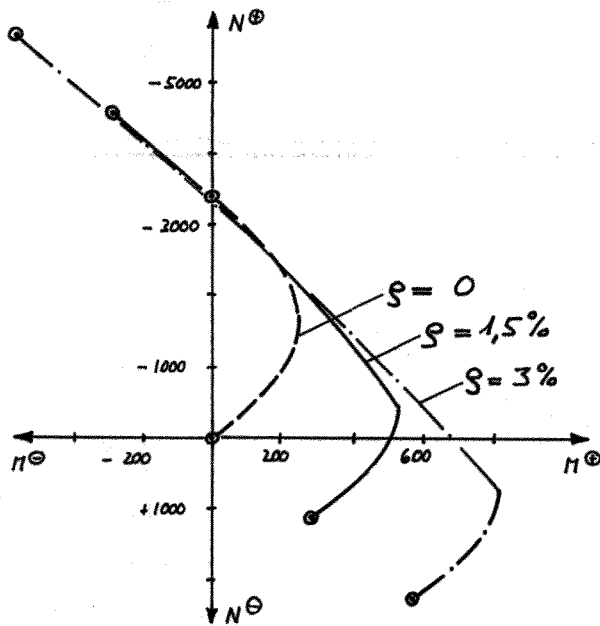


e) Diskussion einiger Parameter

Am Beispiel unter d) werden folgende Parameter variiert:

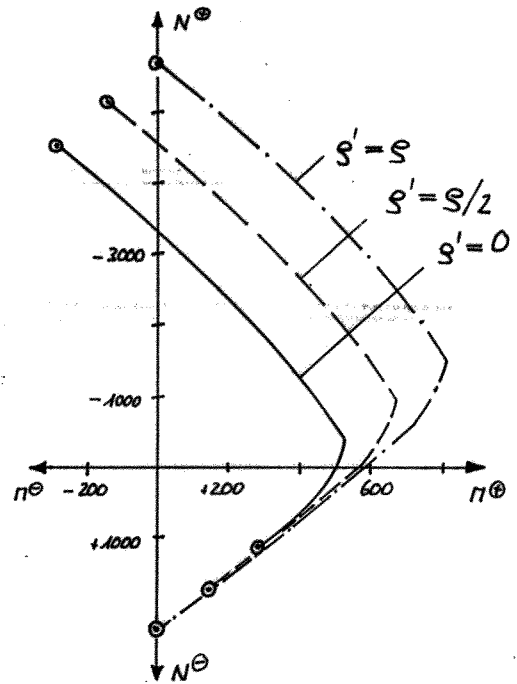
- Zugbewehrungsgehalt $\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$
- Druckbewehrungsgehalt $\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$
- Betonfestigkeit f_c
- σ - ϵ -Diagramm von Beton
- Verbundkoeffizient α
- Dehnungsebenen Fall I \leftrightarrow Fall II

Zugbewehrungsgehalt $s = \frac{A_s}{b \cdot d}$



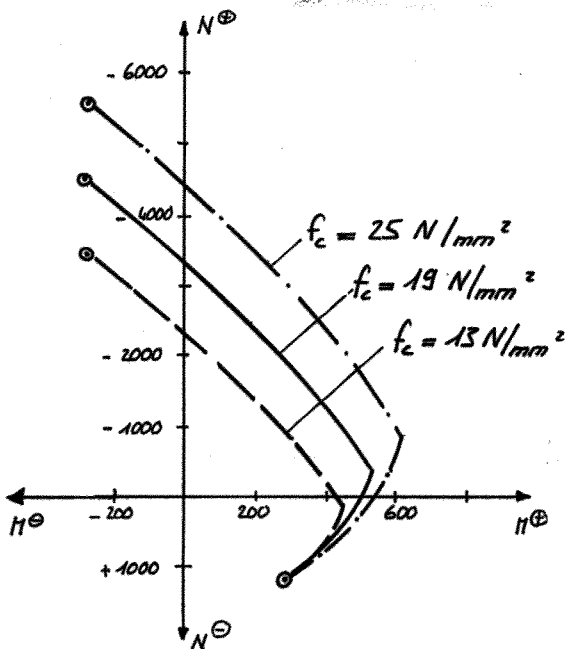
mit: $s' = 0$; $f_c = 19 \text{ N/mm}^2$
 $\mu = 1$;
 $\sigma_c - \epsilon_c$ gem. SIA 162

Druckbewehrungsgehalt $s' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$



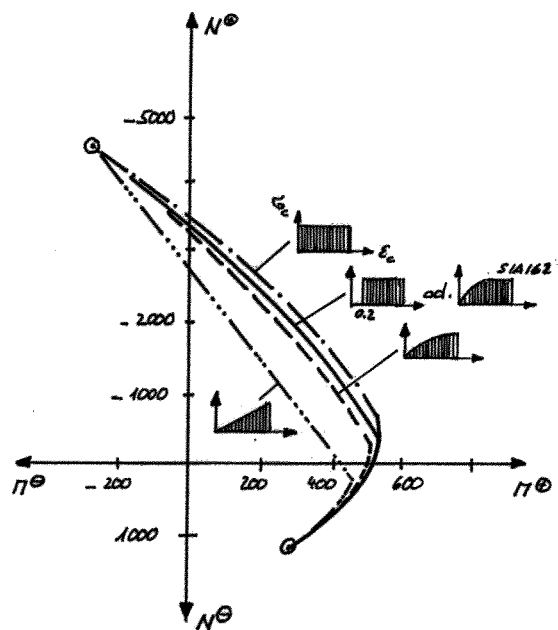
mit: $s = 1,5\%$; $f_c = 19 \text{ N/mm}^2$
 $\mu = 1$;
 $\sigma_c - \epsilon_c$ gem. SIA 162

Betonfestigkeit f_c



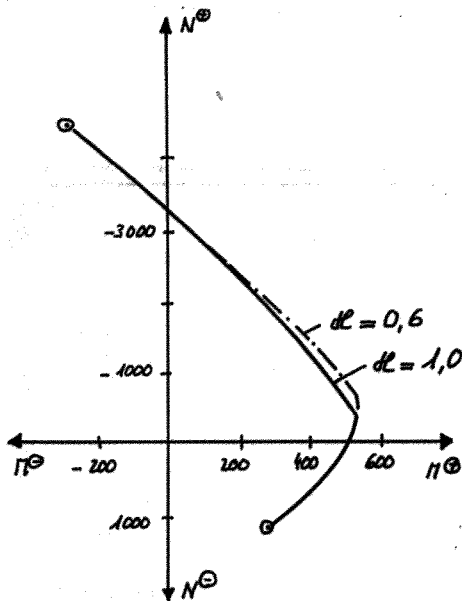
mit: $s = 1,5\%$; $s' = 0$
 $\mu = 1$
 $\sigma_c - \epsilon_c$ gem. SIA 162

$\sigma - \epsilon$ -Diagramm von Beton:



mit: $s = 1,5\%$; $s' = 0$
 $f_c = 19 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 1$

Verbundkoeffizient μ :

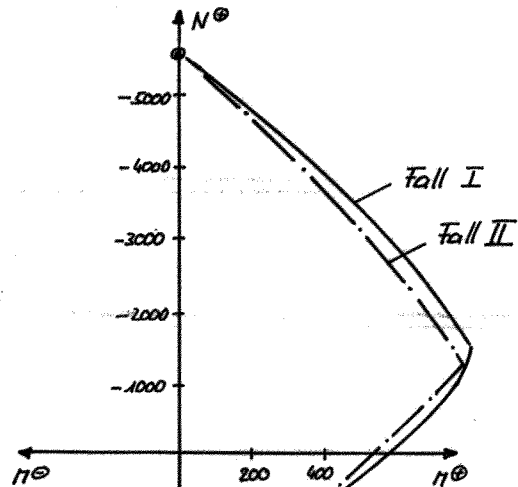


mit: $s = 1,5\%$; $s' = 0$

$f_c = 19 \text{ N/mm}^2$



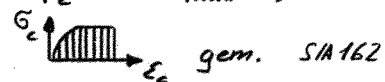
Dehnungsebenen Fall I/Fall II :



Bei gleichmässig verteilter Bewehrung längs ganzem Umfang sind grössere Unterschiede möglich!

mit: $s = 1,5\%$; $s' = 0$

$f_c = 19 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 1,0$



f) Allgemeiner Querschnitt

Grundsätzlich analoges Vorgehen wie beim Rechteckquerschnitt.

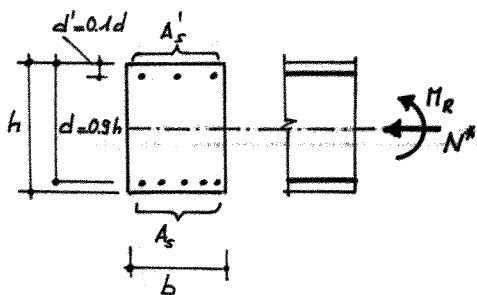
Tabellen [z.B. 30] sowie Computerprogramme [z.B. 55] stehen zur Verfügung.

h) Rotationsfähigkeit

Wird bei der Bemessung eines statisch unbestimmten Tragwerkes eine Umlagerung der Momente durch Zulassen von plastischen Gelenken in Rechnung gestellt, muss der beherrschende Bereich des Tragwerkes eine ausreichende Rotationsfähigkeit aufweisen (vergl. S 3.1-25)

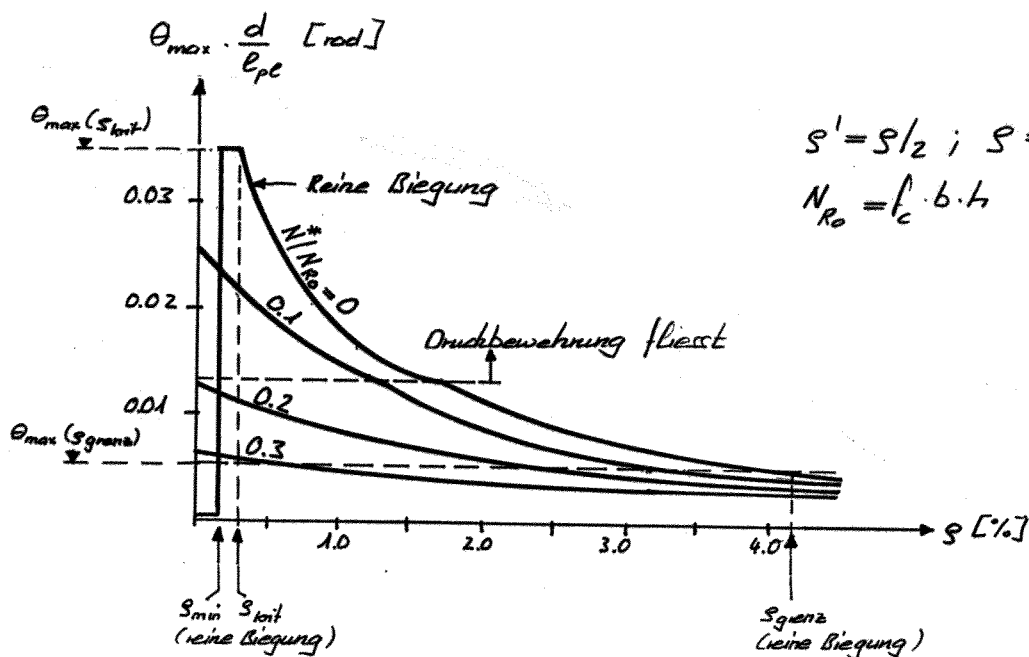
Die Rotationsfähigkeit nimmt mit zunehmender Normalkraft (Druckkraft) ab.

Beispiel Rechteckquerschnitt: (vergl. S.3.1-26)



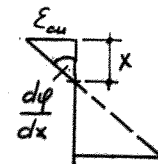
Beton: $f_c = 18 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$
 $k_1 = 0,81$; $k_2 = 0,42$

Stahl: $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_y = 2,2\text{‰}$
 $\lambda_{sl} = 40\text{‰}$; $\mu = 0,8$



Der maximale Rotationswinkel des plast. Gelenkes ergibt sich aus der Beziehung:

$$\theta_{\max} = \frac{\epsilon_{cu}}{x} \cdot l_{pe} \quad ; \quad l_{pe} \approx (0,5 \div 2)d$$



Praktische Folgerung:

Erdbebenbeanspruchte Rahmensysteme sind so zu bemessen, dass die plastischen Gelenke in den Biegeelementen (Biegel) und nicht in den Stützen (grosse Normalkraft) entstehen.

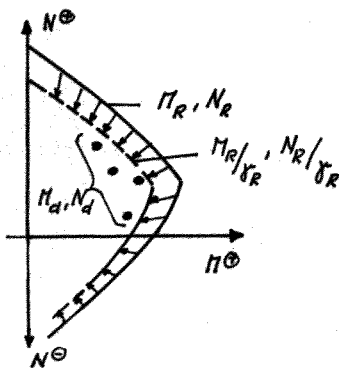
→ Erheblich größere Energiedissipation möglich!

3.2.3. Bemessung für M+N

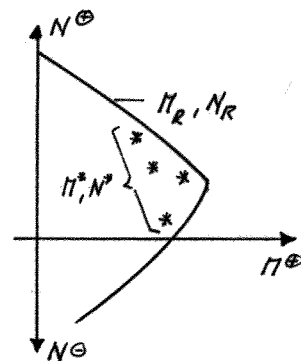
a) Sicherheitsnachweis

Der Querschnitt ist so stark zu bemessen, dass die Schnittkraftpaare M, N aller möglichen Einwirkungskombinationen innerhalb der Interaktionskurve liegen und von dieser einen ausreichenden "Sicherheitsabstand" aufweisen.

Bemessungsniveau:



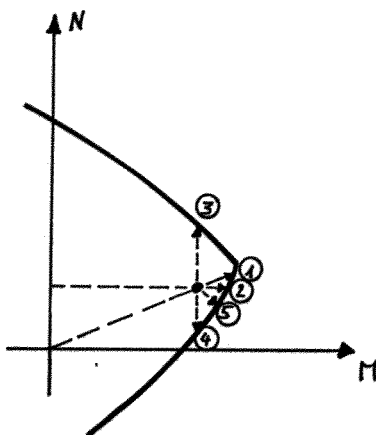
Bruchniveau:



M_R, N_R : Biege- und Druckwiderstand
 M_d, N_d : Schnittkräfte auf Bemessungsniveau
 M^*, N^* : Schnittkräfte auf Bruchniveau

Sicherheitsproblem

Mögliche "Wege" zum Bruch:



- ① Proportionales Anwachsen von M und N .
- ② Anwachsen von M wenn $N = \text{konstant}$.
- ③ Anwachsen von N wenn $M = \text{konstant}$.
- ④ Abnehmen von N wenn $M = \text{konstant}$.
- ⑤ "Nächster Weg" zum Bruch

Im vorliegenden Fall kann sowohl ein Anstieg von N , als auch ein Abfall von N zum Bruch führen. Da die massgebende Einwirkung selten sofort ersichtlich ist, sind stets verschiedene mögliche Kombinationen zu untersuchen:

$$\begin{aligned} & \Pi_{\max}, N(\Pi_{\max}) \\ & N_{\max}, \Pi(N_{\max}) \\ & N_{\min}, \Pi(N_{\min}) \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

N_{\max} und Π_{\max} ergeben sich i.d.R. aus verschiedenen Lastfällen und treten nicht gemeinsam auf.

Für eine Abschätzung der Bewehrung genügen meist die folgenden Schnittkraftkombinationen:

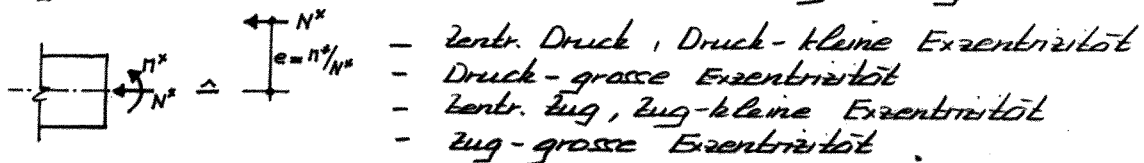
<u>Bemessungsniveau</u>	<u>Bruchniveau</u>
$\Pi_{d\max}, N_{d\max}$	M_{\max}^*, N_{\max}^*
$\Pi_{d\max}, N_{d\min}$	Π_{\max}^*, N_{\min}^*

Bei Vorzeichenwechsel von Π sind ferner zu überprüfen

$\Pi_{d\min}, N_{d\max}$	Π_{\min}^*, N_{\max}^*
$\Pi_{d\min}, N_{d\min}$	Π_{\min}^*, N_{\min}^*

b) Abschätzung der Bewehrung

Durch das Verhältnis $e = M^*/N^*$ lässt sich feststellen, welcher der folg., grundsätzlich zu unterscheidenden Fälle vorliegt (vergl. S. 3.2-1):



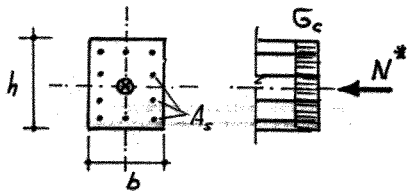
Für eine zweckmässige Wahl von QS-abmessung und Bewehrungsgehalt gelten die Entwurfsregeln für Stützen (vergl. 4.4). Insbesondere ist stets eine Mindestbewehrung (auf Zug- und Druckseite) einzulegen (vergl. 4.4).

Zentr. Druck, Druck-kleine Exzentrizität

Grundsätzlich ist in derart beanspruchten Querschnitten eine Mindestbewehrung gem. 4.4. einzulegen und der nötige Tragwiderstand durch entsprechende Betonabmessungen sicherzustellen.

Sind knappe Betonabmessungen einzuhalten, kann der erf. Tragwiderstand mittels starker Druckbewehrung gewährleistet werden, die sich folgendermassen abschätzen lässt:

- Zentr. Druck:

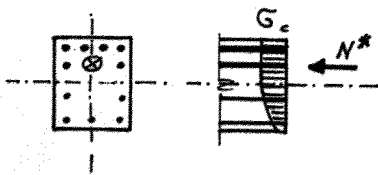


$$\Sigma A_s \geq \frac{N^* - A_c \cdot f_c}{f_y}$$

$$A_c = b \cdot h$$

Schwerpunkt von A_s und Schwerpunkt von A_c identisch

- Druck - kleine Exzentrizität:



$$\Sigma A_s \geq \frac{N^* - k_1 \cdot A_c \cdot f_c}{f_y}$$

$k_1 = 0,8+1$: Flächenparameter

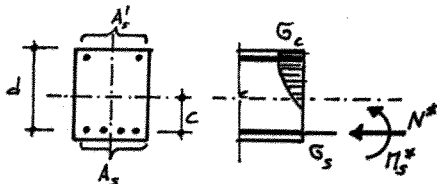
Schwerpunkt von A_s ca. im Angriffspunkt von N

Druck - grosse Exzentrizität

Bemessungsformel für die Zugbewehrung

Nach den auf S. 3.2-3 hergeleiteten Beziehungen gilt:

$$Z = \frac{\Pi_s}{\eta \cdot d} - N$$



$$A_s \geq \frac{\frac{\Pi_s^*}{\eta \cdot d} - N^*}{\sigma_s}$$

Diskussion:

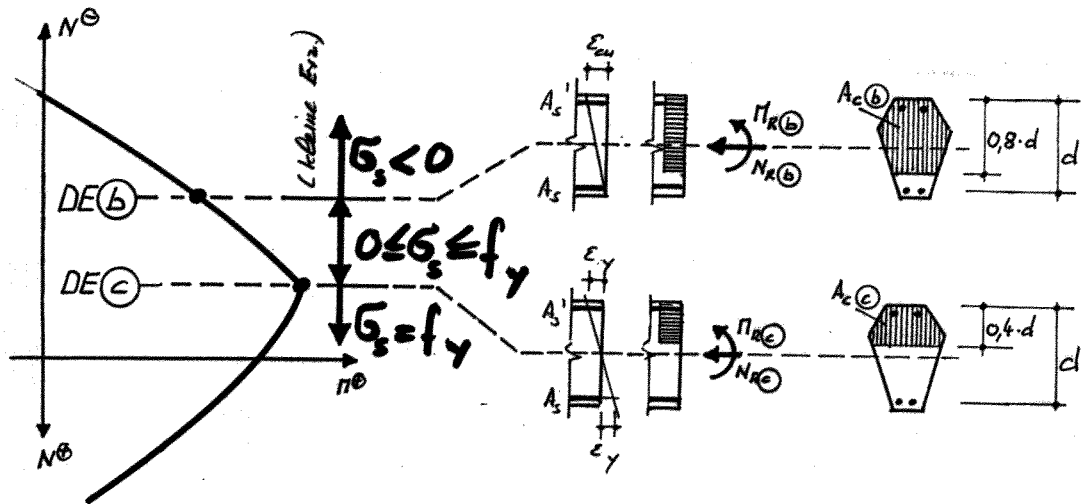
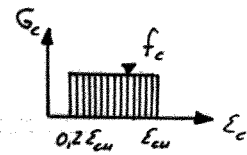
d : Die Lage des Schwerpunktes der Zugbewehrung und somit auch die statische Höhe d lässt sich mit ausreichender Genauigkeit schätzen. Das Moment $\Pi_s^* = \Pi^* + N^* \cdot c$ kann daher ohne Kenntnis von g ermittelt werden.

Näherung: $d \approx 0,9 \cdot h$

σ_s : Ob die Zugbewehrung im Bruchzustand fließt, d.h. ob $\sigma_s = f_y$ angenommen werden darf, lässt sich z.B. anhand folgender Betrachtung abschätzen:

Annahmen: - Vereinfachtes σ_c - ϵ_c -Diagramm

- $\alpha = 1$



$$N_{R\ominus} = A_{c\ominus} \cdot f_c + \underbrace{A_{s'} \cdot f_y - A_s \cdot f_y}_{\text{weist schätzen (= 0, falls } A_{s'} = A_s)}$$

falls $N_{R\ominus} \geq N^* \rightarrow \sigma_s = f_y \rightarrow$ Bemessung mit Bemessungsformel unproblematisch.

falls $N_{R\ominus} < N^* \rightarrow \sigma_s < f_y \rightarrow$ Bemessung schwierig.

Möglichkeiten:

1. Verschiedene A_s annehmen und Interaktionskurve im Bereich der Dehnungsebenen (b) und (c) berechnen (z.B. für $A_{s'} = \frac{A_s}{2}$ oder $A_{s'} = A_s$).

2. Tabellen verwenden (z.B. [30])

η : Der Hebelarm der inneren Kräfte $z = \eta \cdot d$ lässt sich folgendermassen schätzen:

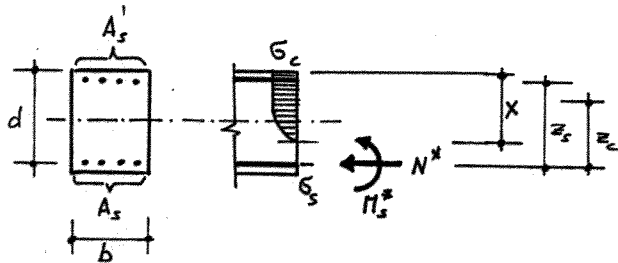
falls $N_{R\ominus} \geq N^* \rightarrow \eta \approx 0,8 \div 0,9$

falls $N_{R\ominus} < N^* \rightarrow \eta \approx 0,6 \div 0,8$

Die getroffenen Annahmen für G_s und η sind nach erfolgter Bemessung durch Aufzeichnen der Dehnungsebene zu kontrollieren.

Bemessungsformel für Druckbewehrung

Solern bei grosser Normalkraft und knappen Betonabmessungen die Mindestbewehrung der Druckzone nicht ausreicht, kann wie folgt vorgegangen werden:



$$M_s^* \leq A_s' \cdot f_y \cdot z_s + f_c \cdot x \cdot k_1 \cdot b \cdot z_c$$

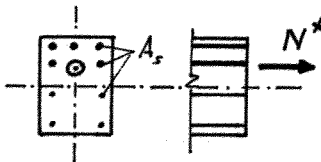
Bei rechteckähnlichen Querschnitten variiert das Produkt $x \cdot z_c$ für die Fälle "Betonbruch vor Stahlfließen" nur wenig:

$$x \cdot z_c \approx 0,6 \cdot d \cdot 0,7d \div 0,8 \cdot d \cdot 0,6 \cdot d = (0,42 \div 0,48) \cdot d^2$$

Mit $k_1 = 0,8$ wird:

$$A_s' \geq \frac{M_s^* - (0,34 \div 0,38) \cdot f_c \cdot b \cdot d^2}{f_y \cdot z_s} \quad \text{Rechteck-BS}$$

Zentr. Zug, Zug-kleine Exzentrizität



$$e_{A_s} \geq \frac{N^*}{f_y}$$

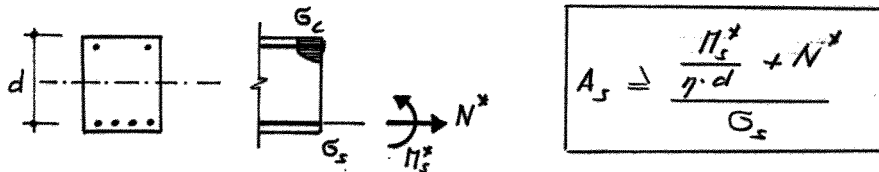
Schwerpunkt von A_s möglichst im Angriffspunkt von N .

Zug - grosse Exzentrizität

Bemessungsformel für Zugbewehrung:

Nach den auf S. 3.2-3 hergeleiteten Beziehungen gilt:

$$z = \frac{M_s}{\eta \cdot d} + N$$



Diskussion:

σ_s : Da "Betonbruch vor Stahlfließen" in diesem Fall kaum zu erwarten ist, gilt i.a.:

$$\sigma_s = f_y$$

η : Der Hebelarm der inneren Kräfte $z = \eta \cdot d$ lässt sich erfassen mit

$$\eta \approx 0,9 \div 0,95$$

Schiefe Biegung

Bisher war stets vorausgesetzt:

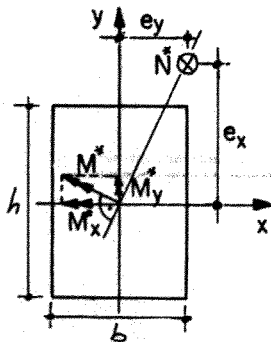
- Symmetrieebene für Querschnitt und Bewehrung.
- Kräfteangriff in Symmetrieebene.

Diese Voraussetzungen werden nun fallengelassen.

Kleine Exzentrizität:

Liegt die Druckkraft innerhalb des Kernes, bzw. die Zugkraft innerhalb der Bewehrung, lassen sich die Bemessungsformeln von S. 3.2-14 bzw. 3.2-16 sinngemäss anwenden.

Grosse Exzentrizität und reine Biegung:



Biegung mit Normalkraft:
 $M_x^* = -N \cdot e_x$, $M_y^* = N \cdot e_y$

Reine Biegung:
 M_x^* , M_y^* bzw. M^*

● Kleine Schiefe:

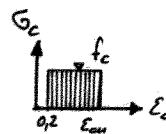
Wenn $\frac{M_y^*}{b} < \sim 0,2 \cdot \frac{M_x^*}{h}$: Getrennte Berechnung für M_x^* und M_y^* und einfache Superposition näherungsweise zulässig.

