

Lattice QCD at strong coupling

thermodynamics and nuclear physics

Doctoral Thesis

Author(s):

Fromm, Michael

Publication date:

2010

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006414247>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

DISS. ETH No. 19297

Lattice QCD at strong coupling: thermodynamics and nuclear physics

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

Michael Fromm

Dipl. Phys., Eberhard-Karls-University, Tübingen
born 13. March 1981
citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. M. Troyer, examiner
Dr. Ph. de Forcrand, co-examiner
Prof. Dr. U.-J. Wiese, co-examiner

2010

Abstract

QCD, the theory of strong interactions between quarks and gluons, describes accurately the physics of a single hadron, the color-singlet bound state of quarks and gluons. It should also describe the residual, van der Waals-like interactions between hadrons, i.e. nuclear physics. To study nuclear physics from first principles, that is from QCD, present day non-perturbative approaches are effective theories and Lattice QCD. The latter relies on the probabilistic interpretation of the measure that characterizes the QCD partition function. In the presence of a finite density of nucleons (baryons) or, equivalently, at finite baryon chemical potential the positivity of the measure is lost and the minus-sign problem arises. To study systems containing only a few baryons already requires an immense computational effort and the approach is essentially reserved to only a few large collaborations worldwide.

The strong coupling limit considered in the larger part of this thesis neglects the gauge part of the Lattice QCD action as the inverse bare gauge coupling is set to zero. While in principle this implies “infinite coarseness” of the lattice and the presence of large lattice artifacts, it allows us to bypass the conventional numerical approach as its advantage is threefold: Firstly in our model gauge fields can be integrated out exactly. A good part of the sign fluctuations of the path integral measure at finite chemical potential is exactly taken into account rather than probabilistically. The minus-sign problem is thus milder in the resulting model. Secondly, integration over the gauge fields immediately results in a formulation of the system in color-singlet degrees of freedom - the mesons and baryons. This makes the interpretation of the results more transparent. Thirdly, with these degrees of freedom the model can be formulated as a loop gas. Recent algorithmic developments like the worm algorithm allow to sample such a system with high efficiency.

The main part of the thesis is thus devoted to Lattice QCD at strong coupling with $N_f = 1$ flavor of staggered quarks. With the help of the worm algorithm and the snake algorithm we uncover the strong coupling variant of nuclear physics by measuring the nucleon-nucleon potential precisely. Our potential shows essential features such as a repulsive hard core and a medium-range attraction. Eventually, by considering the perturbation of the pion gas caused by the nucleon, we are able to show that the nuclear potential is of Yukawa form at large distances. Using a similar technique we further study composite objects of nucleons, the nuclei of our model, and find their mass to fall on top of the curve predicted by the phenomenological Bethe-Weizsäcker mass formula. In addition, due to the mild sign problem, we can determine the phase diagram of our model in the whole (μ_B, T) -plane and determine the location of the tricritical point predicted by mean-field theory. Giving the quark mass nonzero values, we

observe that the behavior of the QCD critical point is in agreement with the scaling prediction of the classical theory. Finally, we extend our study of strong coupling QCD to $N_f = 2$ flavors. There, contrary to the one-flavor case where the explicit expression of the partition function formulated in color singlet degrees of freedom was long known, these preparatory steps have to be carried out. We explicitly map the partition function for gauge group $U(N = 2, 3)$ to that of a dimer model in a way easily generalizable to higher N_f . Doing so, we uncover a sign problem which we are however able to tame by practical methods. This opens the way to the study of nuclear physics in the presence of up and down quarks.

