

DISS. ETH NO. 19764

**LOCAL ANALYSIS OF RECTIFIABLE AND
NON-RECTIFIABLE CALIBRATED CYCLES OF
DIMENSION 2**

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

COSTANTE BELLETTINI

M.Sc. Università di Pisa

and Scuola Normale Superiore di Pisa

born June 8, 1983

citizen of Italy

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Tristan Rivière, examiner

Prof. Dr. Camillo De Lellis, co-examiner

2011

Abstract

This dissertation deals with local regularity issues for rectifiable and non-rectifiable cycles of dimension 2.

In chapters 2 and 3 we prove optimal regularity results for *Special Legendrian* integral cycles in 5-dimensional contact manifolds.

The most well-known example, treated in chapter 2, is that of Special Legendrian integral cycles in S^5 , which are the links of Special Lagrangian cones in \mathbb{R}^6 .

The more general case, described in chapter 3, happens in an arbitrary 5-dimensional contact manifold, where we consider cycles whose approximate tangents are invariant for the action of an almost complex structure J that satisfies, for any vector v in the horizontal distribution, $d\alpha(v, Jv) = 0$.

We prove that these integral cycles are in fact smooth Legendrian curves except possibly at isolated points and we investigate how the mentioned structures J are related to semi-calibrations.

In chapter 4 we turn our attention to normal currents of dimension 2, positive (or semi-calibrated) with respect to a two-form. More precisely we are concerned with pseudo-holomorphic 2-currents having finite mass and zero boundary: they are called *positive (1,1) normal cycles*. We prove a uniqueness result for tangent cones at non-isolated points of positive density (absolute uniqueness is already known to fail). This result also applies to Special Legendrian cycles, but is shown in much wider generality.

Riassunto

Questa tesi di dottorato verte su questioni di regolarità locale per correnti di dimensione 2, sia rettificabili che non rettificabili.

Nei capitoli 2 and 3 si dimostrano risultati ottimali di regolarità per *Legendriane Speciali* intere e senza bordo in una varietà di contatto di dimensione 5. L'esempio più noto è quello delle Legendriane Speciali in S^5 , trattate nel capitolo 2: esse si ottengono intersecando un cono Lagrangiano Speciale in \mathbb{R}^6 con l'ipersfera.

Il caso più generale, descritto nel capitolo 3, si osserva in una varietà di contatto arbitraria, di dimensione 5. Qui consideriamo correnti intere senza bordo i cui tangenti approssimati sono invarianti per l'azione di J , essendo quest'ultima una struttura quasi complessa che soddisfa la condizione $d\alpha(v, Jv) = 0$ per tutti i vettori v nella distribuzione orizzontale.

Si dimostra qui che tali correnti sono, al più fuori da un insieme di punti isolati, curve legendriane lisce. Si discute inoltre come le strutture J descritte siano legate alle semi-calibrazioni.

Nel capitolo 4 l'attenzione si sposta su correnti bidimensionali non necessariamente rettificabili. Ci occupiamo di correnti positive (o semi-calibrate) rispetto a una forma di grado due; più precisamente, studiamo correnti senza bordo e con massa finita di tipo pseudo-olomorfo, anche dette *normali positive di tipo (1, 1)*. Dimostriamo un risultato di unicità per i coni tangenti nei punti a densità positiva non isolati (è noto che non c'è unicità assoluta). Il risultato si applica in modo immediato anche alle Legendriane Speciali di cui si è parlato sopra, è tuttavia mostrato in un contesto molto più generale.