● Grosse Schiefe:

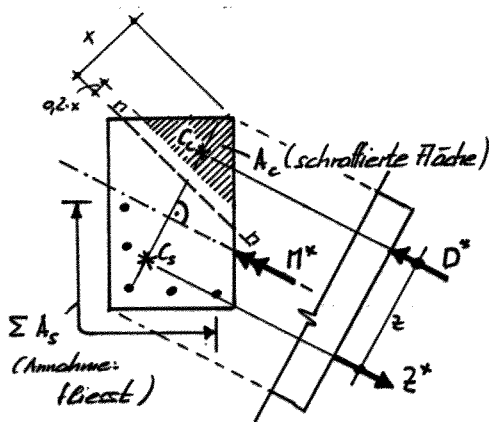
Superposition problematisch.

Näherungsbetrachtung unter folg. Annahmen:

- $\sigma_c - \epsilon_c$ -Diagramm rechteckförmig
- Zugbewehrung fließt



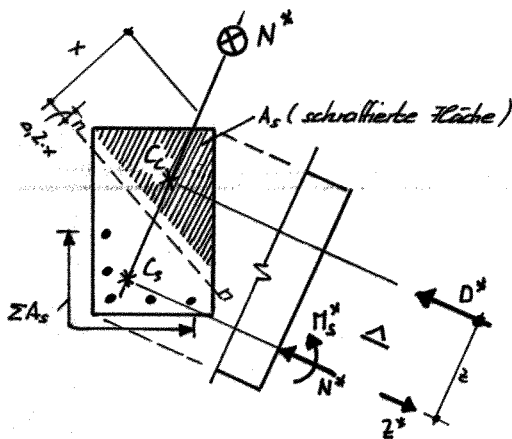
Reine Biegung:



Mögliches Vorgehen:

- Wahl von L_s (im Hinblick auf mögl. grossen Hebelarm z).
- Annahme von L_c (Schwerpunkt der gedrückten Fläche A_c) unter Berücksichtigung, dass Verbindungslinie $L_c - L_s \perp M^*$ ($\neq \perp n-n$!).
- $\sum A_s \cdot f_y \cdot z \approx M^* \rightarrow z^* = \frac{M^*}{\sum A_s \cdot f_y} = D^*$
- Kontrolle von $A_c \approx \frac{D^*}{f_c}$
- evtl. neues z ... (Iteration).
- Kontrolle ob Stahl lokal überdehnt fließt (Dehnungsebene um $n-n$ ausgehend von ϵ_{cu})

Biegung mit Normalkraft : (N klein)



Mögliches Vorgehen:

- Wahl von L_s .
- Annahme von L_c unter Berücksichtigung, dass L_c, C_s, N^* auf einer Geraden liegen.
- $$\Sigma A_s = \frac{M_s^*}{z \cdot f_y} - \frac{N^*}{f_y}$$
- $$\rightarrow z^* = \Sigma A_s \cdot f_y, \quad D^* = z^* + H^*$$
- Kontrolle von $A_c \approx \frac{D^*}{f_c}$
- Evtl. neues $z \dots$ (Iteration).
- Kontrolle ob Stahl tatsächlich fließt.

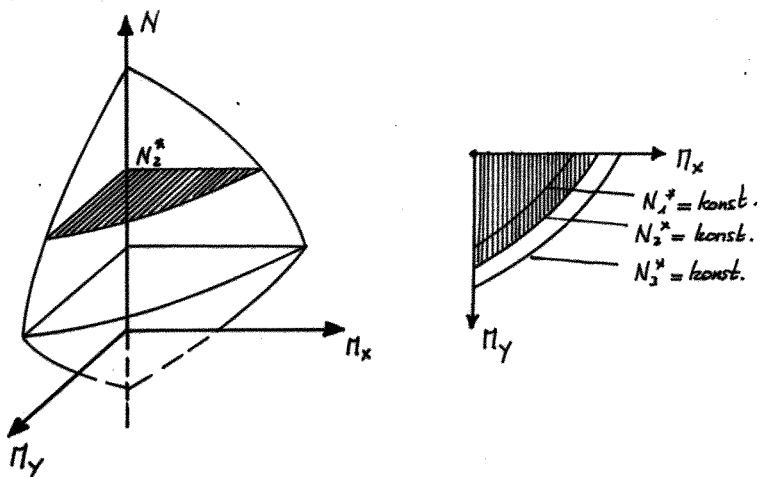
Druckbewehrung lässt sich sinngemäss berücksichtigen.

Das gezeigte Vorgehen eignet sich nicht

- bei grossen N (Betonbruch vor Stahlfließen).
- bei Stützen, deren Beanspruchung nach Theorie 2. Ordnung zu ermitteln ist (Bruch des QS bei Flussbeginn der äussersten Stahlfaser gem. Dehnungsebenen Fall II; vergl. S. 3.2-5).

Grundsätzlich können analog zu 3.2.2. Interaktionsdiagramme berechnet werden. Da hier ein dreidimensionales Interaktionsproblem vorliegt, ist bei geg. QS-Form und geg. Bewehrungsgehalt jeder Dehnungsebene ein bestimmtes Π_{xR}, Π_{yR}, N_R zugeordnet [vergl. 58].

Eine zweidimensionale Darstellung ist z.B. für $N^* = \text{konst.}$ oder $\Pi_y^* = \text{konst.}$ möglich.



In Walker-Tab.: Darstellung für $\frac{\Pi_x / h_x}{\Pi_y / h_y} = \text{konst.}$
[30]

3.2.4. Spannungen, Dehnungen und Steifigkeiten im Gebrauchszustand

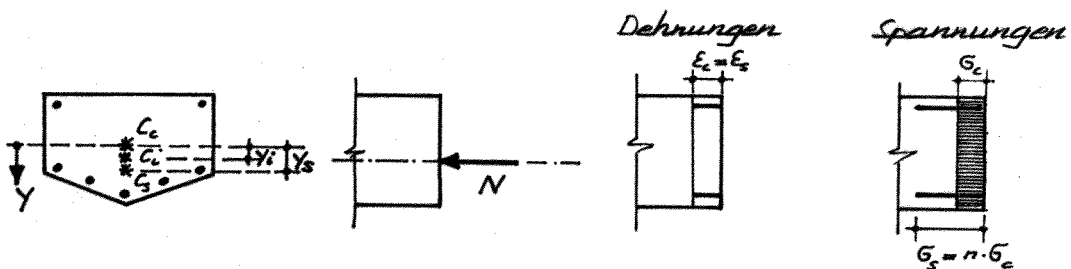
(Elastische Festigkeitslehre)

a) Annahmen (wie bei reiner Biegung, siehe S. 3.1-21)

- Ebenbleiben der Querschnitte
- Linearelastische Stoffgesetze mit $n = E_s / E_c$
- Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit
- Keine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen

b) Zentrischer Druck

N geht im Schwerpunkt der ideellen Fläche an



- C_c : Schwerpunkt der Betonfläche
 C_s : Schwerpunkt der Stahlfläche
 C_i : Schwerpunkt der ideellen Fläche

Ideelle Fläche A_i :

$$A_i = A_c + (n-1) \cdot A_s \approx A_c + n \cdot A_s$$

(Vereinfachung sinnvoll, da n nicht genau bekannt.)

Schwerpunkt der ideellen Fläche C_i :

z.B. mit Schwerachse des reinen Beton-BS als Bezugsachse:

$$y_i = \frac{n \cdot A_s \cdot y_s}{A_i}$$

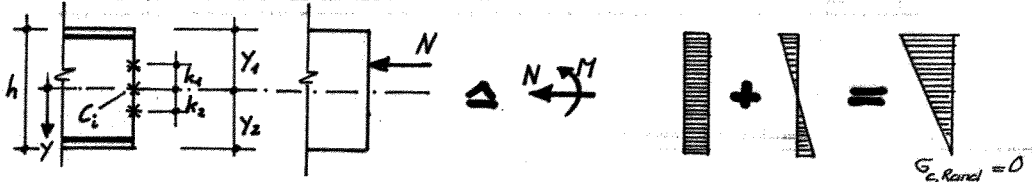
Spannungen und Dehnungen:

$$\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{N}{A_i}; \quad \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = n \cdot \frac{N}{A_i} = n \cdot \sigma_c$$

c) Druck - kleine Exzentrizität

N geht innerhalb des Kerns der idealen Fläche an
 → Nur Druckspannungen

Definition Kernweiten:



$$\sigma_{c, \text{Rand}} = \frac{N}{A_i} - \frac{M}{W_{i,1}} = \frac{N}{A_i} - \frac{N \cdot k_2 \cdot y_1}{I_i} = 0$$

$$k_2 = \frac{I_i}{A_i \cdot y_1} = \frac{W_{i,1}}{A_i} ; \quad k_1 = \frac{I_i}{A_i \cdot y_2} = \frac{W_{i,2}}{A_i}$$

Bsp: Rechteck-BS ohne Bewehrung: $k_1 = k_2 = \frac{h}{6}$

Spannungen und Dehnungen:

$$\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{N}{A_i} \pm \frac{M}{I_i} \cdot y ; \quad \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = \eta \cdot \sigma_c$$

Superposition der Spannungen aus N und M nur erlaubt für $\frac{M}{N} < k_1$ resp. k_2 !

Steifigkeit:

$$B^I = E_c \cdot I_i = \frac{M}{d^4/dx^4}$$

I_i des ungerissenen BS bezüglich der ideellen Schwerachse.

Bemerkungen: $-M = N \cdot e$ mit $e =$ Abstand der Normalkraft vom ideellen Schwerpunkt C_i

- In statischen Berechnungen wird M und N i.d.R. auf die halbe Querschnittshöhe oder auf die Schwerachse des reinen Beton-BS bezogen. Sie müssen auf die ideale Schwerachse umgerechnet werden!

Tabellen:

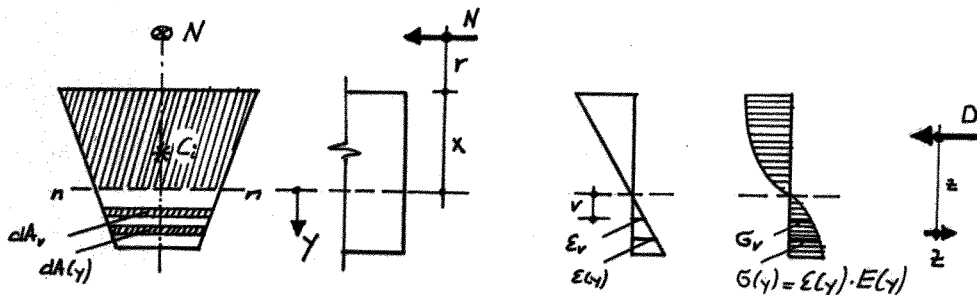
[31] für Rechteck und Kreisquerschnitte.

d) Druck - grosse Exzentrizität

Allgemeine Biegelehre

"allgemein" : gedachte Aufteilung des (vertikal symmetrischen) Querschnittes in horizontale Fasern, wobei jede Faser einen andern E-Modul aufweisen kann.

- Annahmen : - Ebenbleiben der Querschnitte.
 - lineare σ - ϵ -Gesetze mit zugehörigem E-Modul für jede Faser.
 - Zugfestigkeit kann berücksichtigt werden.



Faser v : "Vergleichsfaser", "Bezugsfaser"

Bemerkung zu C_i : Die Lage von C_i (wie auch von $n-n$) ist vom Verhältnis Π/N abhängig.

Lage der neutralen Axe :

Verträglichkeit : $G(y) = G_v \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot \frac{y}{v}$

Gleichgewicht : $\Sigma N = N = \int G(y) \cdot dA = \int G_v \cdot \frac{E(y)}{E_v} \cdot \frac{y}{v} \cdot dA$
 $= \frac{G_v}{v} \cdot \int y \cdot dA_i = \frac{G_v}{v} |S_{in}|$

$\Sigma \Pi = N(r+x) = \int G(y) \cdot y \cdot dA = \frac{G_v}{v} \int y^2 \cdot dA_i = \frac{G_v}{v} I_{in}$

Division $\frac{\Pi}{N}$ ergibt :

$$r+x = \frac{I_{in}}{|S_{in}|}$$

S_{in} : ideales stat. Moment } Bezüglich der Neutralaxe !
 I_{in} : ideales Trägheitsmoment } (nicht bezügl. der Schweraxe der BS)

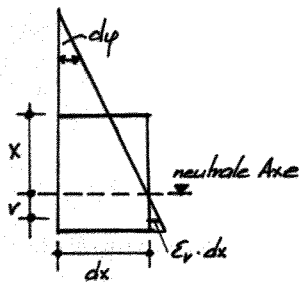
Reine Biegung : $r \rightarrow \infty$; $S_{in} \rightarrow 0$; $n-n$ rückt auf Höhe von C_i (Π).

Spannungen und Dehnungen

$$\sigma_v = \varepsilon_v \cdot E_v = \frac{N \cdot v}{|S_{in}|} = \frac{N(r+x) \cdot v}{I_{in}}$$

$$G(y) = \varepsilon(y) \cdot E(y) = \sigma_v \frac{E(y)}{E_v} \frac{y}{v} = n \frac{N \cdot y}{|S_{in}|} = n \frac{N(r+x) \cdot y}{I_{in}}$$

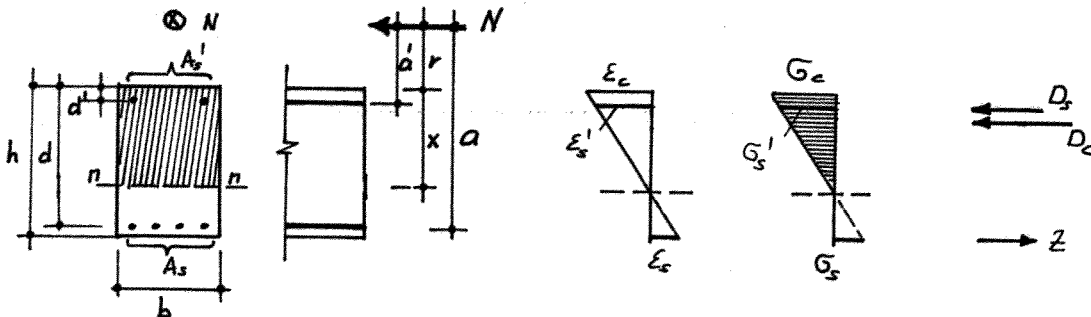
Biegesteifigkeit



$$\begin{aligned} dy &= \frac{\varepsilon_v}{v} \cdot dx = \frac{N}{|S_{in}| \cdot E_v} \cdot dx \\ &= \frac{N(r+x)}{I_{in} \cdot E_v} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{|S_{in}| \cdot E_v} = \frac{N(r+x)}{I_{in} \cdot E_v}$$

Stahlbeton - Rechteckquerschnitt



Wie vorne schon erwähnt, gelten die nachfolgenden Betrachtungen für den idealisierten Querschnitt (vollkommen gerissen, $\eta = 1,0$).

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \varepsilon_s &= \varepsilon_{sm} = \varepsilon_{smax} \\ \sigma_s &= \sigma_{sm} = \sigma_{smax} \end{aligned}$$

Lage der neutralen Axc

- Mit direkter Methode:
(direkt aus Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen)

$$N = D_c + D_s - Z = G_c \cdot \frac{b \cdot x}{2} + A_s' \cdot G_s' - A_s \cdot G_{s \max}$$

$$\text{mit } G_s = n \cdot G_c \frac{d-x}{x} \quad \text{und} \quad G_s' = n \cdot G_c \frac{x-d'}{x}$$

$$\rightarrow N = G_c \cdot \frac{b \cdot x}{2} + A_s' \cdot n \cdot G_c \frac{x-d'}{x} - A_s \cdot n \cdot G_c \frac{d-x}{x}$$

$$\begin{aligned} M_s = N \cdot a &= D_c \left(d - \frac{x}{3}\right) + D_s (d - d') \\ &= G_c \frac{b x}{2} \left(d - \frac{x}{3}\right) + A_s' \cdot n \cdot G_c \frac{x-d'}{x} (d-d') \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen

$$\text{von } N \text{ wird mit: } \xi = \frac{x}{d}; \quad \rho = \frac{A_s}{b \cdot d}; \quad \rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}; \quad a' = a - d - d'$$

$$\xi^3 - 3\xi^2 \left(1 - \frac{\rho}{d}\right) + 6\xi \cdot n \cdot \rho \left(\frac{a}{d} + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{a'}{d}\right) - 6n\rho \left(\frac{a}{d} + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{d'}{d} \cdot \frac{a'}{d}\right) = 0 \rightarrow \xi = \dots$$

- Mit allgemeiner Biegelinie:

$$r + x = \frac{I_{in}}{|S_{in}|} = \frac{\frac{b x^3}{3} + n \cdot A_s' (x-d')^2 + n A_s (d-x)^2}{\left| -\frac{b x^2}{2} - n A_s' (x-d') + n A_s (d-x) \right|} \quad \left. \vphantom{\frac{I_{in}}{|S_{in}|}} \right\} \begin{array}{l} \text{Gibt Gleichung} \\ \text{3. Grades} \end{array}$$

Spannungen und Dehnungen

- Mit direkter Methode:

$$G_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{\xi}{\frac{\xi^2}{2} \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) + \rho' \cdot n \left(\xi - \frac{d'}{d}\right) \left(1 - \frac{d'}{d}\right)} \cdot \frac{M}{b \cdot d^2}$$

$$G_s = \varepsilon_s \cdot E_s = n \cdot G_c \cdot \frac{1 - \xi}{\xi}; \quad G_s' = n \cdot G_c \cdot \frac{\xi - \frac{d'}{d}}{\xi}$$

- Mit allgemeiner Biegelinie:

$$G_c = \varepsilon_c \cdot E_c = \frac{N \cdot x}{|S_{in}|} = \frac{N(r+x)x}{I_{in}}$$

$$G_s = \varepsilon_s \cdot E_s = n \frac{N(d-x)}{|S_{in}|} = n \frac{N(r+x)(d-x)}{I_{in}}$$

• Tabellen: [31], [32]

$$G_s = \epsilon_s \frac{\pi_s}{b \cdot d^2} ; G_c = \frac{G_s}{\gamma}$$

Anwendung von Tabellen für reine Biegung: (vergl. auch S. 2.2-3)

Die versteckende Wirkung der Normalkraft kann erfasst werden mit Hilfe eines fiktiven Bewehrungsgehaltes:

$$s_{\text{fikt}} = s + \frac{N}{G_s \cdot b \cdot d}$$

Mit s_{fikt} lassen sich die Spannungen für das Moment π_s (Moment auf Höhe Zugbewehrung) wie bei reiner Biegung ermitteln. G_s ist vorerst zu schätzen.

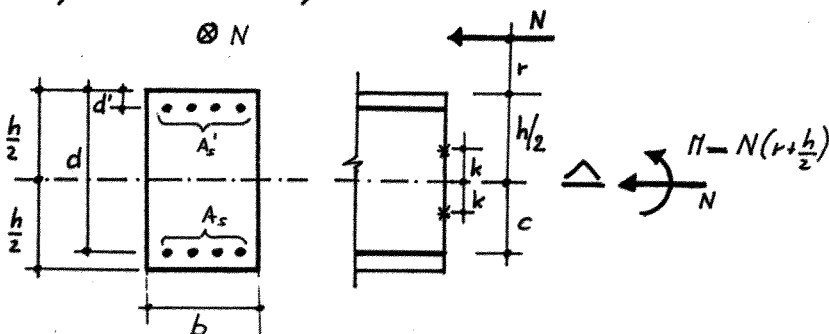
Biegesteifigkeit

Die Steifigkeit eines biegebeanspruchten, gerissenen QS wird durch eine gleichzeitig wirkende axiale Druckkraft erhöht.

Die untere Steifigkeitsgrenze (Vollkommen gerissener QS; d.h. keine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen; $\alpha = 1$) lässt sich z.B. nach den Formeln der allg. Biegelehre ermitteln:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{N}{|S_{in}| \cdot E_c} = \frac{N(r+x)}{I_{in} \cdot E_c} \quad \text{mit} \quad r+x = \frac{I_{in}}{|S_{in}|}$$

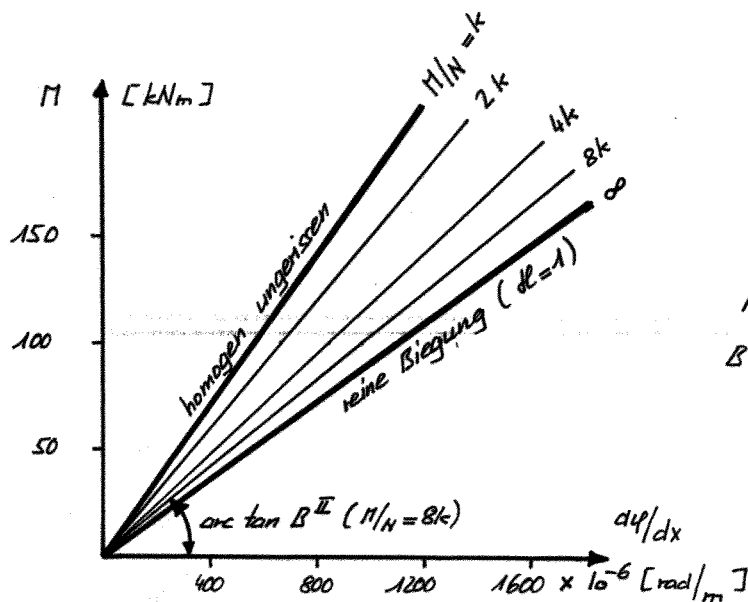
Beispiel Rechteckquerschnitt:



Geometrie: $h = 0,6 \text{ m}$; $d = 0,55 \text{ m}$;
 $b = 0,3 \text{ m}$; $d' = 0,05 \text{ m}$.

Bewehrung: $s = \frac{A_s}{b \cdot d} = 1,5\%$; $s' = s$

Material: linear-elastische Stoffgesetze
 $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $\frac{E_s}{E_c} = n = 10$



k : Kernweite = 0,123 m

B^{II} : Biegesteifigkeit des vollz. gerissenen QS mit $\alpha=1$.

Die obere Steifigkeitsgrenze bzw. die wahrscheinliche Steifigkeit bei Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ($\alpha < 1$) lässt sich im $M - dy/dx$ -Diagramm analog wie bei reiner Biegung (vgl. S. 3.1-46) annähern.

Das Rissmoment M_r wird durch die Druckkraft erhöht:

$$\frac{M_r}{W_i} - \frac{N}{A_i} = f_{ct} \quad \rightarrow \quad M_r = \left(f_{ct} + \frac{N}{A_i} \right) \cdot W_i$$

A_i, W_i des homogenen Querschnittes

Bemerkungen: - Da das Verhältnis M/N längs eines Tragwerkes sich i.d.R. verändert, müsste zur Abschätzung der Durchbiegungen die Steifigkeit theoretisch in jedem Schnitt neu bestimmt werden. Da Verformungsberechnungen ohnehin auf unsicheren Annahmen basieren, genügt es meist, die Steifigkeit längs des Tragwerkes mit einem geeigneten Mittelwert anzunähern.

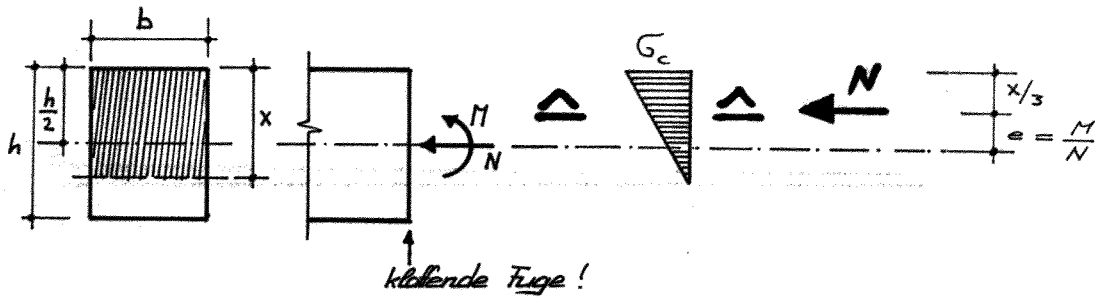
- Muss die Verformung bei der Ermittlung der Schnittkräfte (Theorie 2. Ordnung) berücksichtigt werden, ist der Steifigkeitsberechnung erhöhte Beachtung zu schenken. Der Ermittlung des Tragwiderstandes ist in diesen Fällen die Steifigkeit im Bruchzustand zugrunde zu legen (vgl. Abschn. 4.4 Stützen).

Andere Querschnittsformen

Vorgehen wie beim Rechteckquerschnitt. Berechnungen bei komplizierten QS-Formen mit grossem Aufwand verbunden!

- Anwendung von Tabellen [31], [32], Computerprogrammen [55] oder graphischer und numerischer Spannungsnachweis [56].
- Kontrolle durch Aufzeichnen der Dehnungsebene (Innere Kr. ↔ Schmitter.).

Unbewehrter Querschnitt



$$N = \frac{\sigma_c \cdot x \cdot b}{2} ; \quad e = \frac{M}{N} = \frac{h}{2} - \frac{x}{3}$$

$$\sigma_c = \frac{2N}{3 \cdot b \left(\frac{h}{2} - \frac{M}{N} \right)}$$

Grenzfälle: $\frac{M}{N} = \frac{h}{6} = k :$

$$\sigma_c = \frac{2N}{b \cdot h} ; \quad x = h$$

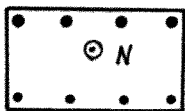
$$\frac{M}{N} \rightarrow \frac{h}{2} :$$

$$\sigma_c \rightarrow \infty ; \quad x \rightarrow 0$$

σ_c sehr empfindlich auf Änderung der Exzentrizität!

e) Zentrischer Zug

N greift im Schwerpunkt der Stahlfläche an.



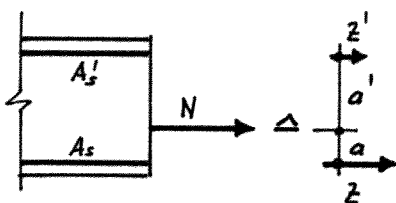
Aufnahme der Zugkräfte allein durch die (normalerweise symmetrische) Bewehrung:

$$\sigma_s = \frac{N}{\sum A_s}$$

Erst. Massnahmen zur Rissüberwöhnung treffen (kleine Stababstände, kleine Stab- ϕ , kleine Bügelabstände). Vorspannung sehr wirksam.

f) Zug - kleine Exzentrizität

N greift innerhalb der beiden Bewehrungslagen an.



$$\sigma_s' = \frac{z'}{A_s'} \cdot \frac{a}{a+a'}$$

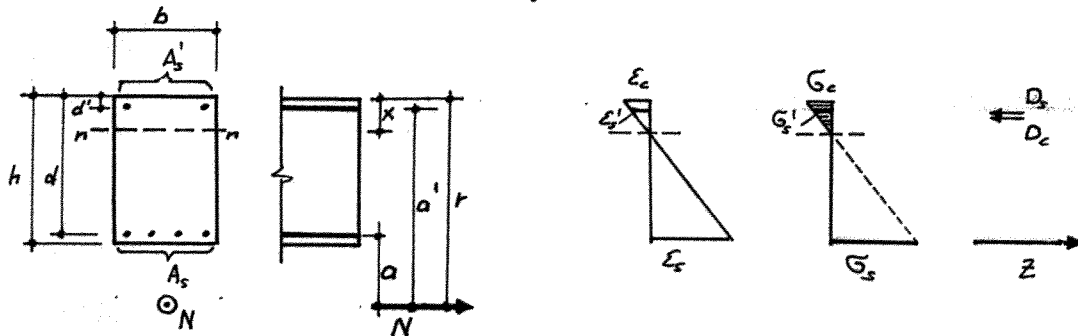
$$\sigma_s = \frac{z}{A_s} \cdot \frac{a'}{a+a'}$$

Steifigkeit wird allein durch den nachten Stahl bestimmt.

g) Zug-grosse Exzentrizität

Berechnung analog zu "Druck mit grosser Exzentrizität" mit teilweise anderen Vorzeichen (S. 3.2-21 ÷ 3.2-24)

Stahlbeton-Rechteckquerschnitt



Betrachtungen am idealisierten QS ($\eta = 1$).

