Doctoral Thesis

André-Oort conjecture for Drinfeld moduli spaces

Author(s):
Hubschmid, Patrik

Publication Date:
2011

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-006506770

Diss. ETH No. 19512

André-Oort Conjecture for Drinfeld Moduli Spaces

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

PATRIK HUBSCHMID
Dipl. Math. ETH Zürich
born September 2, 1981
citizen of Ostermundigen BE, Madiswil BE

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Richard Pink, examiner
Prof. Dr. Florian Breuer, co-examiner
Prof. Dr. Bruno Klingler, co-examiner
Prof. Dr. Gisbert Wüstholz, co-examiner

2011

Summary

In this thesis we consider the analogue of the André-Oort conjecture for Drinfeld modular varieties. This analogue was formulated by Breuer and says that every irreducible component of the Zariski closure of a set of special points in a Drinfeld modular variety is a special subvariety. Breuer proved it in the case where the given special points all lie in a curve and in the case where all special points have a certain behaviour at a fixed set of primes.

We extend the results of Breuer by proving the analogue for arbitrary sets of special points with separable reflex field over the base field. In particular, our result shows the correctness of the full analogue for Drinfeld modular varieties of rank coprime to the characteristic of the base field.

The proof of our result is an adaptation of the methods of Klingler and Yafaev in the classical case and consists of several steps of arithmetic and geometric nature:

- We show that, in any infinite family of Drinfeld modular subvarieties X of a Drinfeld modular variety, the degree of X is unbounded, where the degree of subvarieties is defined via the Satake compactification of a Drinfeld modular variety. We prove this using an explicit classification of Drinfeld modular subvarieties.

- We prove a geometric criterion for a Hodge-generic subvariety Z of a Drinfeld modular variety S to be equal to S. It says that Z is equal to S if Z is contained in a suitable Hecke translate of itself.

- We show the existence of primes satisfying certain technical conditions which are needed to construct a Hecke correspondence satisfying the assumptions in the above geometric criterion. This step uses an effective version of Čebotarev's theorem over function fields which relies on the correctness of the generalized Riemann conjecture over function fields.

- We finish the proof by induction using the above results.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir das Analogon der André-Oort Vermutung für Drinfeld-Modulvarietäten. Dieses Analogon wurde von Breuer formuliert und besagt, dass jede irreduzible Komponente des Zariski-Abschlusses einer Menge von speziellen Punkten in einer Drinfeld-Modulvarietät eine spezielle Untervarietät ist. Breuer bewies es, falls die gegebenen speziellen Punkte alle in einer Kurve liegen, und im Fall, dass alle speziellen Punkte ein bestimmtes Verhalten an einer festen Menge von Stellen haben.

Wir erweitern die Resultate von Breuer, indem wir das Analogon für beliebige Mengen von speziellen Punkten mit separablem Reflexkörper über dem Grundkörper beweisen. Insbesondere zeigt unser Resultat die Richtigkeit des vollen Analogons für Drinfeld-Modulvarietäten, deren Rang teilerfremd zur Charakteristik des Grundkörpers ist.

Der Beweis unseres Resultats ist eine Anpassung der Methoden von Klingler und Yafaev im klassischen Fall und besteht aus mehreren Schritten von arithmetischer und geometrischer Natur:

- Wir zeigen, dass in jeder unendlichen Familie von Drinfeld-Moduluntervarietäten X einer Drinfeld-Modulvarietät der Grad von X unbeschränkt ist, wobei der Grad von Untervarietäten mit Hilfe der Satake-Kompaktifizierung einer Drinfeld-Modulvarietät definiert ist. Wir beweisen dies mit einer expiziten Klassifikation von Drinfeld-Untermodulvarietäten.

- Für eine Hodge-generische Untervarietät Z einer Drinfeld-Modulvarietät S beweisen wir ein geometrisches Kriterium, wann Z gleich S ist. Es besagt, dass Z gleich S ist, wenn Z in einem geeigneten Hecke-Translat von sich selber enthalten ist.

- Wir zeigen die Existenz von Stellen, die gewisse technische Bedingungen erfüllen. Diese verwenden wir um Hecke-Korrespondenzen zu konstruieren, die die Voraussetzungen des obigen geometrischen Kriteriums erfüllen. Dieser Schritt benutzt eine effektive Version des Satzes von Čebotarev über Funktionenkörpern, die auf der Richtigkeit der verallgemeinerten Riemann-Vermutung über Funktionenkörpern beruht.

- Wir beenden den Beweis mit Induktion mit Hilfe obiger Resultate.