

DISS. ETH No. 19705

FUNCTIONAL DIFFERENTIAL APPROACHES TO BACKWARD STOCHASTIC EQUATIONS

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor Of Sciences

presented by
MATTEO CASSERINI
Dipl. Math. ETH
born 19 October 1983
citizen of Cerentino (TI), Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Martin Schweizer	examiner
Prof. em. Dr. Freddy Delbaen	co-examiner
Prof. Dr. Terry Lyons	co-examiner
Prof. Dr. Halil Mete Soner	co-examiner
Prof. Dr. Josef Teichmann	co-examiner

2011

Abstract

This thesis is mainly concerned with the study of backward stochastic differential equations (BSDEs), introduced by Pardoux and Peng [58], and of their generalizations. Recently, Liang, Lyons and Qian [49] developed a new approach to Lipschitz BSDEs. Their method is based on the analysis of a particular class of functional differential equations, where the driver of the equation does not depend only on the present, but also on the terminal value of the solution.

The first part is dedicated to the introduction of various classes of functional differential equations, associated to several types of backward systems. After first studying BSDEs of quadratic growth with respect to the variable z , we then consider systems of fully coupled forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs). Both types of equation have numerous applications in many areas of mathematical finance (for instance utility maximization problems or hedging problems for large investors). Afterwards, we analyze a numerical scheme for the approximation of decoupled systems of functional differential equations, which is based on the local iteration approach introduced in the fully coupled case.

In the last part, we introduce complexification techniques for stochastic processes, which are closely related to Hermite polynomials. These techniques allow to consider real-valued stochastic processes as projections of corresponding complex-valued processes, and we believe they could provide an important tool in the study of stochastic differential equations. We conclude by presenting an application of these techniques to a result obtained by Widder [70] concerning a class of Brownian martingales.

Sommario

L'argomento principale di questa tesi è lo studio di equazioni differenziali stocastiche regressive (o backward), introdotte da Pardoux e Peng [58], e delle loro generalizzazioni. Recentemente, Liang, Lyons e Qian [49] hanno sviluppato un nuovo approccio ad equazioni regressive aventi continuità lipschitziana. Il loro metodo si basa sull'analisi di una particolare classe di equazioni differenziali funzionali, in cui il coefficiente dell'equazione dipende non solo dal valore presente, ma anche da quello terminale della soluzione.

La prima parte è dedicata all'introduzione di varie classi di equazioni differenziali funzionali, associate a diversi tipi di sistemi regressivi. In primo luogo, studiamo equazioni regressive aventi crescita quadratica rispetto alla variabile z , per poi dedicarci a sistemi accoppiati di equazioni differenziali stocastiche progressive-regressive (o forward-backward). Entrambi questi tipi di equazione hanno numerose applicazioni in molti ambiti di matematica finanziaria (ad esempio problemi di massimizzazione dell'utilità attesa, o problemi di hedging per grandi investitori). In seguito, analizziamo uno schema numerico per l'approssimazione di sistemi disaccoppiati di equazioni differenziali funzionali, basato sull'approccio di iterazione locale introdotto per sistemi accoppiati.

Nell'ultima parte, introduciamo tecniche di estensione allo spazio complesso per processi stocastici, strettamente correlate ai polinomi di Hermite. Tali tecniche permettono di considerare processi stocastici a valori reali come proiezioni di corrispondenti processi a valori complessi, e crediamo che possano costituire uno strumento importante nello studio di equazioni differenziali stocastiche. Terminiamo presentando un'applicazione di queste tecniche a un risultato ottenuto da Widder [70] riguardo a una classe di martingale Browniane.