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \quad \epsilon_s &= \epsilon_{sm} = \epsilon_{smax} \\ G_s &= G_{sm} = G_{smax} \end{aligned}$$

Lage der neutralen Axe

- Mit dicker Methode:

$$\left. \begin{aligned} N &= z - D_c - D_s \\ \pi_s &= N \cdot a \end{aligned} \right\} \text{gleichsetzen von } N \text{ führt zur Gleichung von } \xi :$$

$$\xi^3 - 3\xi^2 \left(1 + \frac{a}{d}\right) - 6\xi \cdot n \cdot \rho \left(\frac{a}{d} + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{a'}{d}\right) + 6n\rho \left(\frac{a}{d} + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{d'}{d} \cdot \frac{a'}{d}\right) = 0 \rightarrow \xi = \dots$$

- Mit allgemeiner Biegelinie:

$$r - x = \frac{I_{in}}{S_{in}} \rightarrow \text{Gleichung 3. Grades für } x \text{ (vergl. S. 3.2-22)}$$

Spannungen und Dehnungen

- Mit dicker Methode:

$$\sigma_c = \epsilon_c \cdot E_c = \frac{\xi}{\frac{\xi^2}{2} \left(1 - \frac{\xi}{d}\right) + \rho' \cdot n \left(\xi - \frac{d'}{d}\right) \left(1 - \frac{d'}{d}\right)} \cdot \frac{\pi_s}{b \cdot d^2}$$

$$\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{1 - \xi}{\xi}; \quad \sigma_s' = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{\xi - d'/d}{\xi}$$

- Mit allgemeiner Biegelinie:

$$\sigma_c = \epsilon_c \cdot E_c = \frac{N \cdot x}{S_{in}} = \frac{N(r-x) \cdot x}{I_{in}}$$

$$\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s = n \cdot \frac{N(d-x)}{S_{in}} = n \cdot \frac{N(r-x)(d-x)}{I_{in}}$$

-Tabellen: [31], [32]

Meistens ist nur der Fall "Biegung mit Druck" tabelliert. Spannungs-
berechnungen für "Biegung mit Zug" sind deshalb mit Hilfe der
Tabellen für "reine Biegung" durchzuführen. Der Berechnung ist
dabei das Moment auf Höhe der Zugbewehrung M_s sowie der
fiktive Bewehrungsgehalt

$$s_{\text{fikt}} = s - \frac{N}{\sigma_s \cdot b \cdot d}$$

zugrunde zu legen. σ_s ist vorerst zu schätzen.

Biegesteifigkeit

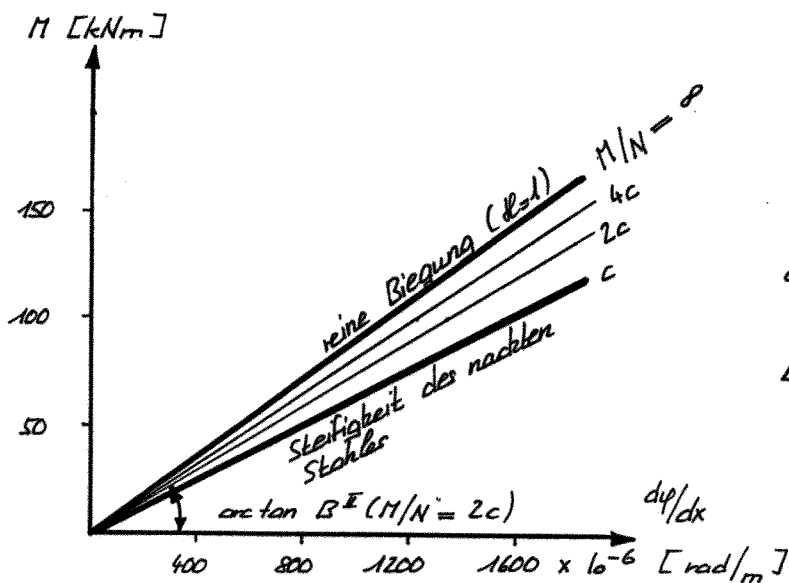
Die Steifigkeit eines biegebeanspruchten, gerissenen BS wird durch
eine gleichzeitig wirkende axiale Zugkraft verkleinert.

Die untere Steifigkeitsgrenze ($\alpha=1$) lässt sich z.B. nach den
Formeln der allg. Biegelohre ermitteln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{S_{\text{in}} \cdot E_c} = \frac{N(r-x)}{I_{\text{in}} \cdot E_c} \quad \text{mit } r-x = \frac{I_{\text{in}}}{S_{\text{in}}}$$

Beispiel Rechteckquerschnitt:

Numerische Angaben vergl. S. 3.2-25



c : Abstand der Zugbe-
wehrung von der
Querschnittsmittellinie.
 B^{II} : Biegesteifigkeit des
gerissenen BS mit
 $\alpha=1$.

Die obere Stetigkeitsgrenze bzw. die wahrscheinliche Stetigkeit bei Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ($\alpha < 1$) lässt sich im $M - d/d_x$ -Diagramm analog wie bei reiner Biegung (vergl. S. 3.1-46) annähern.

Das Rissmoment Π_r wird durch die Zugkraft verkleinert.

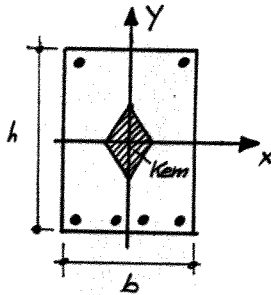


$$\frac{\Pi_r}{W_i} + \frac{N}{A_i} = f_{ct} \rightarrow \boxed{\Pi_r = \left(f_{ct} - \frac{N}{A_i} \right) \cdot W_i}$$

A_i, W_i des homogenen QS

h) Schiefe Biegung

Kleine Exzentrizität



Wenn N innerhalb des Kernes liegt, ist die Berechnung am ungerissenen Querschnitt mit ideellen Querschnittswerten durchzuführen.

$$\sigma_c = \frac{N}{A_i} + \frac{\Pi_x}{I_{ix}} \cdot y + \frac{\Pi_y}{I_{iy}} \cdot x$$

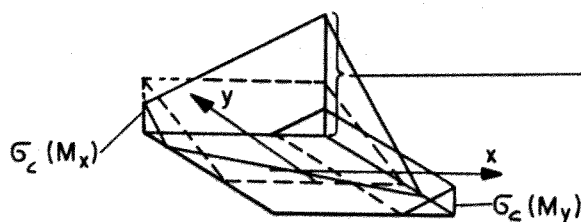
Grosse Exzentrizität und reine Biegung

Kleine Schiefe:

Wenn $\frac{\Pi_x}{b} < \sim 0,2 \cdot \frac{\Pi_y}{h}$: Getrennte Berechnung für Π_x und Π_y und einfache Superposition näherungsweise (Π_x, Π_y vergl. S. 3.2-18) weise zulässig.

Grosse Schiefe:

Superposition problematisch!



$$\sigma_c(M) > \sigma_c(\Pi_x) + \sigma_c(\Pi_y) !$$

Spannungen werden bei Superposition unterschätzt.

Handrechnung (Probierverfahren) oft aufwendig.

Vermwendung von Tabellen z.B. Durrer [57] (gelten für $n = 15$) oder von Computerprogrammen vorteilhaft.

3.3. Biegung mit Querkraft

Querkraft tritt stets zusammen mit Biegung auf, da sie mit einer Veränderung der Biegemomente zusammenhängt ($V = dM/dx$).

Bei aufgelösten Querschnitten tritt eine Querkrafts- bzw. Schubbeanspruchung sowohl in Stegen wie auch in Flanschen ("Längsschub") auf. Im folgenden werden diese beiden Beanspruchungsbereiche getrennt behandelt.

Im Stahlbeton ergibt sich für Biegung mit Querkraft, sobald Risse entstanden sind, eine ausserordentlich komplexe Wirklichkeit, die nur durch stark vereinfachende Modelle rechnerisch erfasst werden kann.

Schubbeanspruchung

Ein Mass für die Schubbeanspruchung ist die Schubspannung τ . Sie ist eine rechnerische Hilfsgrösse, die mit der Wirklichkeit wenig zu tun hat. τ kann auch als generelles Mass für die schiefen Zug- und Druckkräfte aufgefasst werden, die durch Querkraftbeanspruchung entstehen.

Bei ungerissenen Querschnitten kann die Schubspannung nach der bekannten Formel ermittelt werden:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{b \cdot I}$$

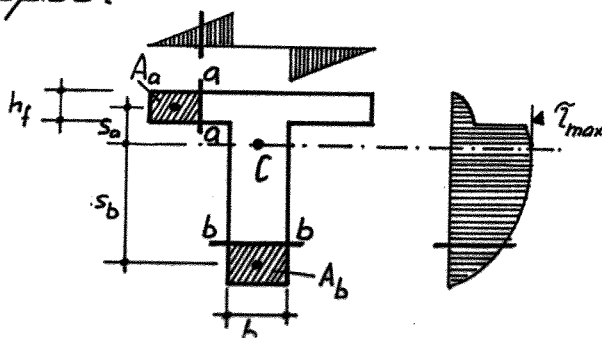
V : Querkraft

b : Breite bzw. Höhe des Schnittes mit τ

S : Statisches Moment des abgeschnittenen Teils bezüglich Schwerpunkt (neutrale Axe für Biegung).

I : Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes bezüglich Schwerpunkt (neutrale Axe für Biegung).

Beispiel:



$$S_{a-a} = A_a \cdot s_a$$

$$b_{a-a} = h_f$$

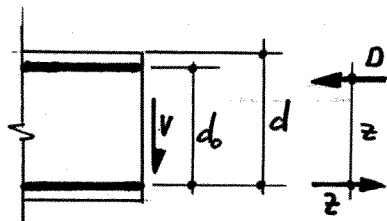
$$S_{b-b} = A_b \cdot s_b$$

$$b_{b-b} = b_w$$

Diese Formel kann grundsätzlich auch auf gerissene Querschnitte (n-Theorie) angewendet werden.

Bei gerissenen Querschnitten und evtl. auch bei ungerissenen Querschnitten ist es oft zweckmäßiger eine nominelle Schubspannung zu definieren:

• Steg:



Möglichkeiten:

$$\tau_w = \frac{V}{b \cdot d} \quad (\text{SIA 162 bei Platten})$$

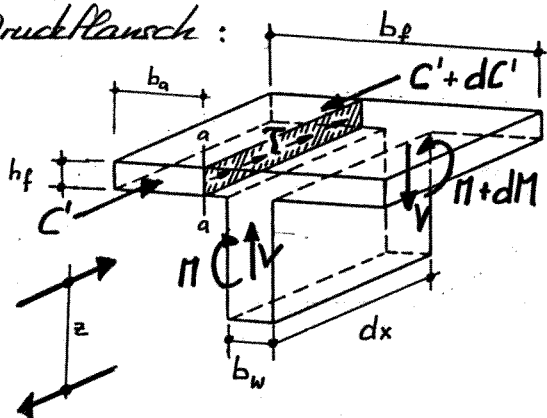
(RL 17 SIA 162/68 [14])

$$\tau_w = \frac{V}{b \cdot d_0} \quad (\text{RL 34 SIA 162/68 [9]})$$

$$\tau_w = \frac{V}{b \cdot z} \quad (\text{SIA 162 bei Balken})$$

mit z = Hebelarm der inneren Kräfte für Biegung
 $\approx 0,9 \cdot d$

• Druckflansch:



Gleichgewicht am abgeschnittenen Teil:

$$\tau_f = \left(\frac{b_a}{b_f} \right) \cdot \frac{dN}{dx} \cdot dx \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{h_f \cdot dx}$$

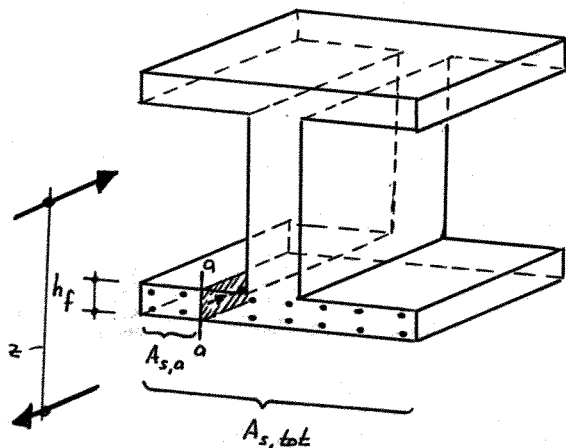
Für schraffierten Schnitt:

$$\tau_f = \frac{V}{h_f \cdot z} \left(\frac{b_a}{b_f} \right) \quad (z \approx 0,9 \cdot d)$$

Für Schnitt längs Steg:

$$\tau_f = \frac{V}{h_f \cdot z} \cdot \frac{1}{z} \left(\frac{b_f - b_w}{b_f} \right)$$

• Zugflansch gerissen:

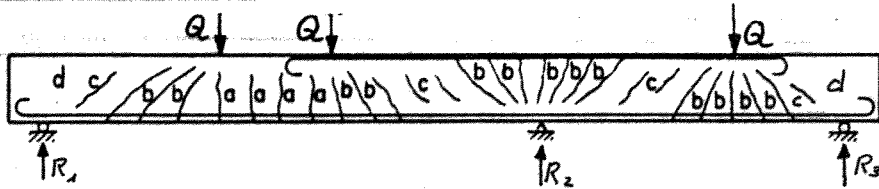


Für schraffierten Schnitt:

$$\tau_f = \frac{V}{h_f \cdot z} \left(\frac{A_{s,a}}{A_{s,tot}} \right) \quad (z \approx 0,9 \cdot d)$$

3.3.1. Schub in Stegen

a) Rissarten



- a: Biegerisse : Tieten in Bereichen vorherrschender Biegebeanspruchung, d.h. in Zonen mit geringer Schubbeanspruchung auf.
- b: Biegeschubrisse: Tieten in Bereichen auf, wo grosse Biegemomente zusammen mit grossen Querkraften wirken. Entwickeln sich aus vertikalen Biege-Anrissen und pflanzen sich unter dem Einfluss der Querkraft schräg gegen die Kräfteinleitungszone (Auflager, Lasten) hin fort. Oft gefährlichste Art von Rissen, dringen weiter als Biegerisse gegen den Druckrand hin vor.
- c: Diagonalschubrisse: Tieten in Bereichen vorherrschender Schubbeanspruchung auf, d.h. in Zonen, wo das Biegemoment gegenüber der Querkraft klein ist, oder wenn der Zugzug vorgespannt ist.
- d: Zone ohne Risse

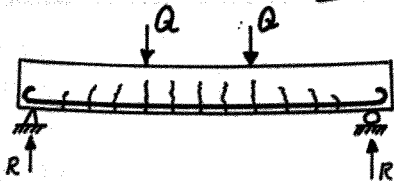
b) Trag- und Bruchverhalten

Die folgenden Betrachtungen dienen dem Verständnis für das in Wirklichkeit sehr komplizierte Schubverhalten von Trägern mit und ohne Schubbewehrung. Aufbauend darauf werden im nächsten Abschnitt vereinfachte Rechenmodelle für die Schubbemessung gezeigt.

Träger ohne Schubbewehrung

Tragverhalten

Mässige Beanspruchung:



Nur Biegerisse, evtl. geringe Ansätze zu Biegeschubbrisen.

Abtragung der Querkraft durch Biegedruckzone, evtl. Risserverzahnung (bei kleinen Rissweiten) und Dübelwirkung der Längsreifen.

Gesteigerte Beanspruchung:

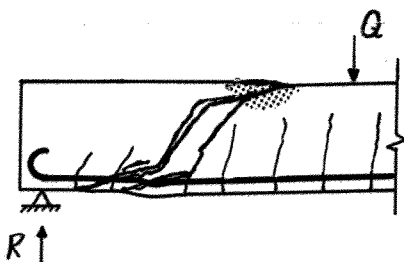
Vordringen von Schrägrissen führt zu baldigem oder sofortigem Bruch.

Vor dem Bruch starke Erhöhung der Zugkraft in Auflagernähe:

→ Bogen- bzw. Sprengwerk mit Zugband. Mehr oder weniger direkte Abstützung der Last zum Auflager.

Schubbrucharten

Biegeschubbruch:



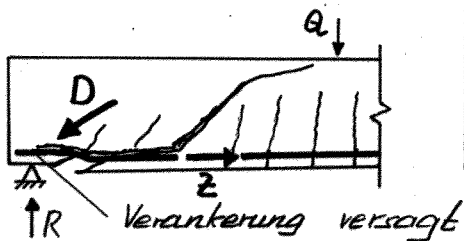
Plötzlicher katastrophaler Bruch ohne Vorankündigung!

Biegeschubbriss wandert mit flacher werdender Neigung schräg nach oben und dringt weit in Biegedruckzone vor. Bruch durch Zerstörung der Biegedruckzone.

Diagonaler Schubbruch:

Diagonallriss dringt in Biegedruckzone (und gegen das Auflager hin) vor. Bruch ähnlich Biegeschubbruch.

Verankerungsbruch:



Bei Trägern ohne Schubbewehrung oft plötzlicher, katastrophaler Sprödbbruch ohne Vorankündigung!

Riss dringt entlang der Längsbewehrung gegen das Auflager hin vor. Bei ungenügender Verankerung (die Längsbewehrung ist durch Bogen- bzw. Sprengwirkung stark beansprucht) wird der Steg über der Längsbewehrung abgeschoben bzw. die Längsbewehrung ausgezogen.

Bruch kann durch sorgfältige konstruktive Ausbildung der Verankerungszonen verhindert werden.

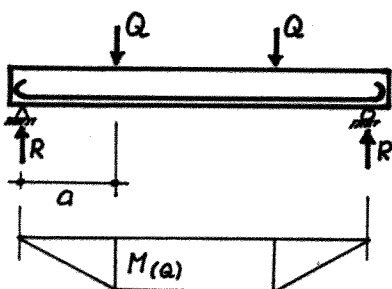
Gefahr eines Schubbruches

Wichtige Parameter bei Schubproblemen sind

– das Momenten-Schub-Verhältnis : $\frac{M}{V \cdot d}$

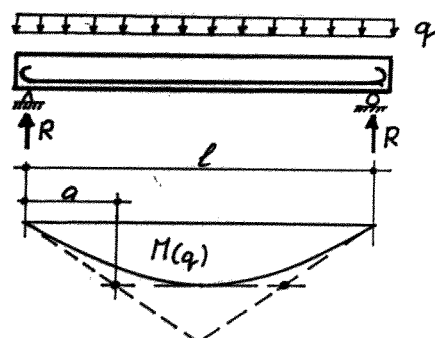
– die Schubspannweite : $a = \frac{M}{V}$

Träger mit Einzellasten:



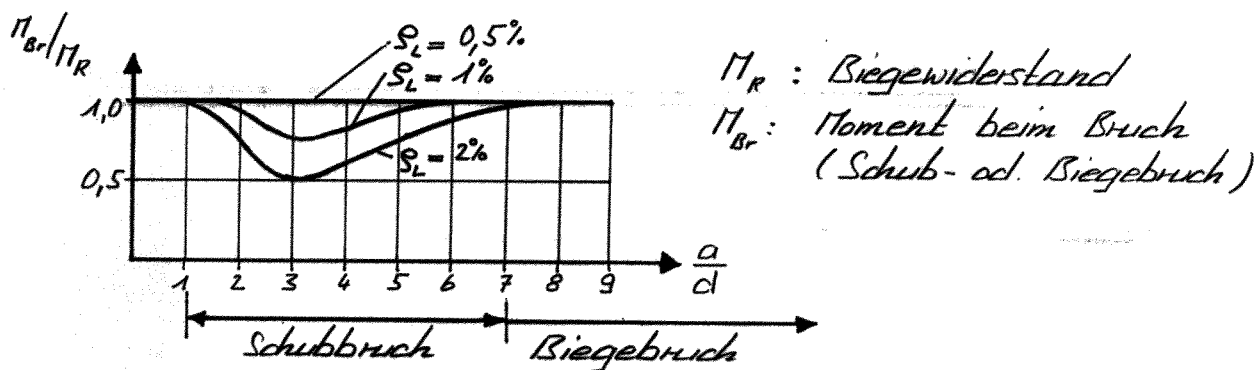
$$a = \frac{M}{F} = \frac{M}{R}$$

Träger mit verteilter Last:



$$a \approx \frac{l}{4} \rightarrow \frac{M}{V \cdot d} = \frac{a}{d} = \frac{l}{4d}$$

Die Gefahr eines Schubbruches ist insbesondere vom Momenten - Schubverhältnis und vom Längsbewehrungsgehalt s_L abhängig:



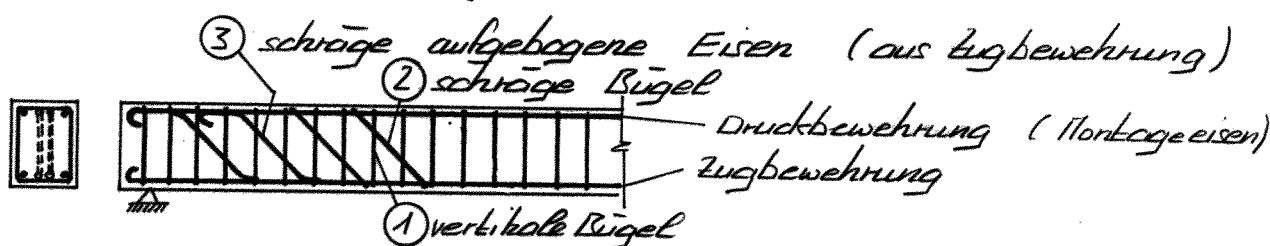
Bruchlast resp. M_{Br} am geringsten für $a/d = 3$, sowohl beim Träger ohne Schubbewehrung als auch beim Träger mit Schubbewehrung.

(Träger mit verteilter Last: $\frac{a}{d} = \frac{l}{4d} = 3 \rightarrow \frac{l}{d} = 12$)

Träger mit Schubbewehrung

Arten der Schubbewehrung

In Stegen sind grundsätzlich 3 verschiedene Arten von Schubbewehrungen möglich:



Trägerverhalten

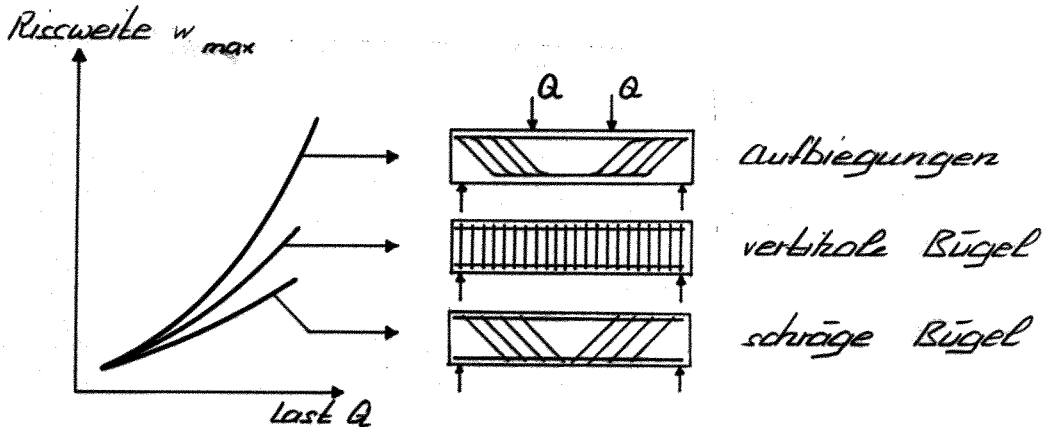
Die folgenden Angaben sind Ergebnisse zahlreicher Schubversuche:

- Wirkung einer Schubbewehrung:
Die Schubbewehrung hat auf die Risslast keinen Einfluss. Bei kleiner Schubbeanspruchung, d.h. solange

sich nur vertikale Risse bilden, ist das Tragverhalten ähnlich wie beim Träger ohne Schubbewehrung. Die Querkraft wird ausschließlich in der Biegedruckzone und, bei kleinen Rissweiten, durch Risseverzahnung abgetragen.

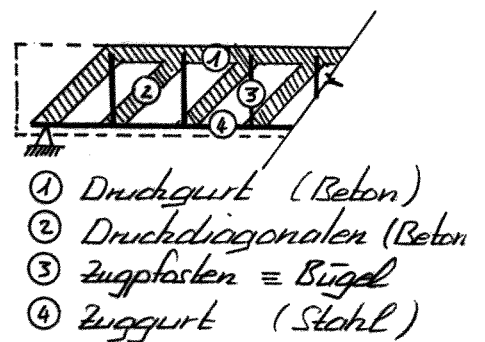
Schubbewehrung kann ihre zugeordnete Funktion erst nach Bildung von schrägen Rissen und den dadurch entstehenden Verformungen übernehmen. Sie hemmt dabei das Öffnen und Ausbreiten der Risse und erhöht den Tragwiderstand erheblich.

- Wirkungsgrad, der drei verschiedenen Schubbewehrungsarten, auf die max. Schubrisweite :

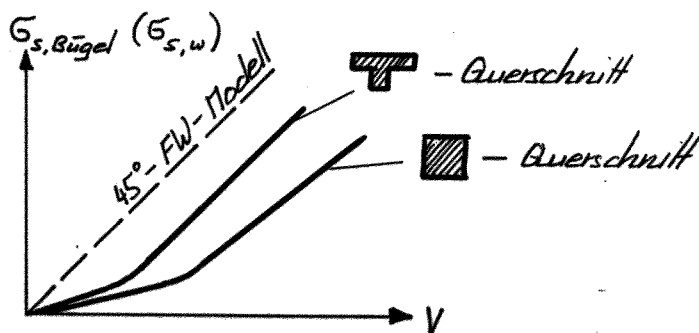


- Beanspruchung von vertikalen Bügeln :

Die Bügelbeanspruchung wird häufig in Vergleich gesetzt zur Beanspruchung von vertikalen Zugfasern in einem 45° -Fachwerkmodell (klassisches FW-Modell, siehe weiter hinten) :



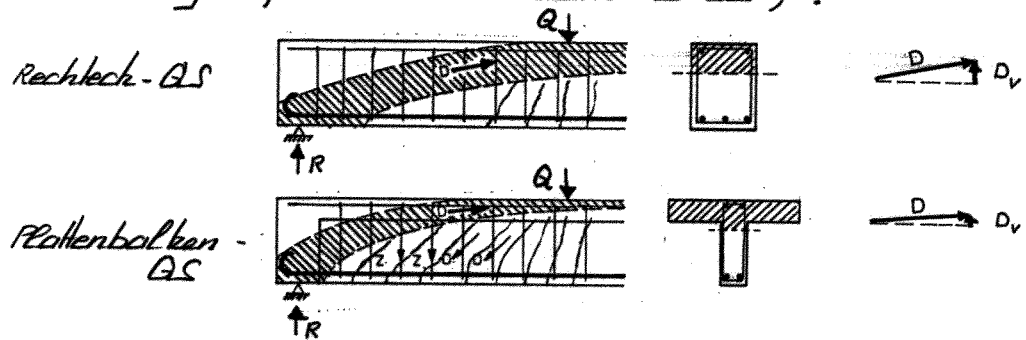
- Abhängigkeit von der Querschnittsform :



Beim T-Querschnitt und besonders beim \square -Querschnitt lassen sich wesentlich geringere Bügelkräfte messen als sich nach dem 45° -Fachwert ergeben.

