



Doctoral Thesis

Non-Abelian braiding statistics in the fractional quantum Hall state at filling factor $\nu = 5/2$? exact diagonalization investigations

Author(s):

Storni, Maurizio Luigi

Publication Date:

2011

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007129106> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH N°19813

**Non-Abelian braiding statistics in the fractional quantum Hall state
at filling factor $\nu = 5/2$?
Exact diagonalization investigations**

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
Maurizio Luigi Storni
Dipl. Phys. ETH
born April 28, 1976
citizen of Capriasca (TI)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Jürg Fröhlich, examiner
Prof. Dr. Nicholas d'Ambrumenil, co-examiner
Dr. Rudolf Morf, co-examiner

2011

Abstract

The subject of this dissertation is the fractional quantum Hall effect at the filling fraction $\nu = 5/2$. Nearly 25 years after its experimental discovery, its nature is still unclear: it is the strongest fractional quantum Hall effect in the second Landau level but, because of its even denominator, it does not fit in the “odd denominator rule” of the hierarchy scheme.

For this reason, to describe it, some alternative states has been proposed: between them of particular interest is the (Moore-Read) “Pfaffian” state. The elementary excitations above this state are $e/4$ charged quasiparticles that obey non-Abelian braiding statistics: the exchange of the position of two quasiparticles results in a rotation in the multidimensional Hilbert space of the many-quasiparticle states, and not merely in a ± 1 or a phase factor (as for fermions/bosons or Abelian anyons). For example, the Hilbert space for a system containing four Moore-Read quasiholes is two-dimensional (whereas there is no such degeneracy in a two-quasiholes system). Because of this property, the “Pfaffian” state has been proposed for the realization of a topological quantum computer.

There are two possible ways to address the question whether the experimentally realized fractional quantum Hall effect at $\nu = 5/2$ is indeed in the same universality class of the “Pfaffian” state: by experimental or by numerical investigations. Experimental tests of the non-Abelian braiding statistics have been proposed and some results are already available, but they are not yet conclusive (and other experiments are in progress). In this dissertation we take the other way, studying, by exact diagonalization, quantum Hall systems with a small number of spin-polarized electrons ($N_{el} \leq 20$) in the sphere geometry.

At first we consider the ground state at $\nu = 5/2$. By calculating the energy spectrum of the few lowest-energy states, we show that the ground state for Coulomb interaction is adiabatically connected with the Moore-Read state: interpolating between the two limits, the ground state is protected by a large gap, with no sign of phase transition for all examined system sizes. We also modify the (two-body) electron interaction, by varying the Haldane pseudopotentials v_1 and v_3 (keeping all others at their Coulomb value), drawing a phase diagram in the (v_1, v_3) -plane. (For example the finite thickness of the quantum Hall sample causes a variation of these pseudopotentials.) We find that in the (v_1, v_3) -plane the quantum Hall energy gap and the overlap of the exact ground state with the “Pfaffian” state form two hills, whose positions and extents coincide: the energy gap is large there where the overlap is large. We interpret this as a sign that the fractional quantum Hall (ground) state at $\nu = 5/2$ is indeed in the “Pfaffian” phase.

During these investigations we also look at the system at $\nu = 1/2$, finding that it is in a compressible phase, but near to a phase transition to the quantum Hall (gapped) phase. The variation of the system thickness could lead to a phase transition into the quantum Hall phase, however from our calculations this seems unlikely to happen.

Then we look at systems at $\nu = 5/2$ containing a small number of localized $e/4$ charged quasiholes. We first show that it is indeed possible to localize such quasiholes on the surface of the sphere, using δ -function pinning potentials. Using a smooth pinning potential we also show that it is possible to reduce the radius of the quasihole to a minimum of about three magnetic lengths. We then

perform the adiabatic connection investigations for systems containing two and four localized quasiholes. For two quasiholes, the lowest energy state evolves adiabatically between the “Pfaffian” and the Coulomb limit, without mixing with higher lying energy states. For four quasiholes we find that the lowest two states in the “Pfaffian” limit, corresponding to the degenerate Moore-Read doublet, remain the lowest-energy states even for pure Coulomb interaction. We conclude that the adiabatic continuity holds also for systems containing quasiholes.

Finally, in the Coulomb limit (only slightly modifying the first Haldane pseudopotential), we perform quasiholes braidings in systems containing four quasiholes: we keep two of them fixed and exchange the positions of the other two by stepwise changing the location of their pinning potentials. We find that under such a braiding, the system goes from one of the states of the Moore-Read doublet to the other: a sign of their non-Abelian braiding statistics.