Zusammenfassung

Die Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen, Quantenchromodynamik (QCD), beschreibt die Physik der Hadronen, also der farblosen Bindungszustände von Quarks und Gluonen. Die Theorie sollte aber auch die daraus resultierende, Van-der-Waals-ähnliche Wechselwirkung *zwischen* den Hadronen beschreiben, also auch die Kernwechselwirkung. Modern Ansätze um Kernphysik mit der ihr zugrundeliegenden Theorie (QCD) zu behandeln, sind sogenannte Effektive Theorien und Gitter-QCD. Letztere beruht auf der Interpretation des Maßes der Zustandssumme als Wahrscheinlichkeitsmaß. Bei endlicher Baryondichte oder endlichem chemischen Potential ist dieses Maß aber nicht mehr positiv semi-definit und man spricht vom Vorzeichenproblem. Um Systeme mit nur wenigen Baryonen zu untersuchen, benötigt man einen immensen Rechenaufwand, so daß dieser Zugang eigentlich nur den großen Kollaborationen weltweit vorbehalten ist.

Im Grenzwert unendlicher Eichkopplung, wie in dieser Arbeit betrachtet, kann man jedoch den Eichanteil der Wirkung, welche im Wahrscheinlichkeitsmaß auftritt, vernachlässigen. Obwohl dies grundsätzlich eine unkontrollierbare Approximation darstellt, da es eine Diskretisierung mit unendlicher Gitterkonstanten impliziert, so erlaubt es uns doch den herkömmlichen numerischen Weg zu verlassen und folgende Vorteile zu nutzen: Erstens können im Limes unendlicher Eichkopplung die Eichfelder *exakt* ausintegriert werden. Ein guter Teil der Fluktuationen des Maßes der Zustandssumme bei endlichem chemischen Potential ist damit exakt berücksichtigt worden und nicht nur probabilistisch. Das Vorzeichenproblem des daraus entstehenden Modells ist daher schwächer. Zweitens kann die Theorie durch die Integration über Eichfelder in den farblosen, hadronischen Freiheitsgraden — den Mesonen und Baryonen — formuliert werden. Drittens wird das Modell in dieser Formulierung zu einem “loop-gas”-Modell, welches z.B. mit dem “worm”-Algorithmus effizient simuliert werden kann.

Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich also mit Gitter-QCD bei unendlicher Eichkopplung, speziell für den Fall nur eines Flavors ($N_f = 1$) von elementaren Kogut-Susskind-Fermionen. Mit Hilfe des worm-Algorithmus und des “snake”-Algorithmus untersuchen wir die daraus resultierende Kernphysik und bestimmen insbesondere das Zweikörperpotential. In der Tat besitzt dieses Potential wichtige Charakteristika wie z.B. eine starke Repulsion für kleine Abstände und einen attraktiven Anteil bei mittleren Distanzen. Betrachtet man schließlich die Störung der bosonischen Freiheitsgrade durch ein statisches Baryon, so kann man zeigen, daß das Potential die Form eines Yukawa-Potentials für große Distanzen besitzt.

Mit den genannten Algorithmen lassen sich aber auch aus Baryonen zusammengesetzte Objekte (Kerne) untersuchen. Die Masse dieser Kerne wird in der Tat durch die semi-phänomenologische Bethe-Weizsäcker-Formel beschrieben.

Darüber hinaus untersuchen wir das Phasendiagramm unseres Modells für endliche Temperatur und Dichten im chiralen Limes, d.h. für masselose Quarks. Insbesondere finden wir einen trikritischen Punkt, welcher bereits von der Molekularfeld-Theorie vorhergesagt wurde. Im Falle massiver Quarks untersuchen wir das Verhalten des dann auftretenden kritischen Punktes und finden, daß es in der Nähe des trikritischen Punktes durch die klassische Landau-Theorie beschrieben wird.

Schließlich wenden wir uns der Erweiterung des Modells zu $N_f = 2$ Quark-Flavors zu. Wir schreiben hierzu die Gitter QCD-Zustandssumme als Zustandssumme eines “dimer”-Modells.

Jedoch finden wir selbst für eine rein bosonische Theorie (Eichgruppe $U(N = 2, 3)$) ein Vorzeichenproblem, welches sich aber durch praktische Methoden wenn nicht lösen, so doch gut kontrollieren läßt. Diese Schritte schaffen die Voraussetzung, nun auch die resultierende Kernphysik für $N_f = 2$ Flavors, d.h. mit “up” - und “down”-Quarks zu untersuchen.