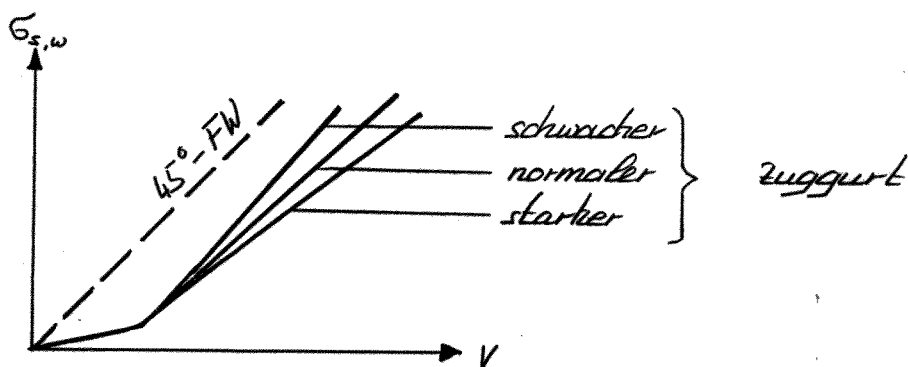
Mögliche Erklärungen:

- * Schubübertragung in Biegedruckzone, d.h. vertikale Komponente der Biegedruckresultierenden (Druckbogen, namentlich beim \square -QS).



- * Druckdiagonalenrichtungen $< 45^\circ$.
- * Evtl. Biegesteifigkeit der Betonröhne zwischen den Biegerissen (v.a. beim \square -QS).
- * Evtl. Dübelwirkung der Längsbewehrung des Zuggurtes.

- Abhängigkeit vom Längsbewehrungsgehalt:



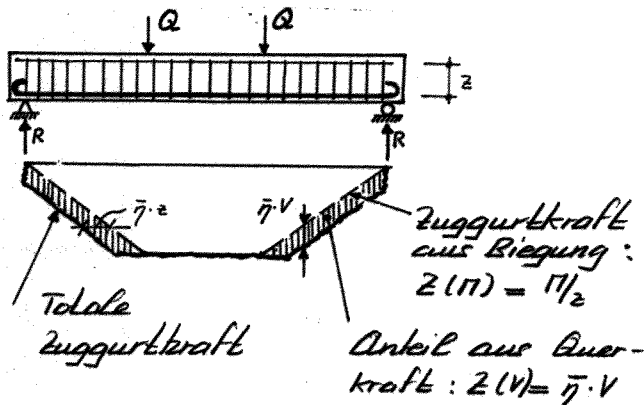
Die Dehnungen des Zuggurtes und somit dessen Steifigkeit beeinflussen die Stützverformungen und somit die Bügelbeanspruchungen.

● Beanspruchung des Zuggurtes :

Durch die facherkartige Querkraftabtragung wird die Zuggurtkraft aus der Biegebeanspruchung $Z(\eta) = \frac{\eta}{2}$ um

$$Z(V) = \bar{\eta} \cdot V$$

erhöht. Das Mass der Erhöhung ($\bar{\eta}$) ist abhängig von der Bügelneigung, dem Anteil der Schubübertragung in der Biegedruckzone und der Druckdiagonaleneneigung.



Grenzwerte für $\bar{\eta}$ aus Versuchen:

$\bar{\eta} = 0,5$: T-QS mit starker Schubbewehrung.

$\bar{\eta} = 1,0$: □-QS mit schwacher Schubbew.

● Schubriseneigungen :

- Mit abnehmendem Verhältnis Bügelbewehrung / Längsbewehrung werden die Risse etwas flacher. (Steg hilft sich selbst).
- Auflagennahe Risse zeigen kleinste Neigung.
- Bei Trägern mit Rechteck-QS bilden sich flachere Schubrisse als bei Trägern mit Plattenbolzen-QS.

● Neigungen der schiefen Druckkräfte :

Die Druckkräfte laufen oft etwas flacher als die Risse, da infolge der Risseverzahnung eine Schubübertragung längs der Risse erfolgt.

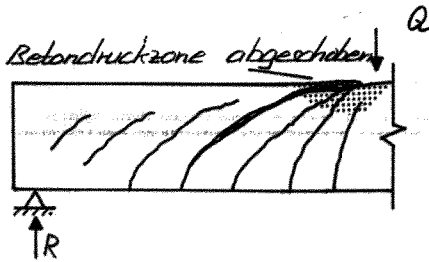
Mögliche Abgrenzung der Neigung α :

$\alpha \approx 25 \div 30^\circ$ bei Rechteck-QS mit schwacher Schubbewehrung.

$\alpha \approx 40 \div 45^\circ$ bei Plattenbolzen-QS mit starker Schubbewehrung.

Schubbrucharten

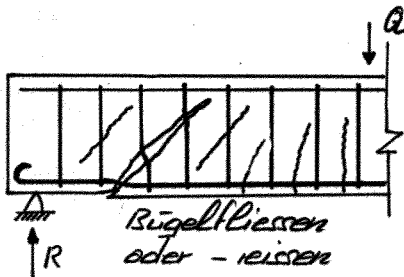
Biegeschubbruch:



Verhältnismässig
duktiler Bruch

Biegeschubrisse dringen flach gegen den Druckrand vor. Nach Fließen der Schub- (und evtl. auch der Längs-) bewehrung wird die Druckzone durch kombinierte Wirkung von Biegedruck und Schub zerstört.

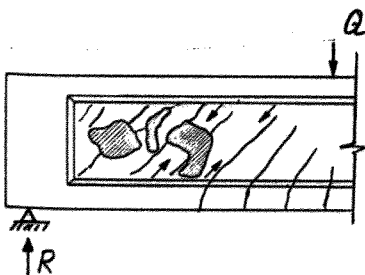
Stegzugbruch:



Verhältnismässig
duktiler Bruch

In Bereichen mit kleinem Moment und grosser Querkraft (nahe Auflager) öffnen sich bei zu geringer Schubbewehrung die Schubrisse stark. Die Schubrisse dringen sowohl in die Druck- als auch in die Zugzone vor. Das Fließen (oder sogar Reißen) der Schubbewehrung führt schliesslich zum Versagen des Balkens.

Stegdruckebruch (Drucktreibenbruch)



Eher spröder Bruch
nach verhältnismässig
geringen Verformungen

Bei I-Querschnitten mit starken Gurten und starker Schubbewehrung ist ein schlagartiges Versagen des

Stegbetons auf schiefen Druck vor Fließen der Schubbewehrung möglich.

Diese Bruchart kann durch Begrenzung der schiefen Druckspannungen vermieden werden (obere Schubspannungsgrenze). Da die schiefen Druckstreben auch Biegebeanspruchungen und Schiebungen erfahren, muss die Begrenzung rel. niedrig angesetzt werden (siehe auch S. 3.3-12).

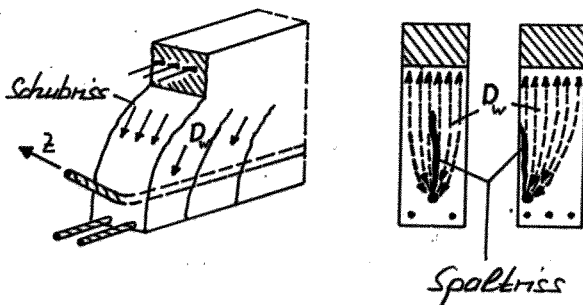
Verankerungsbrüche :

Wie bei Trägern ohne Schubbewehrung kann auch hier bei ungenügender Verankerung der Zuggurtes im Auflagerbereich ein Verankerungsbruch erfolgen.

Ungenügende Verankerung der Bügel führt ebenfalls zum Versagen des Balkens. Diese Bruchart kann durch konstruktive Massnahmen vermieden werden.

Plötzlicher, katastrophaler Sprödbruch ohne Vorankündigung.

Spaltbruch bei Ausbiegungen :



Plötzlicher katastrophaler Sprödbruch ohne Vorankündigung.

Zu kleiner Abbiegeradius und / oder zu geringe seitliche Betonüberdeckung und / oder zu geringe Umschnürung durch Bügel verursacht Spaltbrisse in Steglängsrichtung.

c) Folgerungen für die Schubbemessung

Erfordernis einer Schubbewehrung

(Untere Schubspannungsgrenze)

Die dargestellte Tragwirkung von Trägern ohne Schubbewehrung und die Erkenntnis, dass eine Schubbewehrung erst wirksam wird, wenn sich schräge Risse gebildet haben, führen dazu, dass eine untere Grenze der Schubspannung definiert werden kann, bis zu der - allein von der Querkraftbeanspruchung her gesehen - keine Schubbewehrung erforderlich ist.

Dies ist von praktischer Bedeutung bei Platten, die in den allgemeinsten Fällen nur eine geringe Schubbeanspruchung aufweisen und ohne Schubbewehrung ausgeführt werden. Bei Balken hingegen wird zur Abdeckung von Sekundäreinflüssen praktisch immer eine Bügelbewehrung angeordnet, welche die sog. Mindestschubbewehrung nicht unterschreiten sollte (siehe unten). Balken ohne Schubbewehrung werden nur in Ausnahmefällen ausgeführt.

Die untere Schubspannungsgrenze wird auf Bruchniveau mit

$$\tau_c = 0,7 \div 1,2 \text{ N/mm}^2$$

eher vorsichtig angesetzt.

In SIA 162 wird τ_c wie folgt angegeben:

Betonsorte	25/15	30/20	35/25	40/30	45/35	50/40
f_c [N/mm ²]	10	13	16	19.5	23	26
τ_c [N/mm ²]	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2

Der Gefahr eines Verankerungsbruches im Auflagerbereich von Platten ohne Bügelbewehrung wird meist durch ergänzende Vorschriften (beschränkte Abstufung der Längsbewehrung, Verankerung der Längsbewehrung hinter Auflageraxe u.s.w.) Rechnung getragen.

Mindest-Schubbewehrung bei Balken

Damit nicht fast immer vorhandene sekundäre Einflüsse wie

- Zwängungen aus Schwinden und Temperatur
- Streuung der Betonfestigkeit (z.B. Kiernester)
- Querbiegebeanspruchung
- Torsionsbeanspruchung

zu gefährlichen Rissen bzw. zu Schub- oder Verankerungsbrüchen führen können, sollte in Balken stets - auch bei kleiner Schubbeanspruchung - eine konstruktive Mindestschubbewehrung (mögl. dünne Bügel mit engem Abstand) vorgesehen werden.

Balken ohne jegliche Schubbewehrung sind nur in Ausnahmefällen zuzulassen (z.B. schlanke Spannbettlemente von untergeordneter Bedeutung wie Platten).

Konkrete Angaben sind in Kap. 4 bei den jeweiligen Grundelementen zu finden.

Begrenzung der Steg-Druckspannungen

(obere Schubspannungsgrenze)

Bei hohen Schubbewehrungsgehalten in schmalen Stegen besteht die Gefahr, dass der Beton auf schiefen Druck versagt, bevor die Schubbewehrung fließt. Diese weiter vorn dargestellte Bruchart von auf Schub überbewehrten Querschnitten ist vergleichbar mit der Biegebruchart "Betonbruch vor Stahl-Fließen" infolge $\rho > \rho_{\text{Grenz}}$.

Um diese Schubbruchart zu vermeiden, wird die Spannung in den schiefen Betondruckdiagonalen durch eine vorsichtig angesetzte reduzierte Betonfestigkeit $f_{c, \text{red}}$ begrenzt.

$$\sigma_{c,w}^* \leq f_{c, \text{red}}$$

$\sigma_{c,w}^*$: Spannung in den Betondruckdiagonalen auf Druckniveau.

→ massgebend für die Mindestabmessungen des Betons (Stegbreite, Flanschdicke)

Dabei ist zu beachten, dass der Beton geschwächt wird durch

- Biegebeanspruchungen und Schiebungen der Druckdiagonalen.
- Schubübertragung längs den Schubrissen
- Dübeldwirkung der Schubbewehrung
- allfällige vorhandene injizierte Spannglieder.

Die reduzierte Betondruckfestigkeit $f_{c,red}$ kann deshalb von verschiedenen Parametern abhängig gemacht werden.

In SIA 162 wird für die Hauptspannungsrichtung 45° (einer Schub) bei vertikaler Bügelbewehrung für $f_{c,red}$ folgender Wert angesetzt:

$$f_{c,red} = 0,4 \cdot f_{cw, min}$$

Für andere Hauptspannungsrichtungen und bei schrägen Bügeln sind für $f_{c,red}$ modifizierte Werte anzusetzen.

Die Spannung in den Betondruckdiagonalen σ_{cw} steht in direktem Zusammenhang mit der nominellen Schubspannung τ (siehe Fachwerkmodell).

Für 45° geneigte Druckdiagonalen gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{cw} &= 2\tau && \text{bei vertikalen Bügeln} \\ \sigma_{cw} &= \tau && \text{bei } 45^\circ \text{ schrägen Bügeln} \end{aligned}$$

Versuche bestätigen diesen Zusammenhang mit

$$\begin{aligned} \sigma_{cw} &\approx 2,2\tau && \text{bei vertikalen Bügeln und etwas flacheren } (<45^\circ) \\ &&& \text{Rissen bzw. Druckdiagonalen} \\ \sigma_{cw} &\approx 1,1\tau && \text{bei } 45^\circ \text{ schrägen Bügeln und etwas flacheren } (<45^\circ) \\ &&& \text{Rissen bzw. Druckdiagonalen} \end{aligned}$$

Die Spannung in den Betondruckdiagonalen kann somit durch Begrenzung der nominellen Schubspannung d.h. mit Hilfe der sog. oberen Schubspannungsgrenze $\tau_{c,max}$ kontrolliert werden. Anstelle der Bedingung $\tau_{cw}^* \leq f_{c,red}$ kann somit die folgende Bedingung verwendet werden:

$$\tau^* \leq \tau_{c,max}$$

$$\tau^* = \frac{V_R \cdot V_d}{b_w \cdot z} : \text{Nominelle Schubspannung auf Bruchniveau}$$

$$\tau_{c,max} : \text{Obere Schubspannungsgrenze, womit}$$

$$V_{R,max} = \tau_{c,max} \cdot b_w \cdot z$$

Aus den obigen Zusammenhängen ergeben sich:

$$\text{vertikale Bügel} : \tau_{c,max} = \frac{1}{2} \cdot f_{c,red}$$

$$45^\circ \text{ schräge Bügel} : \tau_{c,max} = f_{c,red}$$

In SIA 162 wird dieser relativ grosse Unterschied beim maximal möglichen Schubwiderstand $V_{R,max}$ zwischen den Fällen "vertikale Bügel" und "45° schräge Bügel" vermindert durch eine unterschiedliche Ansetzung ($\sin \beta$) von $f_{c,red}$:

$$f_{c,red} = \xi \cdot \sin \beta \cdot f_{cw,min}$$

$$\text{mit } \xi = 0,4 \div 0,65$$

β : Neigungswinkel der Bügel

Damit wird die obere Schubspannungsgrenze nach SIA 162:

$$\text{vertikale Bügel} : \tau_{c,max} = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot f_{cw,min}$$

$$45^\circ \text{ schräge Bügel} : \tau_{c,max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \xi \cdot f_{cw,min}$$

Für eine Hauptspannungsrichtung von 45° (reiner Schub) beträgt die reduzierte Betondruckfestigkeit nach SIA 162:

$$\text{vertikale Bügel} : f_{c,red} = 0,4 \cdot f_{cw,min}$$

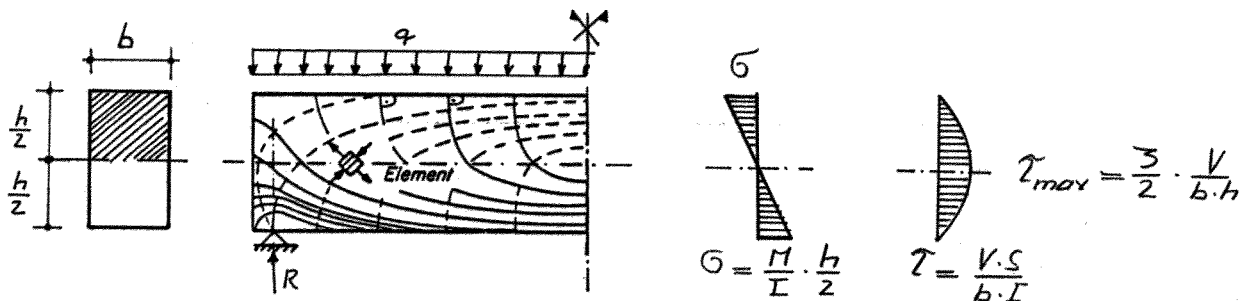
$$45^\circ \text{ schräge Bügel} : f_{c,red} = 0,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_{cw,min}$$

d) Modelle und Berechnungsverfahren

Das Hauptspannungsmodell für ungerissene Träger

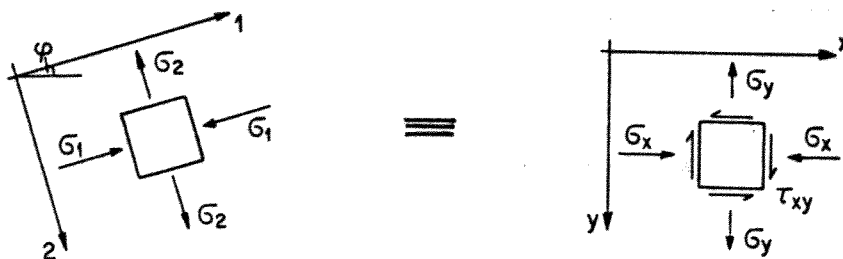
Das Modell erlaubt eine verhältnismässig realistische Beschreibung des Spannungszustandes im ungerissenen Zustand (kleine Beanspruchung oder starke Überdrückung durch Vorspannung oder äussere Normalkraft). Es ermöglicht eine Abschätzung des Risswiderstandes (Biege- und Schubrisse) durch Vergleich der vorhandenen Spannung mit der (allerdings recht unsicheren) Zugfestigkeit des Betons.

Hauptspannungstrajektorien



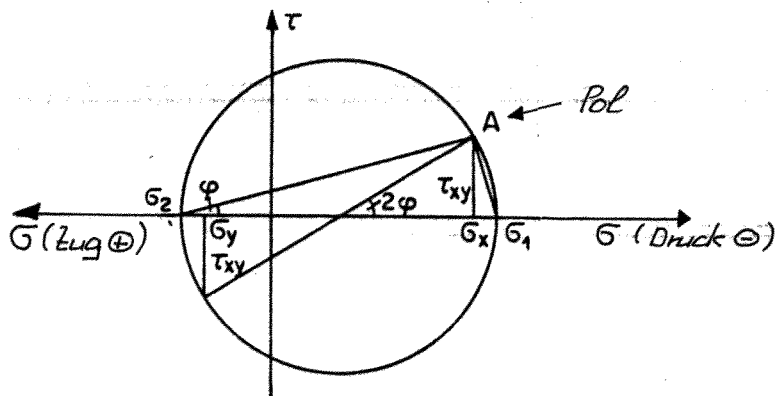
----- Trajektorien der Hauptdruckspannungen
 ————— Trajektorien der Hauptzugspannungen

Beanspruchung des Elementes



σ_1 : Hauptdruckspannung
 σ_2 : Hauptzugspannung

- Beziehungen graphisch: mit dem vereinfachten Mohr'schen Kreis

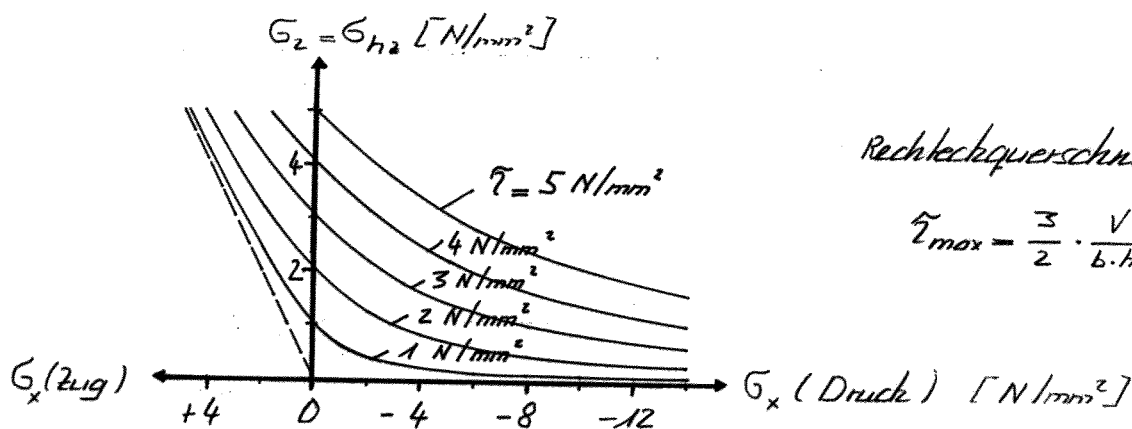


- Beziehungen analytisch:

$$\sigma_{1,2} = + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad \text{tg } 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Hauptzugspannung σ_{h2} falls $\sigma_y = 0$

$$\sigma_2 = \sigma_{h2} = + \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}; \quad \text{tg } 2\varphi = \frac{2\tau}{-\sigma_x}$$



Rechteckquerschnitt:

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b \cdot h}$$

Folgerung

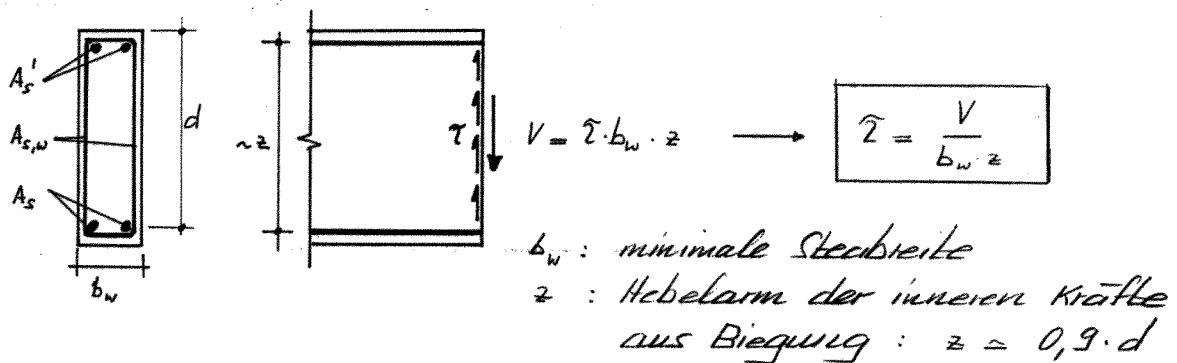
Die Zugfestigkeit von Beton ist nicht nur für den Biegeiswiderstand, sondern ebenso für den Schubiswiderstand verantwortlich!

Modelle für gerissene Träger

Ausgehend von der Idee der fachwerkartigen Schubübertragung bei gerissenen Trägern werden im folgenden drei Modelle dargestellt:

- ① 45°-Fachwerk-Modell
- ② Allgemeines Fachwerk-Modell (SIA 162)
- ③ 45°-Fachwerk-Modell mit Schubübertragung in der Biegedruckzone

Für die nachfolgend dargestellten Modelle wird die Schubspannung als nominelle Grösse wie folgt definiert (siehe auch S. 3.3.-2):



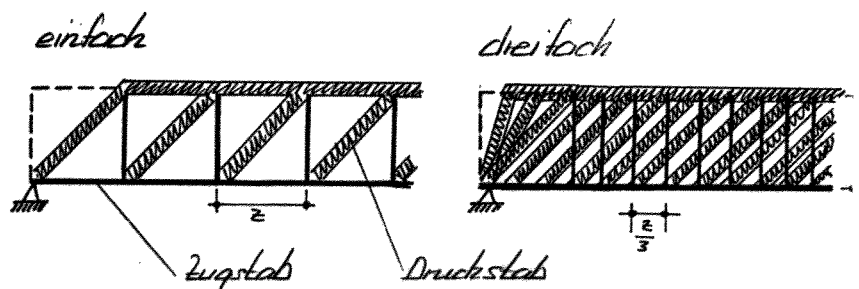
①

45°-Fachwerk-Modell

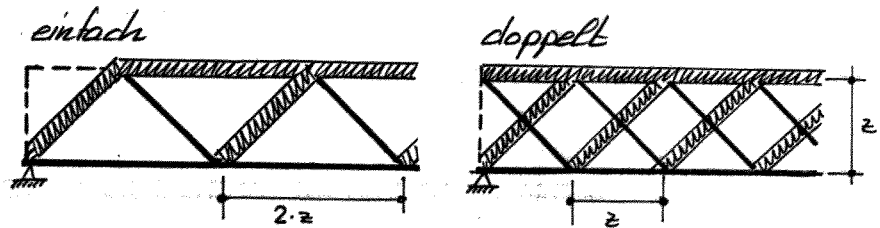
(Entwickelt von Ritter / Mörsch [26])

Ist Grundlage der klassischen Schubbemessung. Es wird angenommen, dass nach voller Rissbildung die gesamte Querkraft fachwerkartig und mit einer Neigung der Druckdiagonalen von 45° abgetragen wird. Eine allfällige Schubübertragung durch die Biegedruckzone sowie durch andere Wirkungen bleibt unberücksichtigt.

Ständertfachwerk bei vertikalen Bügeln

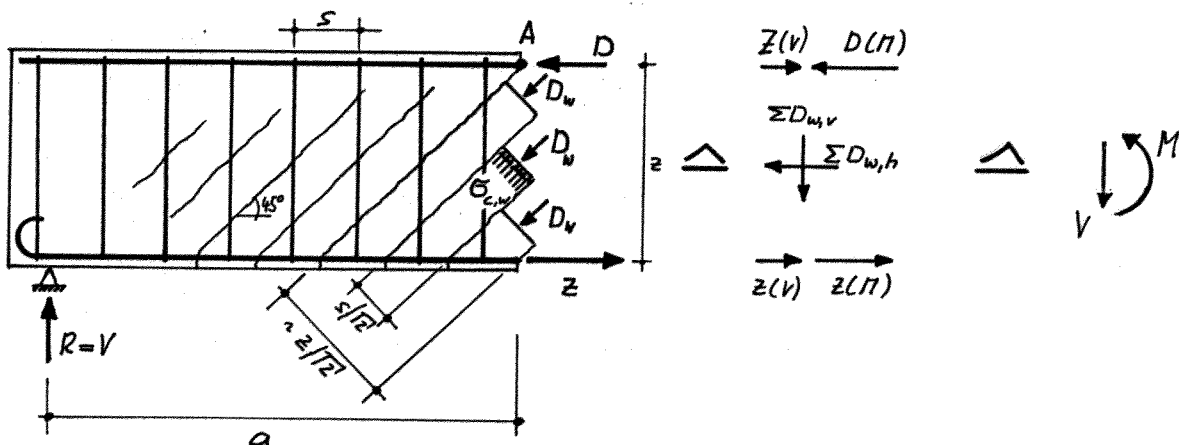


Stiebtachwerk bei
schrägen Bügeln



FW-Modell für vertikale Bügel

Voraussetzung beim FW-Modell: Gurte sollen nur Kräfte in ihrer Richtung aufnehmen können.



• Zug- und Druckgurt:

Momentengleichgewicht bezgl. A:

$$R \cdot a + \Sigma D_{w,h} \cdot \frac{z}{2} - z \cdot z = 0$$

mit $\Sigma D_{w,h} = \Sigma D_{w,v} = V$ wird

$$\Pi + V \cdot \frac{z}{2} - (\underbrace{z(\Pi)}_{\Pi} \cdot z + z(V) \cdot z) = 0 \rightarrow$$

$$z(V) = \frac{V}{2} = \tau \cdot \frac{b_w \cdot z}{2}$$

$$z = \frac{\Pi}{z} + \frac{V}{2}$$

$$D = \frac{\Pi}{z} - \frac{V}{2}$$

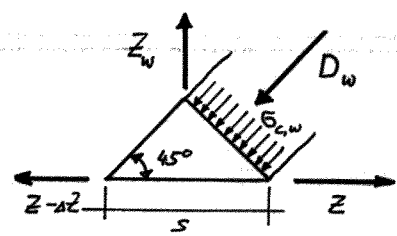
d.h. infolge V wird bei sachwerkartiger ($\alpha = 45^\circ$) Lastabtragung die Zuggurtkraft um $V/2$ erhöht und die Druckgurtkraft um $V/2$ reduziert.

• Betondruckdiagonalen :

$$\Sigma D_{w,v} = V = G_{c,w} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot b_w \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{G_{c,w} = 2 \cdot \frac{V}{b_w \cdot z} = 2\tau}$$

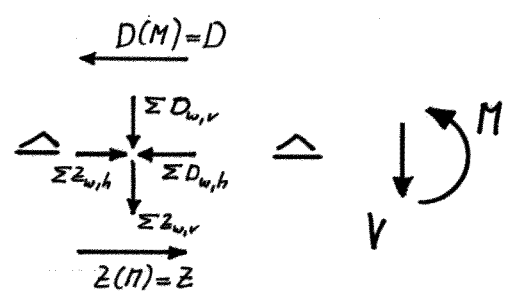
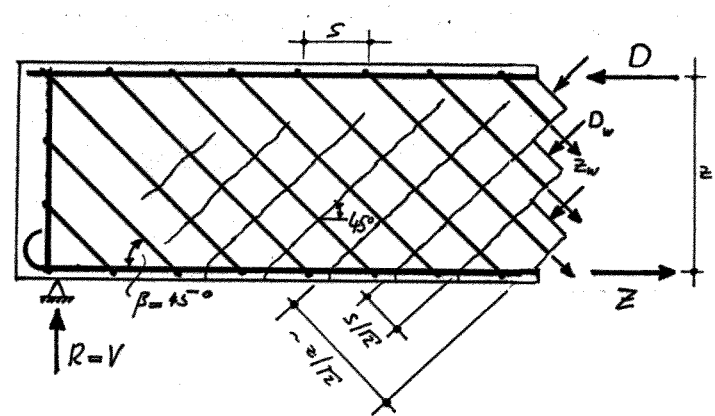
• Bügel :

Element am unteren Balkenrand :



$$z_w = \frac{D_w}{\sqrt{2}} = G_{c,w} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot b_w \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{z_w = V \cdot \frac{s}{z} = \tau \cdot s \cdot b_w}$$

FW-Modell für 45° geneigte Bügel



• Zug- und Druckgurt : $D_{w,h} = z_{w,h}$

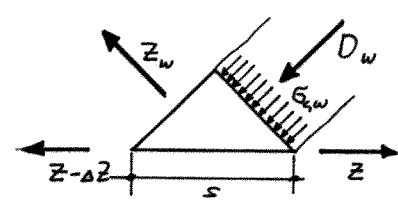
$$\boxed{\begin{aligned} z(V) &= 0 \\ z &= \frac{\eta}{2} \\ D &= \frac{\eta}{z} \end{aligned}}$$

• Betondruckdiagonalen :

$$\Sigma D_{w,v} = \frac{V}{2} = G_{c,w} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot b_w \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{G_{c,w} = \frac{V}{b_w \cdot z} = \tau}$$

• Bügel :

Element am unteren Balkenrand



$$z_w = D_w = G_{c,w} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot b_w \longrightarrow \boxed{z_w = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s}{z} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \cdot s \cdot b_w}$$

Schubwiderstand des Querschnittes

	vertikale Bügel	45° geneigte Bügel
Versagen der Betondruckdiagonalen (obere τ -Grenze)	$V_R = \tau_{c, \max} \cdot b_w \cdot z$	
Versagen der Bügel ($A_{s,w}$)	$V_R = A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s}$	$V_R = \sqrt{2} \cdot A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s}$
Versagen des Zuggurtes (A_s)	$\frac{\sigma_R}{z} + \frac{V_R}{z} = A_s \cdot f_y$	$\frac{\sigma_R}{z} = A_s \cdot f_y$

Bemessung nach dem 45°-FW-Modell

	vertikale Bügel	45° geneigte Bügel
Stegfläche	$b_w \cdot z \geq \frac{V^x}{\tau_{c, \max}}$	
Bügelbewehrung	$A_{s,w} \geq \frac{V^x \cdot s}{f_y \cdot z}$	$A_{s,w} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V^x \cdot s}{f_y \cdot z}$
Zusätzliche Längsbewehrung (Zuggurt)	$A_s(V) \geq \frac{V^x}{z \cdot f_y} \quad ^1)$	$A_s(V) = 0$

$$\text{mit } V^x = \tau^x \cdot b_w \cdot z$$

$\tau_{c, \max}$: obere Schubspannungsgrenze (entspr. SIA 162)

vertikale Bügel	$\tau_{c, \max} = \frac{1}{2} f_{c, \text{red}} = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot f_{c_w, \text{min}}$
45° schräge Bügel	$\tau_{c, \max} = f_{c, \text{red}} = 0,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_{c_w, \text{min}}$

(siehe auch S. 3.3-14 b)

¹⁾ Berücksichtigung durch Verschiebung der σ -Linie bzw. der $z(\sigma)$ -Linie um $\bar{\eta} \cdot z$ mit $\bar{\eta} = 0,5$. (vergl. S. 3.3-28)

Vergleich vertikale Bügel ↔ 45° geneigte Bügel

- Aufwand Bügelbewehrung gleich
45° geneigte Bügel: $\sqrt{2}$ mal kleinere Stahlfläche, dafür $\sqrt{2}$ mal grössere Stablänge
- Stab beton wird bei 45° geneigten Bügeln weniger beansprucht → kleinere Stabweiten möglich.
- keine zusätzliche Beanspruchung der Gurte falls Bügel 45° geneigt sind.

Vertikale Bügel in der Praxis wesentlich häufiger, da einfachere Montage möglich.

Beurteilung des 45° - FW-Modelles

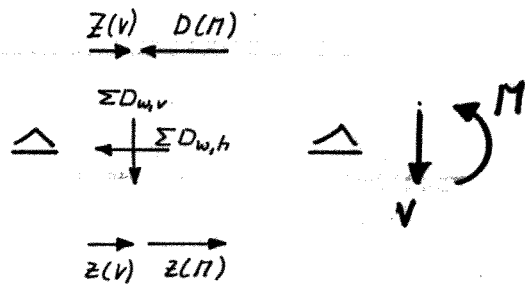
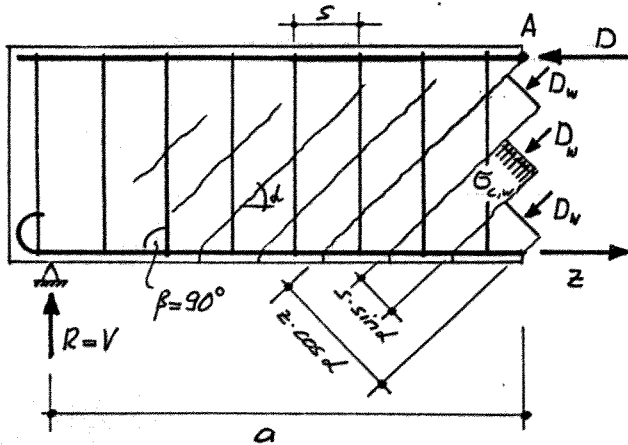
Das Modell liefert für den Stab brauchbare und sichere Resultate, sofern der max. Bügelabstand auf $\sim d/2$ begrenzt wird. Obschon es meist zu einem etwas zu hohen Bewehrungsaufwand führt, findet es dank seiner Einfachheit und Klarheit noch heute Anwendung. Das 45°-FW-Modell ist Grundlage neuerer, etwas modifizierter Modelle.

② Allgemeines FW-Modell ($\alpha \neq 45^\circ$)

(Entspricht SIA 162 (1989), RL 34 SIA 162 (1976) sowie weitgehend CEB/FIP „spezielle Methode“)

Um das 45°-FW-Modell besser der Wirklichkeit anzupassen, lässt man die Neigung der Druckdiagonalen in den an Versuchsträgern gemessenen Grenzen schwanken. Für die Bemessung darf die Neigung innerhalb dieser Grenzen willkürlich angenommen werden.

Einfluss der Druckdiagonalen­neigung auf die Beanspruchung des Schubwandelementes



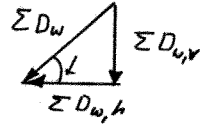
α : Neigung der Druckdiag.
 β : Neigung der Bügel

• Druck- und Zugkraft:

Momentengleichgewicht bezgl. A:

$$R \cdot a + \sum D_{w,h} \cdot \frac{z}{2} - z \cdot z = 0$$

mit $\sum D_{w,v} = V$ und $\sum D_{w,h} = V \cdot \cot \alpha$ wird



$$M + V \cdot \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} - (\underbrace{z(N) \cdot z + z(V) \cdot z}_M) \rightarrow \begin{cases} z(V) = \frac{V}{z} \cdot \cot \alpha = \eta \cdot \frac{b_w \cdot z}{z} \cdot \cot \alpha \\ z = \frac{M}{z} + \frac{V}{z} \cdot \cot \alpha \\ D = \frac{M}{z} - \frac{V}{z} \cdot \cot \alpha \end{cases}$$

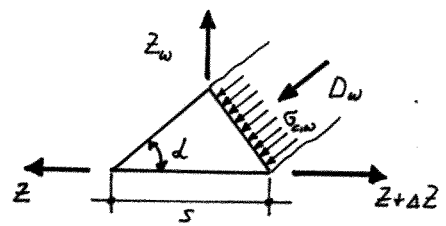
• Betondruckdiagonalen:

$$\sum D_{w,v} = V = G_{c,w} \cdot z \cdot \cot \alpha \cdot b_w \cdot \sin \alpha \rightarrow G_{c,w} = \frac{V}{b_w \cdot z} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cot \alpha}$$

$$\rightarrow G_{c,w} = \frac{V}{b_w \cdot z} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \eta \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cot \alpha}$$

• Bügel:

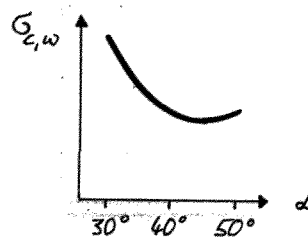
Element am unteren Balkenrand



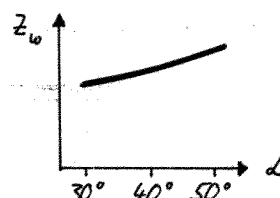
$$z_w = D_w \cdot \sin \alpha = G_{c,w} \cdot s \cdot \sin \alpha \cdot b_w \cdot \sin \alpha \rightarrow z_w = V \cdot \frac{s}{z} \cdot \tan \alpha = z \cdot s \cdot b_w \cdot \tan \alpha$$

● Diskussion: Mit abnehmender Diagonalen­neigung nimmt

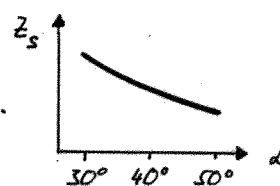
- Beanspruchung der Beton-
druckdiagonalen zu, falls
 $\alpha < 45^\circ$.



- Beanspruchung der Bügel ab.



- Beanspruchung der Gurte zu.



Die Wahl der Diagonalen­neigung hängt von verschiedenen Kriterien ab. Wenn wirtschaftliche Kriterien überwiegen, wird ein kleiner Winkel bevorzugt, womit das Gewicht der teuren Bügel reduziert werden kann. Allerdings wird dieser Vorteil teilweise mit einer stärkeren Längsbewehrung infolge Querkraft und ev. grösserer Stegbreite (höhere Beanspruchung der Betondruckdiagonalen) erkauft.

Der Winkel α wird für keine Schubbeanspruchung wie folgt begrenzt SIA 162

$$\alpha = 25^\circ \div 65^\circ \quad \text{d.h.} \quad \tan \alpha = 0,47 \div 2,14$$

Von praktischer Bedeutung in Stegen ist der Bereich

$$\alpha = 30^\circ \div 45^\circ$$

$$\text{d.h.} \quad \tan \alpha = 0,6 \div 1,0$$

Warnung:

Bei kleinen Winkeln α ergibt sich besonders bei mittleren bis höheren Schubbeanspruchungen eine relativ schwache Bügelbewehrung, und somit die Gefahr zu grosser Schubrisseisen im Gebrauchszustand.

Schubwiderstand des Querschnittes

	vertikale Bügel	Bügel mit Neigung $\beta = 45^\circ \div 90^\circ$
Versagen der Betondruckdiagonalen (obere τ -Grenze)	$V_R = \tau_{c,max} \cdot b_w \cdot z$	
Versagen der Bügel: ($A_{s,w}$)	$V_R = A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s} \cdot \cot \alpha$	$V_R = A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s} (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \sin \beta$
Versagen des Zuggurtes (A_s)	$\frac{\pi_R}{z} + \frac{V_R}{z} \cdot \cot \alpha = A_s \cdot f_y$	$\frac{\pi_R}{z} + \frac{V_R}{z} (\cot \alpha - \cot \beta) = A_s \cdot f_y$

Bemessung nach dem allg. FW-Modell (entspr. SIA 162)

	vertikale Bügel	Bügel mit Neigung $\beta = 45^\circ \div 90^\circ$
Stegfläche	$b_w \cdot z \geq \frac{V^*}{\tau_{c,max}}$	
Bügelbewehrung	$A_{s,w} \geq \frac{V^*}{f_y} \cdot \frac{s}{z} \cdot \frac{1}{\cot \alpha}$	$A_{s,w} \geq \frac{V^*}{f_y} \cdot \frac{s}{z} \cdot \frac{1}{(\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \sin \beta}$
Zusätzliche Längsbewehrung im Zuggurt	$A_s(V) \geq \frac{V^*}{2f_y} \cdot \cot \alpha$ ¹⁾	$A_s(V) \geq \frac{V^*}{2f_y} (\cot \alpha - \cot \beta)$

mit $V^* = \tau^* \cdot b_w \cdot z$

- 1) Berücksichtigung durch Verschiebung der π -Linie bzw. der z -Linie um $\bar{\eta} \cdot z$ mit $\bar{\eta} = 0,5(\cot \alpha - \cot \beta)$. (vergl. S. 3.3-28)

$\tau_{c,max}$: obere Schubspannungsgrenze

vertikale Bügel	$\tau_{c,max} = f_{c,red} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $= 0,4 \cdot f_{cw,min} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
schräge Bügel ($\beta = 45^\circ \div 90^\circ$)	$\tau_{c,max} = f_{c,red} (\cos \alpha + \cot \beta \cdot \sin \alpha) \sin \alpha$ $= 0,4 \sin \beta \cdot f_{cw,min} \cdot (\cos \alpha + \cot \beta \cdot \sin \alpha) \sin \alpha$

siehe auch S. 3.3-14 b)

Beurteilung des allg. FW-Modells

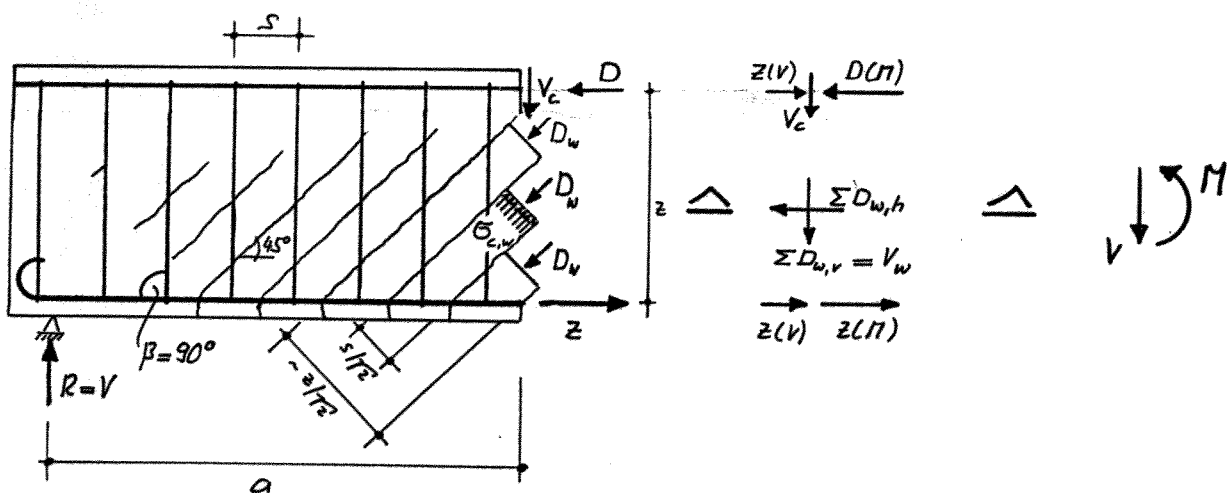
Stimmt wegen der willkürlichen Annahme von α i.o. nur für den rechnerischen Bruchzustand, d.h. nach Fließen von Bügel- und Längsbewehrung und entsprechender Umlagerung der inneren Kräfte, mit der Wirklichkeit überein.

Das Modell ist gut geeignet für Schubbemessung bei Torsion, sowie für interaktive Schubbemessung bei Querkraft und Torsion.

③ 45°-FW-Modell mit Schubübertragung in der Biegedruckzone (Schubriß-Modell)

(Entspricht weitgehend Richtlinie 17 SIA 162 1968 [43], allgemeine Methode im CEB/FIP [16].

Teilweise ähnlich in DIN-Norm [15] und amerikanischer ACI-Norm [17].



V_c : Querkraft, die durch Biegedruckzone abgetragen wird.
 V_w : Querkraft, die durch Bügel + Betondruckdiag. (Fachwerk) abgetragen wird.

Herleitung der Beanspruchungen von Zug- und Druckgurt, der Betondruckdiagonalen, sowie der Bügel analog wie beim 45°-FW-Modell. Anstatt V ist jeweils $V_w = V - V_c$ einzusetzen.

Für den Balken mit vertikalen Bügeln wird:

$$\begin{aligned} z(V) &= \frac{V - V_c}{2} \\ \sigma_{c,w} &= 2 \cdot \frac{V - V_c}{b_w \cdot z} \\ z_w &= (V - V_c) \frac{s}{z} \end{aligned}$$

Schubwiderstand der Biegedruckzone

Für den Anteil V_c wurde durch Auswertung zahlreicher Versuche ein sicherer Wert ermittelt, der auch den Einfluss von in Wirklichkeit häufig etwas flacheren Druckdiagonalen enthält:

$$V_{c,R} = \tilde{\tau}_{c,R} \cdot b_w \cdot z$$

b_w : minimale Stegbreite
 $z \approx 0,9 \cdot d \approx 0,8 \cdot h$

$\tilde{\tau}_{c,R} = \tilde{\tau}_c$	Betonsorte	25/15	30/20	35/25	40/30	45/35	50/40
	f_c [N/mm ²]	10	13	16	19,5	23	26
	$\tilde{\tau}_c$ [N/mm ²]	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2

$\tilde{\tau}_c$: Rechenwert der unteren Schubspannungsgrenze

Schubwiderstand der Bügel

	vertikale Bügel	45° geneigte Bügel	mit Neigung β (45° = 90°)
$V_{w,R} =$	$A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s}$	$A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s} \cdot \sqrt{2}$	$A_{s,w} \cdot f_y \cdot \frac{z}{s} (\cot \beta + 1) \sin \beta$

Schubwiderstand des Querschnittes

	vertikale Bügel	Bügel mit Neigung $\beta = 45^\circ - 90^\circ$
Versagen der Betondruckdiagonalen (obere τ -Grenze)	$V_R = \tau_{c, \max} \cdot b_w \cdot z$	
Versagen der Bügel und der Biegedruckzone	$V_R = V_{c,R} + V_{w,R}$	
Versagen des Zuggurtes	$\frac{\pi_R}{z} + \frac{V_R - V_{c,R}}{z} = A_s \cdot f_y$	$\frac{\pi_R}{z} + \frac{V_R - V_{c,R} (1 - \cot \beta)}{z} = A_s \cdot f_y$

Bemessung nach dem Schubrismodell

- Geringe Schubbeanspruchung :

$\tau^* = \frac{V^*}{b_w \cdot z} \leq \tau_c$: In diesem Fall ist kein Nachweis einer Schubbewehrung erforderlich. In Balken ist aber eine konstruktive Mindestbügelbewehrung vorzusehen (\rightarrow Grundelemente).

- Mittlere und hohe Schubbeanspruchung :

$$\tau^* = \frac{V^*}{b_w \cdot z} > \tau_c :$$

	vertikale Bügel	Bügel mit Neigung $\beta = 45^\circ - 90^\circ$
Stegfläche	$b_w \cdot z \geq \frac{V^*}{\tau_{c, \max}}$	
Bügelbewehrung	$A_{s,w} \geq \frac{V^* - V_{c,R}}{f_y} \cdot \frac{s}{z}$	$A_{s,w} \geq \frac{1}{(\cot \beta + 1) \sin \beta} \cdot \frac{V^* - V_{c,R}}{f_y} \cdot \frac{s}{z}$
Zusätzliche Längsbewehrung (Zuggurt)	$A_s(V) \geq \frac{V^* - V_{c,R}}{z \cdot f_y}$ ¹⁾	$A_s(V) \geq \frac{V^* - V_{c,R} (1 - \cot \beta)}{z \cdot f_y}$ ¹⁾

$$\text{mit } (V^* - V_{c,R}) = (\tau^* - \tau_c) \cdot b_w \cdot z$$

1) Berücksichtigung durch Verschiebung der π -Linie bzw. der $z(\pi)$ -Linie um $\bar{\eta} \cdot z$ mit $\bar{\eta} = 0,5 (1 - \cot \beta)$. (vergl. S. 3.3-28)

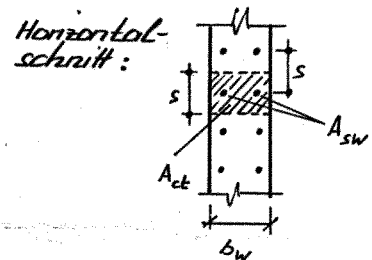
- Hinweise: - Im Bereich von Auflagern sowie von Einzellasten ist die Schubbewehrung in demjenigen BS nachzuweisen, welcher vom Rand der Auflagers resp. der Last den Abstand $z/2$ bzw. $(z/2 \cdot \cot \alpha)$ hat.
- Einwandfreie Verankerung der Bügel ist sehr wichtig!

Konstruktive Mindestschubbewehrung

In Trägerlagen ist immer eine Mindestbügelbewehrung mit mögl. kleinem Stababstand ($s \leq 250 \text{ mm}$) einzulegen

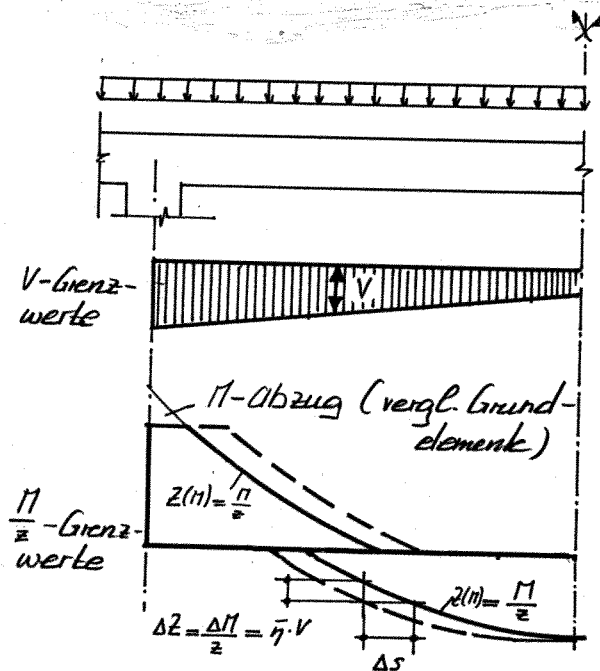
$$\bar{\rho}_{w, \min} = \frac{A_{sw, \min}}{A_{ct}} \geq 0,2\%$$

(SIA 162)



Verschiebung der Zugkraftlinie; (Versatemas)

Der Einfluss der Querkraft auf die Längskraft wird bei der praktischen Bemessung am einfachsten mit Hilfe des sog. Versatemas $\bar{\eta} \cdot z$ berücksichtigt.



Werte für $\bar{\eta}$ bei vertikalen Bügeln

- 45°-FW-Modell : $\bar{\eta} = 0,5$
 Schubrissmodell : $\bar{\eta} \approx 0,5$
 allg. FW-Modell : $\bar{\eta} \approx 0,5 \cdot \cot \alpha$

Versatemas kann bei schrägen Bügeln abgemindert werden.

$$V = \frac{\Delta M}{\Delta z} = \frac{\bar{\eta} \cdot V \cdot z}{\Delta z} \rightarrow \Delta z = \bar{\eta} \cdot z$$

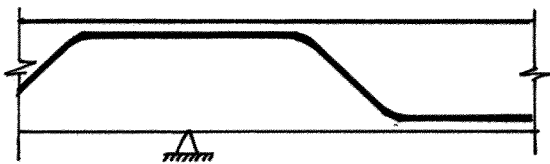
Hinweise:

- Im Bereich von Momentenspitzen (z.B. Zwischenauflager von Durchlaufträgern) benötigt man keine zusätzliche Längsbewehrung infolge Querkraft.
- Längsbewehrung ist v.a. im Endauflagerbereich gut zu verankern.

Aufgebogene Längseisen:

- Problematik:
- Dicke, aufgebogene Längseisen können bei zu kleinen Biegeradien zu Spaltrissen führen → Spaltbruch (vergl. S. 3.3-11).
 - Tragwirkung stellt sich erst nach deutlich höheren Schubverformungen als bei Bügeln ein (vergl. S. 3.3-7).

Aufgebogene Eisen sind deshalb (obwohl sie einen Beitrag zum Schubwiderstand leisten) nur mit Vorsicht, d.h. nur teilweise oder überhaupt nicht mitzurechnen. Dies gilt besonders für dicke Stäbe in größeren Abständen.

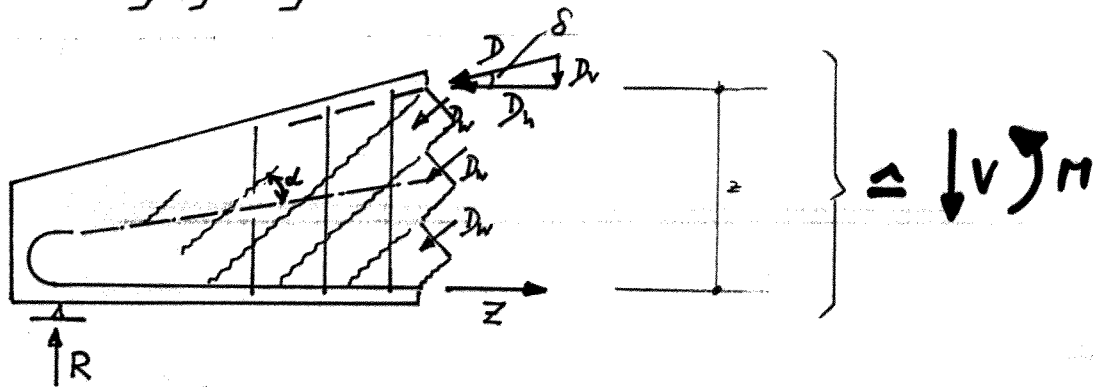


Aufbiegungen mit Vorteil nur als Verankerung eines unten und eines oben liegenden Längseisens benutzen.

Variable Trägerhöhe (Kanten): [47]

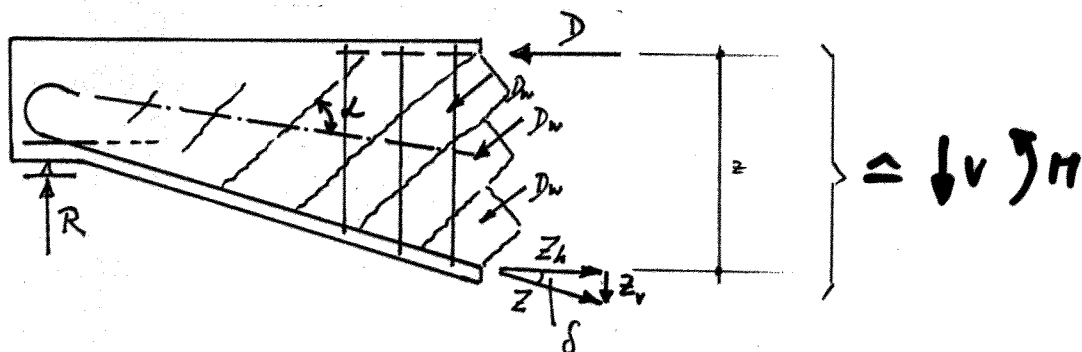
Die Schubbeanspruchung von Balkenstegen wird bei geneigten Druck- und Zuggurten infolge der Vertikal-komponente der geneigten Gurtkräfte verändert. Die Wirkung der geneigten Gurte kann günstig oder ungünstig sein.

Wirkung geneigter Gurte:



$$\Rightarrow D_h \approx \frac{M}{z} - \frac{1}{z} \cdot V \cdot \cot \alpha$$

$$D_v = D_h \cdot \tan \alpha$$



$$\Rightarrow Z_h \approx \frac{M}{z} + \frac{1}{z} \cdot V \cdot \cot \alpha$$

$$Z_v = Z_h \cdot \tan \alpha$$

Querkraft die primär durch den Steg übernommen werden muss:

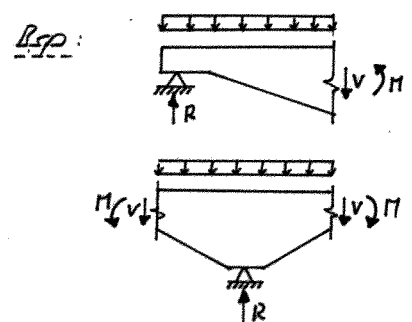
$$V_w = V - D_h \cdot \tan \alpha$$

bzw.

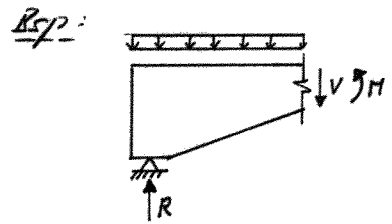
$$V_w = V - Z_h \cdot \tan \alpha$$

Bei der Bemessung kann die Wirkung geneigter Gurte gemäß SIA 162 durch einen zusätzlichen Schubwiderstand $\Delta V_R \approx M_R / z \cdot \sin \alpha$ nach folgenden Regeln näherungsweise berücksichtigt werden:

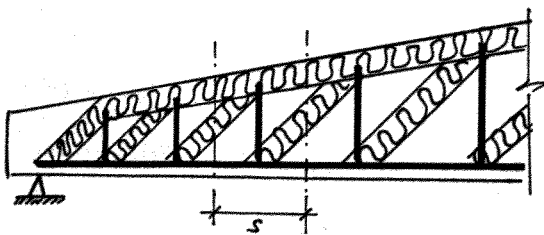
Regel 1: Der Schubwiderstand wird durch Vouten erhöht, wenn d und M in gleicher Richtung zunehmen.





Regel 2: Der Schubwiderstand wird durch Vouten erniedrigt, wenn d und 171 nicht in gleicher Richtung zunehmen.



Die Bemessung bzw. die Ermittlung des Tragwiderstandes kann generell auch anhand von angepassten FW-Modellen erfolgen.



 Druckstrebe
 Zugstrebe

Die Bügel im Wirkungsbereich s einer Druckstrebe haben die resultierende vertikale Stabkraft aufzunehmen. Durch Division der Druckstrebenkräfte mit der Druckfestigkeit des Betons ($f_{ct,red}$ in Diagonalkrebe bzw. f_c in Druckgurtstrebe) kann auf die erforderliche Stabdichte geschlossen werden.

e) Bügelspannungen und Schubrisseweiten im Gebrauchszustand

Die Ermittlung von Spannungen oder Dehnungen der Bügel ist meist schwierig und ungenau. Falls dennoch eine Abschätzung erwünscht ist, soll dazu das Schubrissemodell verwendet werden. Es liefert realistische Werte, die jedoch i.a. auf der sicheren Seite liegen.

Bügelspannung in den Rissen nach dem Schubrissemodell:

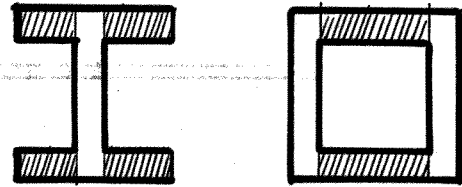
$$\sigma_{s,w} = \epsilon_{s,w} \cdot E_s \approx \frac{V - V_{c,R}}{A_{s,w} \cdot \frac{z}{s}}$$

Zur Abschätzung der zu erwartenden Schubrisseweiten w muss ein Rissabstand s angenommen werden. Bei Vernachlässigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ($\eta = 1$, $\epsilon_{ct} = 0$) gilt:

$$w \approx \epsilon_{s,w} \cdot s$$

3.3.2. Schub in Flanschen (Längsschub)

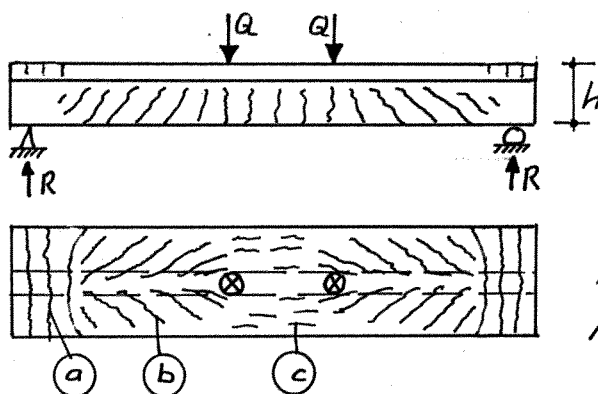
Damit dünne Druck- und Zugflanschen von aufgelösten Querschnitten möglichst vollumfänglich zum Biege widerstand beitragen, sind sie auf Schub zu bemessen und an den Steg anzuschließen.



Problematik und Lösungsmöglichkeiten werden am Beispiel eines symmetrischen T-Trägers, vor allem für den Druckflansch und ergänzend für den Zugflansch aufgezeigt. Bei anderen QS-Formen ist analog vorzugehen.

a) Tragwirkung und Bruchverhalten

Rissbild eines Druckflansches mit Schubbewehrung



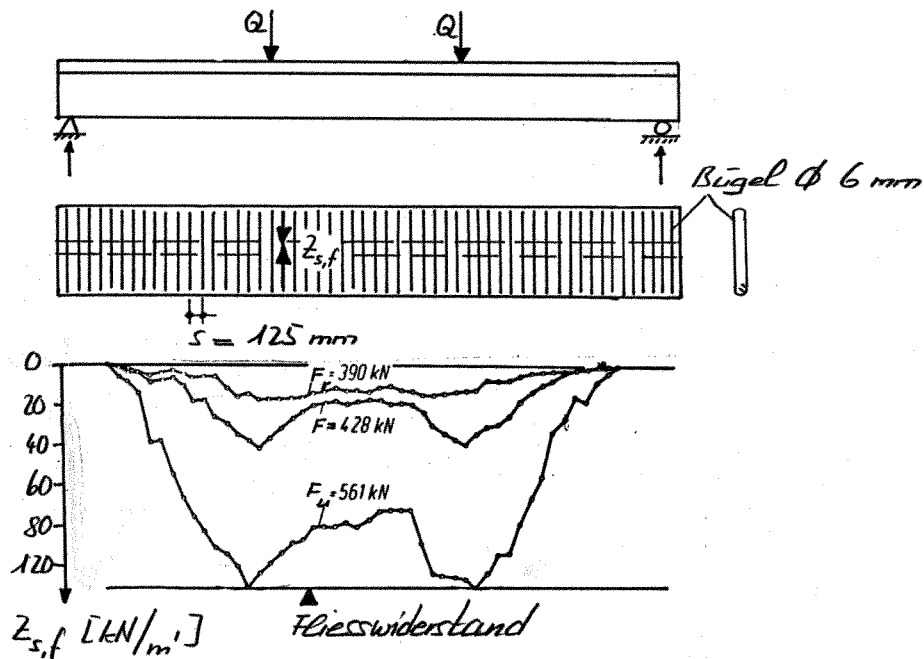
Draufsicht auf die Druckplatte.

- (a) Querrisse: Können in Druckplatten im Auflagerbereich inf. Rahmenwirkung / Eigensteifigkeit des Flansches entstehen (Längszug aus Biege Wirkung).
- (b) Schräge Schubrisse: Beginnen etwa im Abstand h vom Auflager. Werden gegen Einzellast hin flacher.
- (c) Längsrisse: Im Bereich reiner Biegung können vereinzelt Längsrisse auftreten.

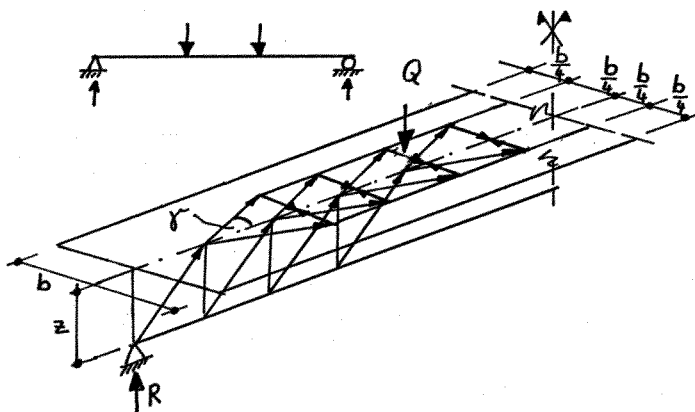
Tragverhalten

Das oben gezeigte Risebild veranschaulicht, dass im Flansch eine Ausbreitung der vom Auflager her zunehmenden Biegedruckkraft erfolgt.

Ein Beispiel aus Versuchen [45] zeigt die Beanspruchung einer konstanten Querbewehrung (Bügel) in einem Druckflansch.



Die gemessenen Bügelbeanspruchungen können mit guter Näherung durch ein räumliches Fachwerkmodell erklärt werden [45]:



Für die Neigung der schrägen Druckkräfte d.h. für den Kraftausbreitungswinkel im Druckflansch wurde

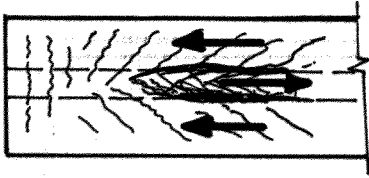
$$\tan \gamma = 0,4 (22^\circ) \div 0,5 (27^\circ)$$

festgestellt.

Die Beschreibung des Tragverhaltens mit Hilfe von Hauptzugspannungen nach klassischer Balkentheorie führt zu solchen Ergebnissen und wird hier deshalb nicht behandelt.

Schubbrucharten

Abscheren der Platte vom Steg:



Duktiler Bruch
nach Fließen der
Auerbewehrung

Tritt auf bei zu schwacher Flanschquerbewehrung.

Druckstiebenbruch:

In sehr dünnen Flanschen mit gleichzeitig starker Flanschquerbewehrung kann wie in Stegen ein Versagen des Betons durch schiefen Druck vor Fließen der Auerbewehrung auftreten.

Die Bruchart ist eher von geringer Bedeutung und kann durch eine Begrenzung der schiefen Betondruckspannungen (wie in Stegen) ausgeschlossen werden.

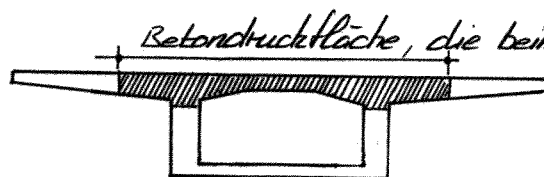
Verankerungsbrüche:

Lasen sich durch gute konstruktive Durchbildung vermeiden.

Erfordernis einer Schubbewehrung (Zug- und Druckflansch)

Vom Flansch ist mindestens der Teil auf Schub an den Steg anzuschließen, der für ausreichenden Biege widerstand in Längsrichtung erforderlich ist.

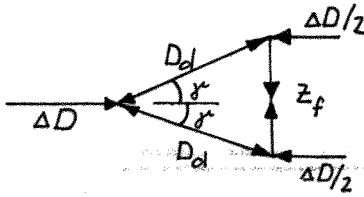
Beispiel: Brückenquerschnitt mit weit ausladenden Konsolen:



Betondruckfläche, die beim Biege widerstand mitgerechnet wird, ist auf Schub anzuschließen.

Es lässt sich, ähnlich wie bei Schubbeanspr. von Stegen, eine untere Schubspannungsgrenze definieren, bis zu der - allein von der Querkraftbeanspruchung her gesehen - keine Schubbew. erforderlich, jedoch eine konstr. Mindestbewehrung einzulegen ist.

$$D_w = \frac{V}{\sin \alpha} ; \quad \Delta D = D_w \cdot \cos \alpha = \frac{V}{\tan \alpha}$$



$$z_f = \frac{\Delta D}{2} \cdot \tan \gamma = \frac{V}{2} \cdot \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha}$$

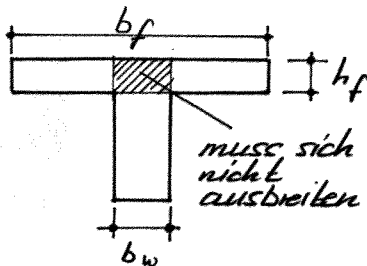
$$\text{Näherung: } z \approx \frac{V}{4} \quad (\alpha \approx 40^\circ; \gamma \approx 25^\circ)$$

z_f : Querkraft im Flansch auf die Länge $\approx 1/\tan \alpha$

Querkraft pro Bügel (mehrfaches Fachwerk)

$$z_f (\text{Bügel}) = \frac{V}{2} \cdot \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha}{z} \cdot s = \frac{V}{2} \cdot \frac{s}{z} \cdot \tan \gamma$$

Unter der Berücksichtigung, dass sich der Anteil direkt über dem Steg nicht ausbreiten hat, folgt:



$$z_f (\text{Bügel}) = \frac{V}{2} \cdot \frac{s}{z} \cdot \left(\frac{b_f - b_w}{b_f} \right) \cdot \tan \gamma$$

$$= \tilde{z}_f \cdot \tan \gamma \cdot h_f \cdot s$$

mit: $\tan \gamma = 0,4 \div 0,5$ (Druckflansch)

s : Flanshbügelabstand

$$\tilde{z}_f = \frac{V}{h_f \cdot z} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b_f - b_w}{b_f} \right) \quad (\text{vergl. S.3.3-2})$$

Versatzmass als Folge des räumlichen FW-Modells

Gegenüber dem Trägerquerschnitt mit der Querkraft V ist die hergeleitete Flanschquerkraft in Druckflanschen von T-Trägern um ein Versatzmass v in Richtung des zunehmenden Momentes verschoben.

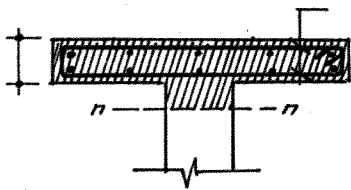
$$v = \frac{z}{2 \tan \alpha} + \frac{b_f}{4 \tan \gamma}$$

Praktischer Näherungswert mit $\alpha \approx 40^\circ$ und $\gamma \approx 25^\circ$

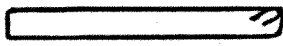
$$v \approx 0,6 (z + b_f)$$

Bemessung der Querkzugbewehrung im Druckflansch

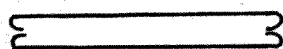
$$A_{s,f} (\text{Bügel}) \geq \frac{z_f^* (\text{Bügel})}{f_y} = \frac{v^*}{f_y} \cdot \frac{s}{z} \cdot \frac{1}{z} \left(\frac{b_f - b_w}{b_f} \right) \cdot \tan \gamma$$



meist zweischneitig



Bügel oder

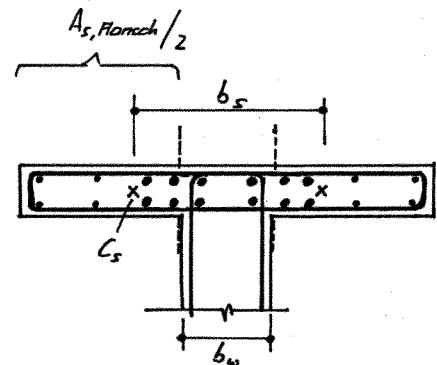
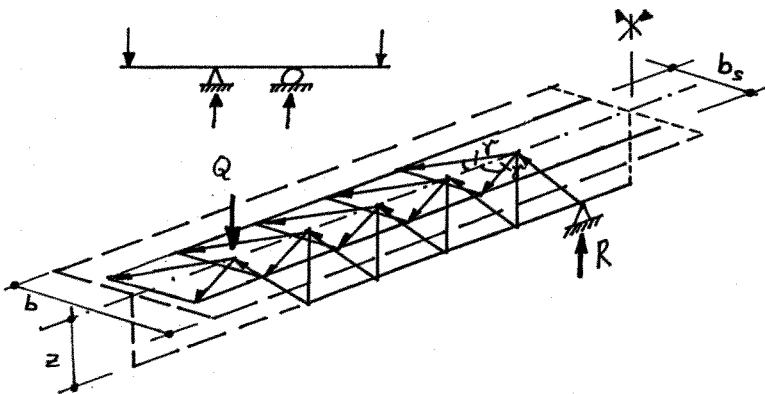


2 Eisen mit Endhaken

$A_{s,f}$ um Versohmass v gegenüber Schnitt mit v^* anordnen.

c) Besonderheiten des Zugflanschschlusses

Anstelle der Kraftausbreitung in die Betonfläche des Druckflansches, erfolgt hier eine Kraftausbreitung zu den Längseisen des Zugflansches:



Da in praktischen Fällen die Längsbiegebewehrung möglichst über bzw. unter dem Steg anzuordnen ist, verursacht die Kraftausbreitung in Zugflanschen meist bescheidenere Querkzugkräfte als in Druckflanschen. (Querkzugkräfte werden nur durch den ausserhalb des Steges liegenden Teil der Längsbewehrung verursacht.)

C_s : Schwerpunkt der Längseisen in der auskragenden Platte.
 b_s : Abstand der Schwerpunkte.

Lit: [46]

Der Ausbreitwinkel im Zugflansch ist aufgrund von Versuchen anzunehmen mit:

$$\underline{\tan \gamma = 0,6 \div 0,7}$$

{ Größer als in Druckflanschen inf. geringerer Dehnbarkeit des Zuggurtes, Auftreten v. Biegeisen.

Die Querkraft ist im Zugflansch um ein Versatzmaß v in Richtung des abnehmenden Momentes verschoben:

$$v = \frac{z}{2 \tan \alpha} + \frac{b_s}{2 \tan \gamma}$$

Praktischer Näherungswert:

$$v \approx 0,4 \cdot (z + 2 b_s)$$

Für die Bemessung der Querkraftbewehrung im Zugflansch ergibt sich folg. Beziehung:

$$A_{s,f} (\text{Bügel}) \geq \frac{V^*}{f_y} \cdot \frac{s}{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{s,Flansch}}{A_{s,tot}} \cdot \tan \gamma$$

$A_{s,tot}$: Gesamtfläche der gezogenen Längseisen.

$A_{s,Flansch}$: Fläche der Längseisen in beiden auskragenden Flanschen.

d) Längsschub mit Querbiegung

siehe Lit. [45], [46]

3.4. Torsion

Vorbemerkung

Bei Torsionsbeanspruchungen kann wie folgt unterschieden werden:

- Gleichgewichtstorsion: Resultiert aus der Erfüllung von Gleichgewichtsbedingungen (z.B. exzentrisch belasteter Kragarm).
- Verträglichkeitstorsion: Resultiert aus der Erfüllung von Verträglichkeitsbedingungen (nur bei statisch unbestimmten Systemen, z.B. schief gelagerte Brücke).

Im Falle von Gleichgewichtstorsion kann die Lastabtragung nur durch ausreichende Torsionssteifigkeit gewährleistet werden. Fehlt eine entsprechende Torsionsbewehrung, dann führt dies zum Bruch.

Im Falle von Verträglichkeitstorsion ist die Lastabtragung auch bei torsionsweichen Trägern gewährleistet, da meist Schnittkraftumlagerungen (Torsion \rightarrow Biegung) möglich sind. Fehlt die Torsionsbewehrung, dann führt dies ev. zu schlechtem Gebrauchverhalten. (Rissbildung und Verformungen aus Torsion und vergrößerter Biegung.)

Torsion kommt meistens zusammen mit anderen Beanspruchungsarten (M , V , N) vor. Im folgenden wird vorerst die reine Torsion behandelt und anschließend auf kombinierte Beanspruchungen bzw. auf Interaktionsprobleme eingegangen. Die Betrachtungen beschränken sich auf die für Torsionsstäbe wichtigere St.-Verant.-Torsion (keine Wölb-torsion = Flanschbiegung).

3.4.1. Stäbe aus ungerissenem Material unter reiner Torsion

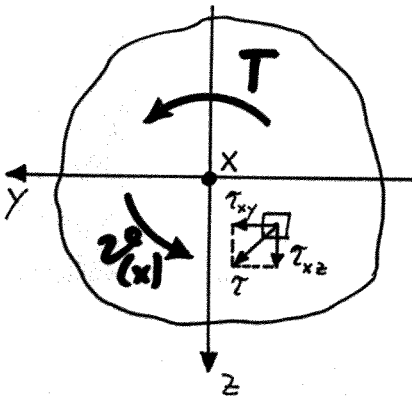
Früher waren Schubspannungsberechnungen am ungerissenen Querschnitt Grundlage der klassischen Torsionsbemessung im Stahlbeton. Dabei wurden die Hauptzugspannungen mit entsprechender Bewehrung "abgedeckt".

Heute sind für die Bemessung der Torsionsbewehrung wirklichkeitsnähere Modelle und Verfahren (Fachwertmodelle) gebräuchlich.

Trotzdem können durch die Betrachtung von Torsionsstäben aus ungeradem Material grundlegende Erkenntnisse gewonnen werden.

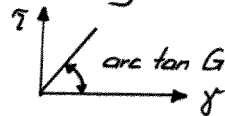
a) Differentialgleichung u. Membrananalogie

Torsionsstab



Annahmen und Voraussetzungen:

1. Die Querschnittsform bleibe erhalten
2. Unbehinderte, längs der Stabaxe konstante Verwölbung der Querschnitte ($G_x = 0 \rightarrow$ St.-Venant-Torsion).
3. Linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Schiebung.



Die 2. Annahme bedeutet i.a. auch:

- keine Veränderung des Torsionsmomentes und der Querschnittsform längs der Stabaxe, somit
- konstanter Verdrehungswinkel pro Längeneinheit (Verwindung $\frac{d\varphi}{dx} = \text{konstant}$).

- Verwindung: (Verdrehung pro Längeneinheit)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GK}$$

- T: Torsionsmoment
- GK: Torsionssteifigkeit (Torsionsmoment für Einheitsverwindung)
- K: St.-Venant'sche Torsionskonstante
- G: Schubmodul

- Differentialgleichung für Torsion:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G \frac{d\varphi}{dx}$$

$\phi(y,z)$: Spannungsfunktion, konstant entlang dem Querschnittsrand.

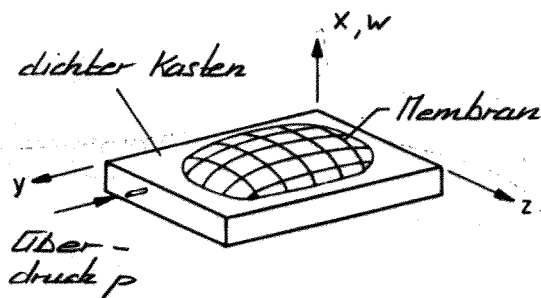
• Schubspannungen:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} ; \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Die resultierende Schubspannung τ hat die Richtung der Tangente an die Niveaulinie $\phi(y, z) = \text{konst.}$

Die Grösse von τ entspricht der "Neigung" von $\phi(y, z)$ in Richtung einer Normalen n zur Niveaulinie, $\tau = \frac{\partial \phi}{\partial n}$.

Membran



Über einer Öffnung in einem ebenen Bleche spanne sich eine mit dem Überdruck p belastete dünne Membran (z.B. Seitenhaut \rightarrow "Seitenhautgleichnis" von Prandtl). Die Zugspannung σ ist konstant über die ganze Membran.

Differentialgleichung der Durchbiegung $w(y, z)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{p}{\sigma}$$

Analog zur Differentialgleichung für Torsion. Vollständige Entsprechung für $w(y, z) \hat{=} \phi(y, z)$ und $\frac{p}{\sigma} \hat{=} 2G \frac{d\vartheta}{dx}$

Analogie Torsionsproblem - Membranproblem

	Torsion	Membran
Differentialgleichung	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = - 2G \frac{d\vartheta}{dx}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{p}{\sigma}$
Randbedingung	$\phi = \text{konstant} (\phi = 0)$	$w = \text{konstant} (w = 0)$
Ableitungen	$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ $\tau_{xz} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$: Neigung der Membran in z-Richtung $\frac{\partial w}{\partial y}$: Neigung der Membran in y-Richtung

Es entsprechen sich folgende Größen:

Torsionsstab	Membran
Form des Querschnittes	↔ Umrisse der Membran-Öffnung
Spannungsfunktion	↔ Durchbiegung
Richtung der Schubspannung	↔ Tangente an die Niveaulinie
Betrag der Schubspannung	↔ Neigung der Membran
Torsionsmoment	↔ 2-faches Volumen der Membran

Zusätzliche Feststellung:

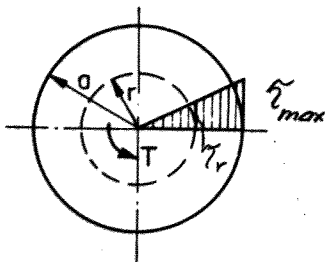
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GK} \rightarrow K = \frac{T}{G \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}$$

proportional zu 2.V
 Einheitsverwindung
 K proportional zum zweifachen Membranvolumen

Da man sich von der Form der Membran über einem gegebenen Umriss eine gute Vorstellung machen kann, gibt die Membrananalogie rasch plausible Hinweise zum Torsionsverhalten eines Stabes.

b) Voll-Querschnitte

Kreis



$$\tau_r = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot r = \frac{T}{K} \cdot r$$

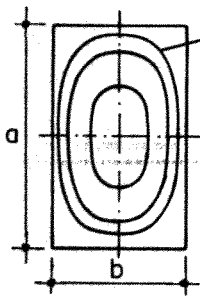
$$\tau_{\max} = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot a = \frac{T}{K} \cdot a = \frac{T}{W_T}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot K} \quad : \text{Verwindung}$$

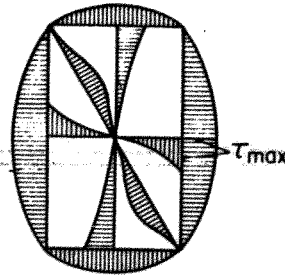
$$K = \frac{\pi \cdot a^4}{2} \quad : \text{Torsionskonstante } [m^4]$$

$$W_T = \frac{\pi a^3}{2} \quad : \text{Torsions-Widerstandsmoment } [m^3]$$

Rechteck



Niveaulinien der Membran $\hat{=}$ Richtung der result. Schubspannung



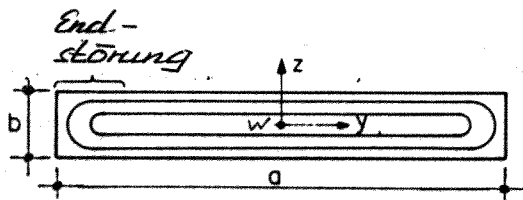
Neigung der Membran $\hat{=}$ Qualitat. Verlauf der result. Schubspannungen

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot K} \quad (\text{Verwindung})$$

	$b = a$	$b < a$	$b \ll a$
K	$\frac{1}{7,11} \cdot a^4$	$\frac{1}{3} ab^3 (1 - 0,630 \frac{b}{a} + 0,052 \frac{b^5}{a^5} + \dots)$	$\frac{1}{3} \cdot ab^3$
W_T	$\frac{1}{4,81} \cdot a^3$	$\frac{1}{3} ab^2 (1 - 0,630 \frac{b}{a} + 0,250 \frac{b^2}{a^2} + \dots)$	$\frac{1}{3} ab^2$

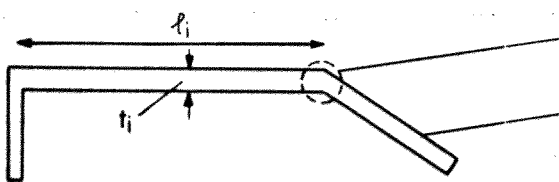
langes schmales Rechteck: $b \ll a$



Membranfläche = Zylinderfläche

$$K \approx \frac{ab^3}{3}; \quad W_T \approx \frac{ab^2}{3}$$

Dünnwandiger offener Querschnitt



Störung für K unbedeutend.

Querschnitt aus langen schmalen Rechtecken zusammengesetzt.

Unter der Annahme, dass die Querschnittsform erhalten bleibt, erfährt jeder Teilquerschnitt die gleiche Verwindung und Ver-

Drehung wie der Gesamtquerschnitt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GK} = \frac{T_i}{GK_i} \quad \rightarrow \quad T_i = \frac{K_i}{K} \cdot T$$

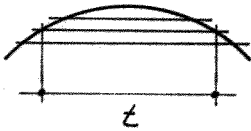
Gesamt- Teil-
QS QS

wobei $K = \sum K_i = \frac{1}{3} \sum l_i \cdot t_i^3$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_T} = \frac{T}{K} \cdot t_{\max}$$

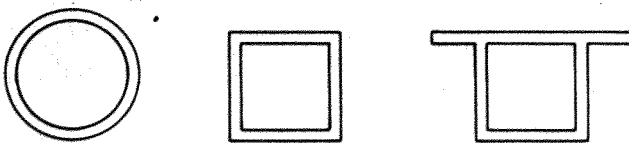
Grösste Schubspannung an breiterer Stelle!

Membrananalogie:

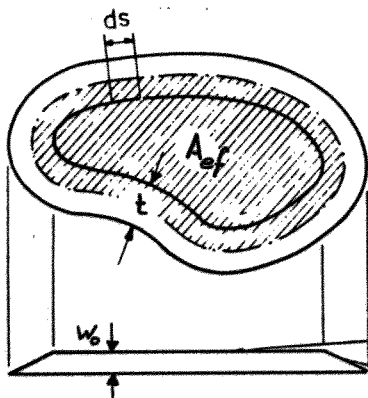


Je grösser t , desto grösser die Membranneigung und damit der Betrag der Schubspannung.

c) Hohl-Querschnitte



z.B. gekrümmte Brücke



Die Membran spannt sich vom äusseren zum inneren Rand näherungsweise als Sehne.

A_{ef} : Durch Mittellinie eingeschlossene Fläche.

horizontaler "Deckel", da hier kein τ möglich.

Membran

- Schubfluss: $\tau \cdot t = \frac{T}{2A_{ef}}$; konstant rundherum

- Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2A_{ef} t_{\min}}$$

Grösste Schubspannung an schmalster Stelle!

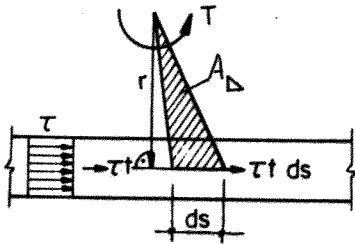
Bredt'sche Formel

- Einfache Herleitung mit Hilfe der Membrananalogie :

$$\frac{w_0}{t} \cong \tau \rightarrow w_0 = \tau \cdot t$$

$$2V \cong T \rightarrow T = 2 A_{ef} \cdot w_0 = 2 A_{ef} \tau \cdot t \rightarrow \tau = \frac{T}{2 A_{ef} t}$$

- Herleitung auch aus stat. Äquivalenz der Wirkungen der τ und von T :



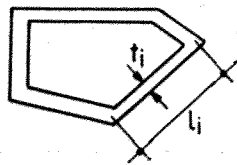
$$T = \int \underbrace{\tau \cdot t}_{\text{konst.}} \cdot \underbrace{ds \cdot r}_{2 A_{ef}} = \tau \cdot t \cdot 2 A_{ef}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T}{2 A_{ef} t}$$

- Torsionskonstante :

$$K = \frac{4 \cdot A_{ef}^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

Herleitung vergl. [53]

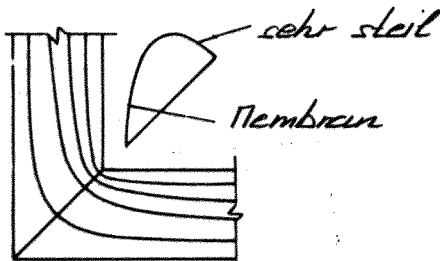


Umlaufintegral :

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{t_i}$$

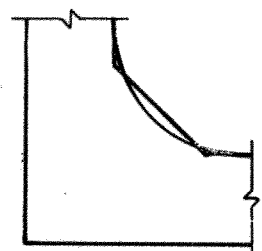
d) Erkenntnisse

Einspringende Ecke bei offenen Querschnitten

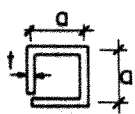
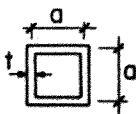


Niveaulinien in Ecken
sehr eng $\rightarrow \tau$ sehr
gross \rightarrow lokale
plastische Ver-
formung

\rightarrow Einspringende Ecken ausrunden!

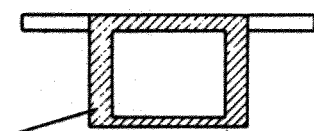


Vergleich offener - geschlossener Querschnitt

		<u>Vergleiche</u>
		analytisch mit $\frac{a}{t} = 10$:
$K_o = \frac{4}{3} \cdot a t^3$	$K_g = \frac{4a^4 \cdot t}{4a} = a^3 \cdot t$	$\frac{K_g}{K_o} = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{t}\right)^2 = 75$
$\tau_o = \frac{T}{K} \cdot t = \frac{3}{4} \frac{T}{a t^2}$	$\tau_g = \frac{T}{2A_o \cdot t} = \frac{T}{2a^2 \cdot t}$	$\frac{\tau_g}{\tau_o} = \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{a} = \frac{1}{15}$

→ **Geschlossener QS viel torsionssteifer als offener QS!**

Geschlossene Querschnitte mit Kragarmen

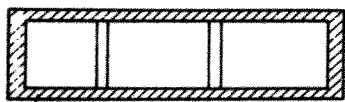


für T wirksamer QS

Anteil der Kragarme am gesamten K viel kleiner als K des geschlossenen Querschnitts.

→ **Kragarme für St. Venant'sche Torsion vernachlässigbar**

Mehrzellige Querschnitte



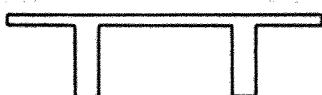
wirksamer Querschnitt

statisch unbestimmtes Problem (Vergleiche [53])

In den Innenstege wirken sich die Schubflüsse der angrenzenden Zellen entgegen

→ **Innenstege können näherungsweise vernachlässigt werden**

Offene dünnwandige Querschnitte



Neben St. Venant'scher Torsion sog. Wölb torsion.

→ **Wölb torsion (Flanschbiegung) meist wichtiger**

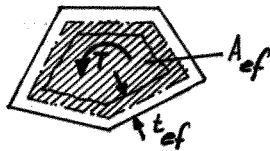
3.4.2. Stahlbetonstäbe unter reiner Torsion

Schubbeanspruchung

Auch für gerissene Querschnitte (Hohl- und Vollquerschnitte) ist es zweckmässig, die Schubspannung τ als generelles Mass für die schieben Zug- und Druckkräfte aus Torsion nach der Bredt'schen Formel zu berechnen:

$$\tau = \frac{T}{2 A_{ef} t_{ef}}$$

(vergl. ungerissene QS S. 3.4-6)

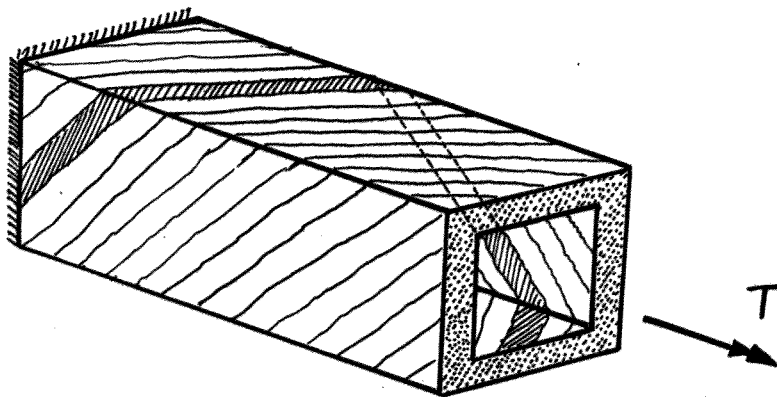


t_{ef} : Auf Torsion mitwirkende Wandstärke
(vergl. S. 3.4-14)

A_{ef} : Auf Torsion mitwirkende Querschnittsfläche, umschlossen von der Verbindungslinie der Längsbewehrung infolge Torsion.

a) Rissebild

Hohlkastenquerschnitt mit Torsionsbewehrung:

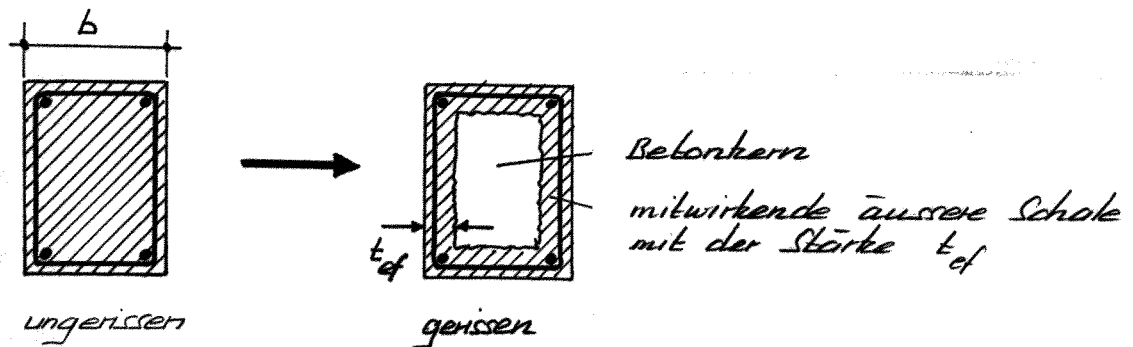


Die Risse verlaufen spiralförmig unter einer Neigung von ca. $\alpha = 45^\circ$ um den Querschnitt.

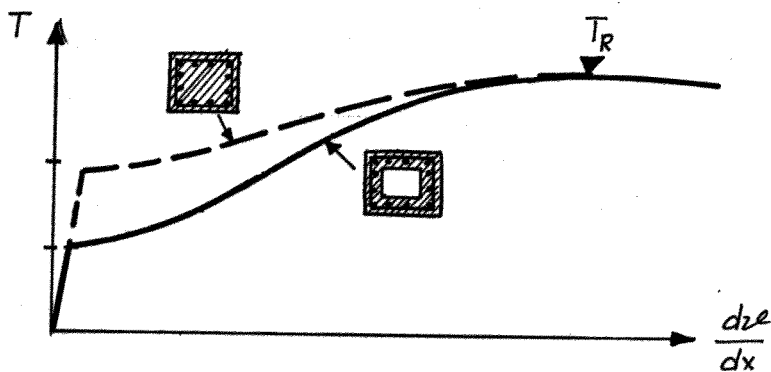
b) Trag- und Bruchverhalten

Vollquerschnitt wirkt wie Hohlquerschnitt

Nach der Rissebildung werden die Bügel gedehnt. Dadurch löst sich beim Voll-BS vom Kern eine äussere mitwirkende Betonschale ab.



Versuche [54] haben gezeigt, dass das Torsionsrisicmoment beim Voll-BS wesentlich höher liegt, der Betonkern zum Torsionswiderstand des gerissenen Stabes jedoch praktisch keinen Beitrag leistet!





Die Stärke der mitwirkenden Schale beim Vollquerschnitt variiert stark und muss für technische Zwecke mehr oder weniger willkürlich angenommen bzw. festgelegt werden (vergl. S. 3.4-15).

Torsionssteifigkeit

Torsionsrisse bewirken eine sehr starke Abnahme der Torsionssteifigkeit:

$$\frac{GK_{\text{genissen}}}{GK_{\text{ungelassen}}} = \frac{GK^{\text{II}}}{GK^{\text{I}}} \approx \frac{1}{4} \div \frac{1}{20}$$

hoher Torsions-
bewehrungsgehalt,
schmaler Rechteck-
QS ().

geringer Torsions-
bewehrungsgehalt,
quadratischer QS
().

Im Vergleich dazu ist der Steifigkeitsverlust eines Biegebalkens durch Bildung von Biegeissen erheblich kleiner:

$$\frac{EJ^{\text{II}}}{EJ^{\text{I}}} \approx \frac{1}{2} \div \frac{1}{5}$$

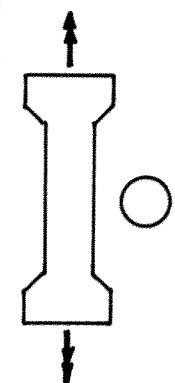
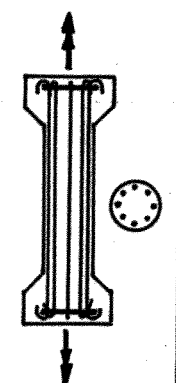
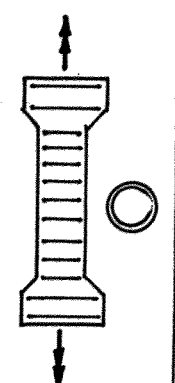
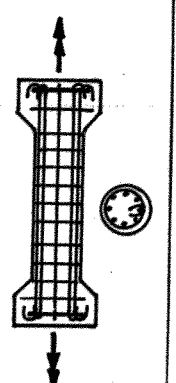
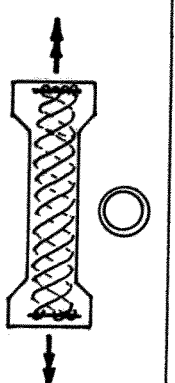
Damit wird in statisch unbestimmten Systemen das Verhältnis der auftretenden Biege- und Torsionsmomente (Verträglichkeitstorsion) durch die Rissebildung verändert (i.e. Reduktion von T, Vergrößerung von M):

$$\frac{GK^{\text{II}}}{EJ^{\text{II}}} \approx \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \right) \frac{GK^{\text{I}}}{EJ^{\text{I}}}$$

- Wichtig z.B. bei:
- schichtgelagerten Brücken
 - Randunterzügen im Hochbau.

Wirkung einer Torsionsbewehrung

Versuche von E. Mörsch (1921) an Zylindern unter reiner Torsion:

	keine Bewehrung	nur Längsbewehrung	nur Querbewehrung	Längs- und Querbew.	Spiralbewehrung
					
Rissmoment	233	233	250	247	270
Bruchmoment	233	238	250	378	> 700 (Prüfmaschine zu schwach)
[kNm]					

Diskussion:

- Die Bewehrung hat generell keinen Einfluss auf das Torsionsmoment.
- Der Torsionswiderstand kann weder durch Querbewehrung allein noch durch Längsbewehrung allein sondern nur durch Kombination von Quer- und Längsbewehrung oder durch Spiralbewehrung erhöht werden.
- Spiralbewehrung erweist sich als sehr wirkungsvoll, sie ist jedoch praktisch kaum ausführbar und bei Vorzeichenwechsel des Torsionsmomentes ist eine zweite Bewehrung (senkrecht zur ersten) erforderlich.

Torsionsbrucharten

Torsionszugbruch: (vergl. auch S. 3.3-10)

In Bereichen mit kleinem Moment und grosser Torsion öffnen sich bei kleinem Torsionsbewehrungsgehalt die Schubrisse stark. Ein Fließen oder Reißen der Quer- resp. Längsbewehrung führt schliesslich zum Versagen des Trägers.

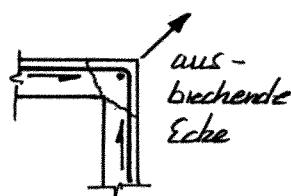
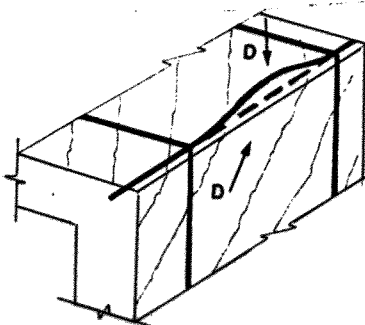
Verhältnismässig
duktiler Bruch

Druckstiebenbruch: (vergl. auch S. 3.3-10)

Bei starker Torsionsbewehrung ist ein schlagartiges Versagen des Betons der mitwirkenden Schale auf schiefer Druck vor Fließen der Torsionsbewehrung möglich. Diese Bruchart kann durch Begrenzung der schiefer Druckspannungen vermieden werden (obere $\bar{\tau}$ -Grenze). (Vergl. auch S. 3.4-15).

Eher spröder
Bruch nach ver-
hältnismässig
geringen Ver-
formungen

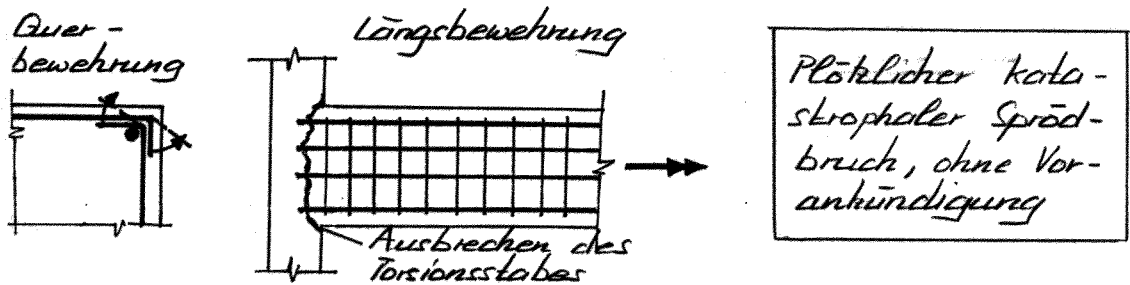
Ausbrechen von Kanten:



Eher spröder
Bruch

Zu grosser Bügelabstand und/oder zu schwache Eck-eisen führen zu einem Ausbrechen der Druckdiagonalen in den Eckbereichen (entspricht einem Verankerungsbruch der Druckdiagonalen).

Verankerungsbrüche:



Schlechte Verankerung der Bügelenden oder ungenügende Verankerung der Längsbewehrung an den Enden des Torsionsstabes bzw. im anstehenden Betonkörper führt zu schlagartigem Versagen.

c) Folgerungen für die Torsionsbemessung

Ähnlichkeit zu Schub aus Querkraft

Denkt man sich eine Wand vom restlichen Teil eines Hohlkastenquerschnittes losgelöst, dann zeigt diese unter Schub inf. Torsion ein ähnliches Verhalten wie unter Schub inf. Querkraft. In den aktuellen Bemessungsverfahren werden daher beide Fälle analog behandelt. Nachfolgende Unterschiede sind allerdings zu beachten.

Ersatzquerschnitt

Sowohl für Vollquerschnitte als auch für dickwandige Hohlquerschnitte mit (pro Seite) einschnittigen Bügeln ist die Bemessung an einem Ersatzhohlquerschnitt mit einer mitwirkenden ideellen Wanddicke t_{ef} durchzuführen.

Um ein Versagen der Druckdiagonalen auszuschliessen, (schiefe Druckspannungen, obere τ -Grenze) ist t_{ef} eher klein anzunehmen. Gem. SIA 162 gilt:

$$t_{ef} \leq \frac{d_o}{8}$$

d_o : Durchmesser des grössten in die Fläche A_{ef} eingeschriebenen Kreises.

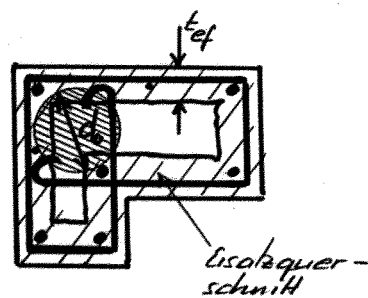
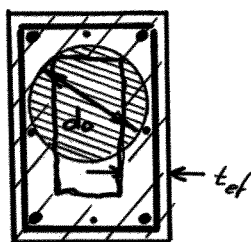
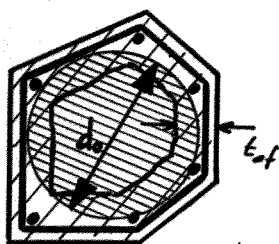
Als untere Grenze ist zu beachten:

$$2c + \phi \leq t_{ef}$$

c : Betonüberdeckung der Längsbewehrung
 ϕ : Stabdurchmesser der Eckstäbe

Beispiele

Vollquerschnitte:

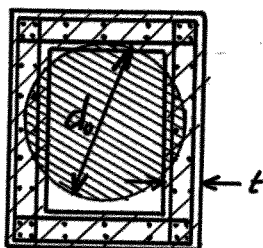
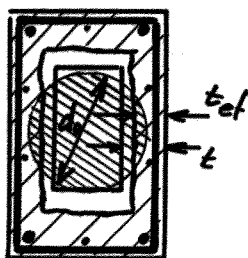


A_{ef} : Auf Torsion mitwirkende Querschnittsfläche, umschlossen von der Verbindungslinie der Längsbewehrung infolge Torsion.

Hohlquerschnitte:

dickwandig mit einschnittiger Bew.

zweischneittige Bewehrung



Die mitwirkende Wandstärke von Kastenträgern ist bei zweischneittiger Bewehrung gleich der Wanddicke.

Erfordernis einer Torsionsbewehrung

(untere Schubspannungsgrenze)

Torsionsbeanspruchung kann - im Gegensatz zur Querkraftbeanspruchung - allein d.h. ohne gleichzeitige Biegebeanspruchung auftreten. Auf eine allfällige Schubübertragung in der Biegedruckzone ist daher kein Verlass.

Da ferner in Bezug auf die Annahme der mitwirkenden Wandstärke & Unsicherheiten bestehen, ist es wenig zweckmässig, eine untere Schubspannungsgrenze zu definieren.

Es wird deshalb empfohlen, im Falle von Gleichgewichtstorsion die Torsionsbewehrung immer nachzuweisen.

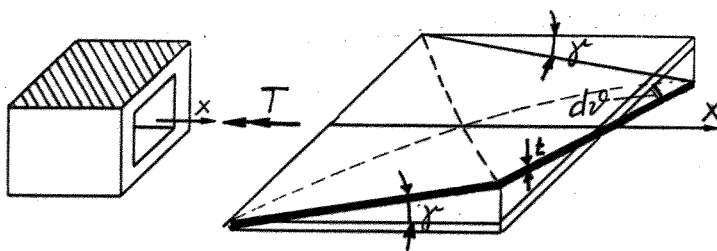
Mindest - Torsionsbewehrung

Für Gleichgewichtstorsion und Verträglichkeitstorsion ist sowohl in Querrichtung als auch in Längsrichtung immer eine Mindestbewehrung einzulegen.

(Konkrete Angaben vergl. Grundelemente S. 4.6-4)

Begrenzung der schiefen Druckspannungen

(obere Schubspannungsgrenze)



Die ursprünglich ebene Querschnittswand verformt sich unter Torsionsbeanspruchung zu einer hyperbolischen Paraboloidfläche (Verdrillung).

Die Beanspruchung der Betondruckdiagonalen $\sigma_{c,w}$ wird durch Sekundärspannungen erhöht. Versuche [54] haben gezeigt, dass z.B. in Hohlkastenquerschnitten mit $t/b = 1/16$ und vertikaler Querbewehrung

$$\sigma_{c,w} \approx 4\tau$$

ausbleiben kann (rechn. $G_{cw} = 2\tau$). Die reduzierte Betondehnigkeit $\epsilon_{c,red}$ zur Begrenzung der schiefen Druckspannungen zwecks Vermeidung eines Druckstrebenbruchs (diese τ -Grenze), sollte daher eher niedriger angesetzt werden als bei Schub aus Querkraft (vergl. S. 3.3-13).

Nach SIA 162 gelten für Schub aus Torsion dieselben Werte $\epsilon_{c,red}$ wie für Schub aus Querkraft (siehe S. 3.3-14).

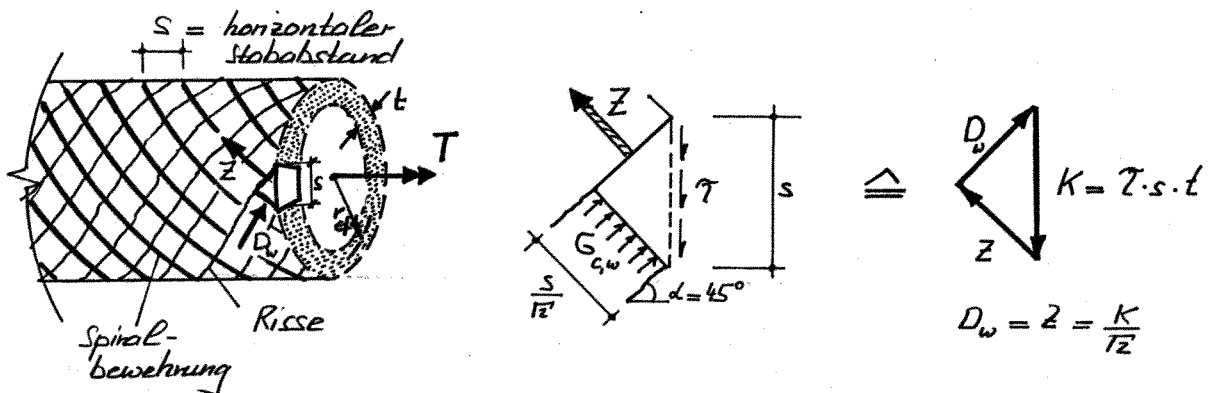
d) Modelle und Berechnungsverfahren für gerissene Träger

In Analogie zu Schub aus Querkraft werden für Schub aus Torsion im folgenden zwei Modelle dargestellt:

- ① 45° -Fachwerk-Modell
- ② allgemeines Fachwerk-Modell

① 45° -Fachwerk-Modell

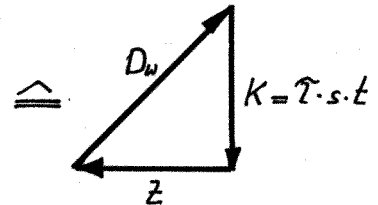
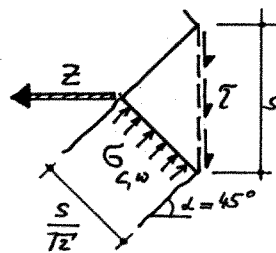
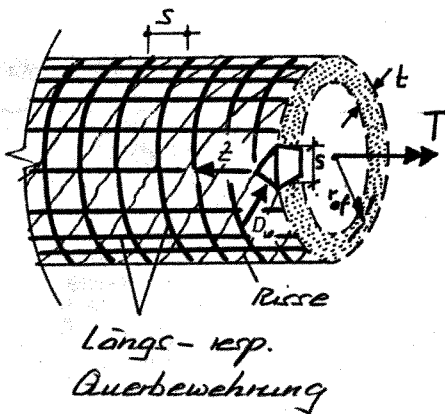
Kreisquerschnitt mit Spiralbewehrung (45° geneigt)



mit $\tau = \frac{T}{2A_{ef}t}$ wird:

- **Betondruckdiagonalen:** $D_w = G_{c,w} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot t = \frac{K}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{G_{c,w} = \frac{T}{2 \cdot A_{ef} \cdot t} = \tau}$
- **Spiralbewehrung pro s:** $Z = D_w = \frac{K}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{Z = \frac{T}{2A_{ef}} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} = \tau \cdot t \cdot \frac{s}{\sqrt{2}}}$
(Umlenkkräfte aus D_w und Z entsprechen sich)

Kreisquerschnitt mit Längs- und Querbewehrung



$$D_w = K \cdot \sqrt{2}$$

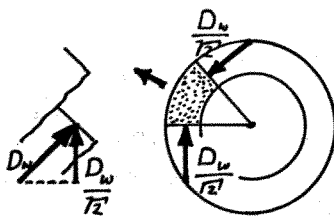
$$Z = K$$

- **Betondruckdiagonalen:** $D_w = G_{c,w} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot t = K \cdot \sqrt{2} \rightarrow \boxed{G_{c,w} = \frac{T}{A_{ef} \cdot t} = 2\tau}$
- **Längsbewehrung pro s:** $Z = K \rightarrow \boxed{Z = \frac{T}{2A_{ef}} \cdot s = \tau \cdot t \cdot s}$
- **Längsbewehrung ganzer Umfang ($u_{ef} = 2r_{ef}\pi$):** $\boxed{Z = \frac{T}{2A_{ef}} \cdot u_{ef} = \tau \cdot t \cdot u_{ef}}$
- **Querbewehrung:**

Damit sich die Umlenkkräfte kompensieren muss gelten:

Ringdruckkraft = Ringzugkraft

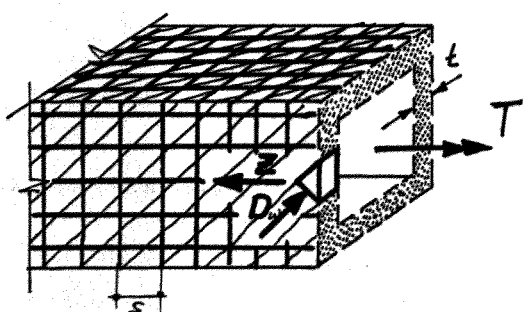
$$\frac{D_w}{\sqrt{2}} = Z_w$$



mit $D_w = K \cdot \sqrt{2} \rightarrow \boxed{Z_w = \frac{T}{2A_{ef}} \cdot s = \tau \cdot t \cdot s}$

Bemerkung: Bei Längs- und Querbewehrung ist die rechnerische schiefe Druckspannung im Beton doppelt so gross wie bei 45° geneigter Spiralbewehrung (analog vertikale und um 45° geneigte Bügel bei Querkraftbeanspruchung).

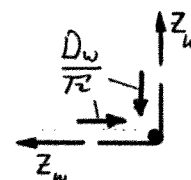
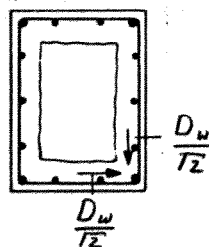
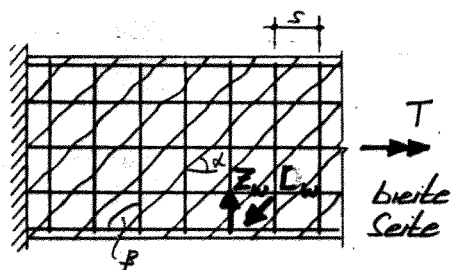
Rechteckquerschnitt mit Längs- und Querbewehrung.



- Betondruckdiag. } analog.
- Längsbewehrung } Kreis-QS

• Querbewehrung:

Damit die Druckkraft in den Ecken konzentriert umgelenkt werden kann, müssen folg. Gleichgewichtsbed. erfüllt sein:



$$z_w = \frac{D_w}{T_z} = K \Rightarrow z_w = \frac{T \cdot s}{2 A_{cf}}$$

Torsionswiderstand des Querschnittes (45°-FW)

Folgende Angaben gelten für allg. Querschnitte, d.h. sowohl für Kreis- als auch für Rechteckquerschnitte:

	Querbewehrung senkrecht zur Stabaxe, d.h. $\beta = 90^\circ$	Spiralbewehrung bzw. Querbewehrung mit $\beta = 45^\circ$
Versagen der Betondruckdiagonalen (obere τ -Grenze)	$T_R = 2 A_{ef} \cdot t_{ef} \cdot \hat{\tau}_{c, \max}$	
Versagen der Querbewehrung ($A_{s,w}$ pro s)	$T_R = \frac{A_{s,w} \cdot f_y \cdot 2 A_{ef}}{s}$	$T_R = \sqrt{2} \cdot \frac{A_{s,w} \cdot f_y \cdot 2 A_{ef}}{s}$
Versagen der Längsbewehrung ($A_s(T)$ pro u_{ef})	$T_R = \frac{A_s(T) \cdot f_y \cdot 2 A_{ef}}{u_{ef}}$	—

Bemessung nach dem 45°-FW-Modell

Den obigen Formeln entsprechen folg. Ausdrücke für die Bemessung:

	Querbewehrung senkrecht zur Stabaxe, d.h. $\beta = 90^\circ$	Spiralbewehrung bzw. Querbewehrung mit $\beta = 45^\circ$
Erforderliche mitwirkende Wandstärke	$t_{ef} \geq \frac{T^*}{2 A_{ef} \cdot \hat{\tau}_{c, \max}}$ (A_{ef} ist vorerst zu schätzen)	
Querbewehrung ($A_{s,w}$ pro s)	$A_{s,w} \geq \frac{T^* \cdot s}{2 A_{ef} \cdot f_y}$	$A_{s,w} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T^* \cdot s}{2 A_{ef} \cdot f_y}$
Längsbewehrung ($A_s(T)$ pro u_{ef})	$A_s(T) \geq \frac{T^* \cdot u_{ef}}{2 A_{ef} \cdot f_y}$	$A_s(T) = 0$

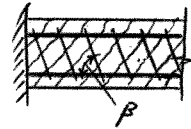
$$\text{mit } T^* = \gamma_R \cdot T_d = \gamma^* \cdot 2 A_{ef}$$

Es bedeuten:

$\tau_{c,max}$: obere Schubspannungsgrenze

Auerbewehrung senkrecht	$\tau_{c,max} = \frac{1}{2} \cdot f_{c,red} = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot f_{cw,min}$
Spiralbewehrung bzw. Auerbewehrung mit $\beta = 45^\circ$ (siehe auch S. 3.3-14 b)	$\tau_{c,max} = f_{c,red} = 0,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_{cw,min}$

β : Neigung der Spiral- bzw. Auerbewehrung



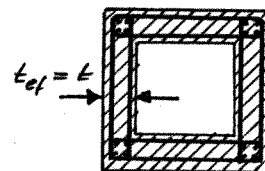
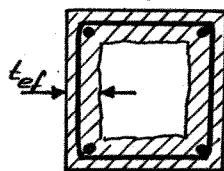
t_{ef} : mitwirkende Wandstärke (vergl. S. 3.4-14)

A_{ef} : mitwirkende Querschnittsfläche (vergl. S. 3.4-9)

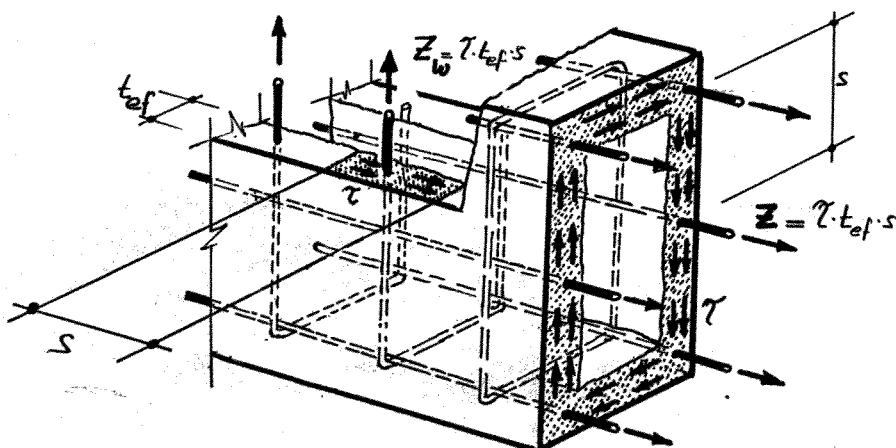
s : Stababstand der Quer- resp. Spiralbewehrung in Stabachse.

u_{ef} : Umfang der Fläche A_{ef}

Achtung: $A_{s,w}$ einschnittig oder zweischneitig



Denkhilfe bei senkrechter Auerbewehrung:



Achtung:

Diese Denkhilfe hat nichts mit der wirklichen Lastabtragung zu tun!

Tägliche Vorstellung:

Querbewehrung: "Jeder Querstab mit der Fläche $A_{s,w}$ hat die Schubspannungen der Einzugsfläche $s \cdot t_{ef}$ zu übernehmen."

$$\rightarrow Z_w = A_{s,w} \cdot f_y = \tau \cdot t_{ef} \cdot s$$

Längsbewehrung: "Die Summe aller Längsstäbe mit der Gesamtfläche A_s hat die Schubspannungen der Einzugsfläche $u_{ef} \cdot t_{ef}$ zu übernehmen."

$$\rightarrow \Sigma Z = A_s \cdot f_y = \tau \cdot t_{ef} \cdot u_{ef}$$

Beurteilung des 45°-Fachwerk-Modelles

Einfache und zweckmässige Methode für Torsionsbemessung, die in der Praxis häufig Anwendung findet.

② Allgemeines Fachwerk-Modell (entspr. SIA 162)

Bei reiner Torsion ist die Neigung der Risse praktisch unabhängig von der eingelegten Bewehrung $\alpha \approx 45^\circ$. Die Neigung der schiefen Betondruckkräfte vermag sich jedoch inf. Schubübertragung längs der Risse durch Risseverzahnung innerhalb gewisser Grenzen an das Verhältnis von Quer- und Längsbewehrung anzupassen. Daher darf der Bemessung für Torsion auch eine Druckdiagonalenneigung $\alpha \neq 45^\circ$ zugrunde gelegt werden. Es besteht damit die Möglichkeit, Schub aus Querkraft und Schub aus Torsion an demselben allg. FW-Modell zu behandeln (gleiches α für V und T).

Torsionswiderstand des Querschnittes (allg. FW)

Analoge Herleitung wie beim 45°-FW-Modell für Torsion
resp. allg. FW-Modell für Querkraft.

	Querbewehrung senkrecht zu Stab- axe, d.h. $\beta = 90^\circ$	Spiralbewehrung bzw. Querbewehrung mit $\beta = 45^\circ + 90^\circ$
Versagen der Beton- druckdiagonalen (obere τ -Grenze)	$T_R = 2A_{ef} \cdot t_{ef} \cdot \tau_{c, \max}$	
Versagen der Quer- bewehrung ($A_{s,w}$ pro s)	$T_R = \frac{A_{s,w} \cdot f_{ef} \cdot 2A_{ef} \cdot \cot \alpha}{s}$	$T_R = \frac{A_{s,w} \cdot f_y \cdot 2A_{ef} \cdot \sin \beta (\cot \alpha + \cot \beta)}{s}$
Versagen der Längs- bewehrung ($A_s(\tau)$ pro u_{ef})	$T_R = \frac{A_s(\tau) \cdot f_y \cdot 2A_{ef} \cdot \tan \alpha}{u_{ef}}$	$T_R = \frac{A_s(\tau) \cdot f_y \cdot 2A_{ef}}{u_{ef}} \cdot \frac{1}{(\cot \alpha - \cot \beta)}$

Bemessung nach dem allg. FW-Modell

Die obigen Formeln entsprechen folg. Ausdrücken für die Bemessung:

	Querbewehrung senkrecht zur Stab- axe d.h. $\beta = 90^\circ$	Spiralbewehrung bzw. Querbewehrung mit $\beta = 45^\circ + 90^\circ$
Erforderliche mit- wirkende Wandstärke	$t_{ef} \geq \frac{T^*}{2A_{ef} \tau_{c, \max}}$	(A_{ef} ist vorerst zu schätzen)
Querbewehrung ($A_{s,w}$ pro s)	$A_{s,w} \geq \frac{T^* \cdot s}{2A_{ef} \cdot f_y} \cdot \tan \alpha$	$A_{s,w} \geq \frac{T^* \cdot s}{2A_{ef} \cdot f_y} \cdot \frac{1}{\sin \beta (\cot \alpha + \cot \beta)}$
Längsbewehrung ($A_s(\tau)$ pro u_{ef})	$A_s(\tau) \geq \frac{T^* \cdot u_{ef} \cdot \cot \alpha}{2A_{ef} \cdot f_y}$	$A_s(\tau) \geq \frac{T^* \cdot u_{ef} (\cot \alpha - \cot \beta)}{2A_{ef} \cdot f_y}$

mit $T^* = \tau^* \cdot 2A_{ef} \cdot t_{ef}$

Es bedeuten:

$\bar{\tau}_{c,max}$: diese Schubspannungsgrenze

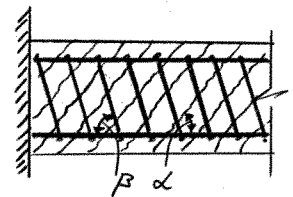
Querbewehrung senkrecht	$\bar{\tau}_{c,max} = f_{c,red} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $= 0,4 \cdot f_{cw,min} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
Spiral- bzw. Querbewehrung mit $\beta = 45^\circ - 90^\circ$	$\bar{\tau}_{c,max} = f_{c,red} \cdot (\cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$ $= 0,4 \cdot \sin \beta \cdot f_{cw,min} \cdot (\cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$

(siehe auch S. 3.3-14 b), S. 3.3-19 und S. 3.3-26)

$t_{ef}, A_{ef}, s, u_{ef}$: siehe S. 3.4-19

α : Druckdiagonalenrichtung : siehe S. 3.3-22

β : Neigung der Spiralbewehrung
bzw. der Querbewehrung



Beurteilung des allg. FW-Modells

Grundsätzlich nur geringer Unterschied zum Spezialfall des 45° -FW-Modells. Erlaubt allerdings durch Annahme flacherer Diagonalenrichtungen etwas wirtschaftlichere Bemessung (weniger Querbewehrung, dafür mehr Längsbewehrung als nach 45° -FW-Modell).

3.4.3. Stahlbetonstäbe unter kombinierter Beanspruchung M, V, T

Die in Wirklichkeit komplexen Interaktionsprobleme sind noch nicht vollumfänglich erforscht.

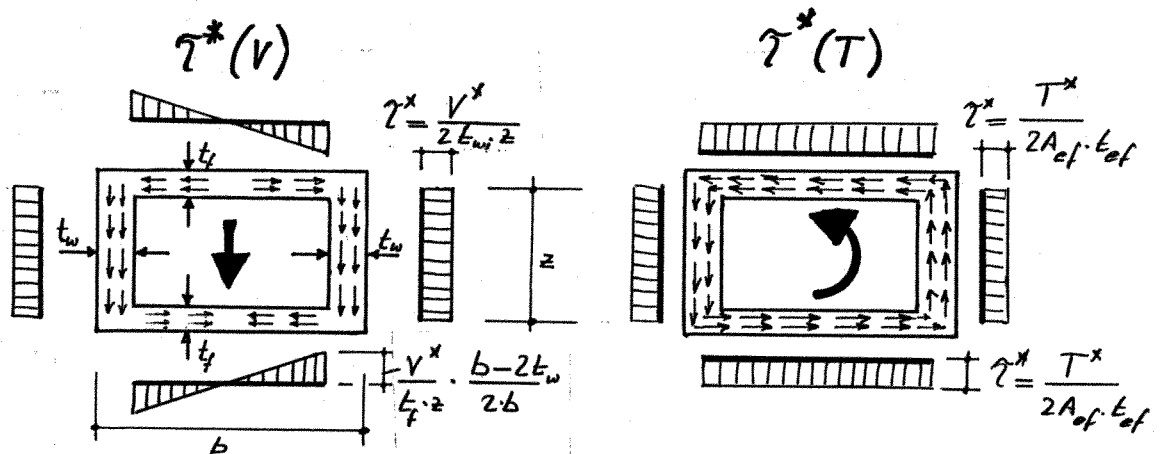
Allfällige Bewehrungseinsparungen, die sich aufgrund genauerer Untersuchungen ergeben könnten, sind meist bescheiden und i.o. nur im Brückenbau von Bedeutung.

Für die praktische Bemessung von Tragwerten unter kombinierter Beanspruchung genügt i.o. eine einfache Superposition der Beanspruchungen bzw. Bewehrungen

Einfache und sichere Methode = Superpositionsprinzip

Begrenzung der schiefen Druckspannungen (obere Schubspannungsgrenze)

Hohlquerschnitt:



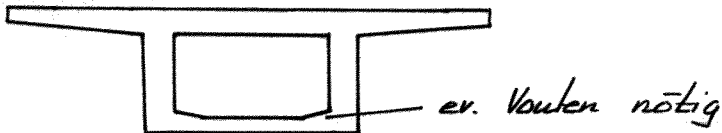
Um ein Versagen des Betons auf schiefer Druck zu verhindern, darf die Summe der Schubspannungen aus V und T die obere Schubspannungsgrenze nicht überschreiten!

$$\tilde{\tau}^*(V) + \tilde{\tau}^*(T) \leq \tilde{\tau}_{c, \max}$$

($\tilde{\tau}_{c, \max}$ siehe z.B. S. 3.4-19)

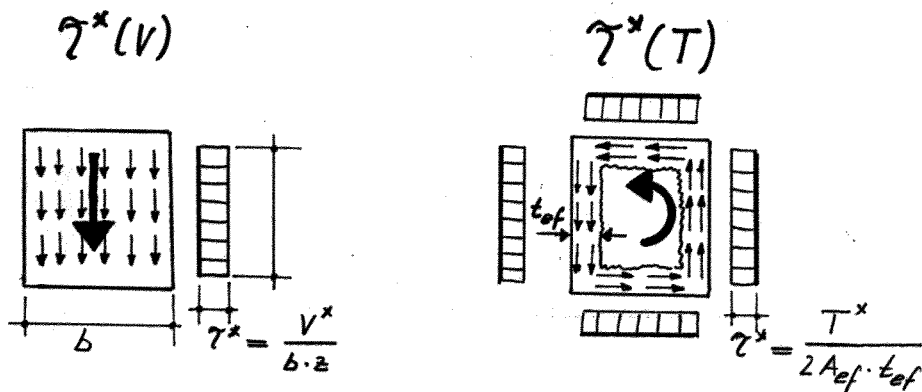
Dabei ist zu beachten, dass sich die Schubspannungen

in bestimmten Schnitten addieren und in andern subtrahieren. Der für die obere Schubspannungsgrenze massgebende Schnitt bei stark auf Querkraft und Torsion beanspruchten Brückenträgern liegt häufig bei der Einspannstelle der unteren, relativ dünnen Kastenplatte:



Anstelle der obigen Schubspannungsbedingungen könnten auch die erforderlichen Steg- bzw. Plattenstärken für V und T zusammengerechnet werden.

Vollquerschnitt



Als Kontrolle der oberen Schubspannungsgrenze empfiehlt sich hier eine einfache Addition der Schubspannungen aus V und T (analog Hohl-BS):

$$\frac{V^*}{b \cdot z} + \frac{T^*}{2 A_{ef} \cdot t_{ef}} \leq \tau_{c, \max}$$

Querbewehrung

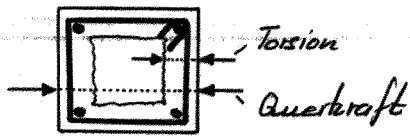
Regel:

Einfache Superposition der Querbewehrungen für alleinige Wirkung je von V und T !

Beim Hohlkasten-BS kann dabei jede Wand für sich allein betrachtet werden.

Vorsicht betr. Anzahl Schnitte bei Bügeln:

Oft stehen zur Abtragung des Schubes aus Querkraft beide Schnitte, zur Abtragung des Schubes aus Torsion jedoch bloss ein Schnitt eines Bügels zur Verfügung.



In stat. Berechnungen ist deshalb neben der Angabe der erforderl. Bügelfläche jeweils der Hinweis einschneitig resp. zweischnittig ratsam.

Längsbewehrung

In der Biegezugzone addieren sich die Zugkräfte infolge Biegung, Querkraft und Torsion. Die Längsbewehrung ist entsprechend zu superponieren.

In der Biegedruckzone hingegen wirken sich entgegen:

Druckkraft aus Biegung \longleftrightarrow Zugkraft aus Torsion (und Querkraft)

Eine allfällige Längsbewehrung für T (und V) in der Biegedruckzone wird eventuell auf Druck beansprucht.

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der Längsbewehrung in der Biegedruckzone:

1. Bestimmen der Torsions- (und Querkrafts-) -längsbewehrung für $M = 0$.
2. Bestimmen der Biegelängsbewehrung, sowie der Biegedruckkraft für $T = 0$ und $V = 0$: $Z = D = \eta / z$.
3. Reduktion der Längsbewehrung aus T und V in der Biegedruckzone um D^* / f_y .

Massgebende Schnittkraftkombinationen

Die Maximalwerte der einzelnen Schnittkräfte treten meist nicht gleichzeitig, sondern bei verschiedenen Lastfällen auf. Der minimal erforderliche Bewehrungsaufwand in einem bestimmten Querschnitt kann deshalb etwa wie folgt ermittelt werden:

Beispiele: - Stegbügelbewehrung: $A_{sw} \geq A_{sw}[V_{max}] + A_{sw}[T(V_{max})]$

d.h. Bügelbewehrung für V_{max} plus Bügelbewehrung für T aus Lastfall für V_{max} .

$$A_{sw} \geq A_{sw}[T_{max}] + A_{sw}[V(T_{max})]$$

d.h. Bügelbewehrung für T_{max} plus Bügelbewehrung für V aus Lastfall für T_{max} .

- U-förmige Längsbewehrung: $A_s \geq A_s[\Pi_{max}] + A_s[T(\Pi_{max})] + A_s[V(\Pi_{max})]$

$$A_s \geq A_s[T_{max}] + A_s[\Pi(T_{max})] + A_s[V(T_{max})]$$

$$A_s \geq A_s[V_{max}] + A_s[\Pi(V_{max})] + A_s[T(V_{max})]$$

Bei einer Reduktion der Längsbewehrung für T und V in der Biegedruckzone ist zu prüfen, ob nicht Lastfälle auftreten können, die bei relativ kleinem Moment hohe Torsions- und Querkraftbeanspruchung bewirken. Also z.B. Untersuchung

für - T_{max} , $V(T_{max})$, $\Pi(T_{max})$

- $T(\Pi_{min})$, $V(\Pi_{min})$, Π_{min}

- usw.

Bei der Kontrolle der oberen Schubspannungsgrenze ist u.U. davon zu profitieren, dass T_{max} und V_{max} meistens nicht in demselben Lastfall auftreten.