Riassunto

Il tema di questa dissertazione è l'effetto Hall quantistico frazionario per il fattore di riempimento $\nu = 5/2$. Quasi 25 anni dopo la sua scoperta in un esperimento, la sua natura è ancora misteriosa: è l'effetto Hall frazionario più evidente nel secondo livello di Landau ma, a causa del suo denominatore pari, non obbedisce alla "regola del denominatore dispari" dello schema gerarchico.

Per questa ragione, per descriverlo, sono stati proposti alcuni stati alternativi: tra questi di particolare interesse è lo stato "Pfaffiano" di Moore e Read. Le eccitazioni elementari di questo stato sono quasiparticelle con carica $e/4$ che obbediscono ad una statistica di treccia non-Abeliana: lo scambio della posizione di due quasiparticelle risulta in una rotazione nel multidimensionale spazio di Hilbert contenente gli stati con molteplici quasiparticelle, e non solamente in un fattore ± 1 o in una fase (come per fermioni/bosoni o anioni Abeliani). Per esempio lo spazio di Hilbert per un sistema contenente quattro quasibuchi di Moore e Read è bidimensionale (mentre non c'è una tale degenerazione per un sistema con due quasibuchi). A causa di questa proprietà, lo stato "Pfaffiano" è stato proposto per la realizzazione di un computer quantistico topologico.

Ci sono due possibili approcci per affrontare la questione se l'effetto Hall frazionario per $\nu = 5/2$ realizzato sperimentalmente è davvero nella stessa classe di universalità dello stato "Pfaffiano": con investigazioni sperimentali o numeriche. Prove sperimentali della statistica di treccia non-Abeliana sono state proposte e alcuni risultati sono già disponibili, ma non ancora conclusivi (e altri esperimenti sono in corso). In questa dissertazione scegliamo l'altra via, studiando, per mezzo di diagonalizzazioni esatte, sistemi Hall quantistici con un piccolo numero ($N_{el} \leq 20$) di elettroni (spin-polarizzati) nella geometria sferica.

Dapprima consideriamo lo stato fondamentale per $\nu = 5/2$. Calcolando lo spettro energetico degli stati energeticamente più bassi, mostriamo che lo stato fondamentale per l'interazione di Coulomb è connesso adiabaticamente con lo stato di Moore e Read: interpolando tra i due limiti, lo stato fondamentale è protetto da un grande gap, con nessun segno di transizione di fase per tutti i sistemi esaminati. Inoltre modifichiamo l'interazione (a due corpi) tra gli elettroni, variando gli pseudopotenziali di Haldane v_1 e v_3 (tenendo tutti gli altri al loro valore di Coulomb), disegnando un diagramma di fase nel piano (v_1, v_3) . (Per esempio lo spessore finito del campione Hall quantistico causa una variazione di questi pseudopotenziali.) Troviamo che nel piano (v_1, v_3) il gap energetico Hall quantistico e la sovrapposizione dello stato fondamentale esatto con lo stato "Pfaffiano" formano due colline, le cui posizioni e estensioni coincidono: il gap energetico è grande là dove la sovrapposizione è grande. Interpretiamo questo come un segno che lo stato Hall quantistico frazionario (fondamentale) per $\nu = 5/2$ è in effetti nella fase "Pfaffiana".

Nel corso di queste investigazioni guardiamo anche al sistema per $\nu = 1/2$, trovando che è in una fase compressibile, ma vicino ad una transizione di fase verso la fase Hall quantistica (con gap). La variazione dello spessore del sistema potrebbe portare ad una transizione di fase verso la fase Hall quantistica, ma dai nostri calcoli questo sembra improbabile.

In seguito consideriamo sistemi a $\nu = 5/2$ contenenti un piccolo numero di quasibuchi (con carica $e/4$) localizzati. Dapprima mostriamo che è in effetti possibile localizzare tali quasibuchi sulla superficie della sfera, usando potenziali di localizzazione a funzione δ . Usando un potenziale di localizzazione regolare,

mostriamo inoltre che è possibile ridurre il raggio del quasibuco fino ad un minimo di circa tre lunghezze magnetiche. Poi eseguiamo le investigazioni di connessione adiabatica per sistemi contenenti due e quattro quasibuchi localizzati. Per due quasibuchi, lo stato energetico più basso evolve adiabaticamente tra il limite “Pfaffiano” e il limite di Coulomb, senza mescolanza con altri stati con energia superiore. Per quattro quasibuchi troviamo che i due stati più bassi, che corrispondono al doppietto degenerato di Moore e Read, rimangono gli stati energetici più bassi anche per la pura interazione di Coulomb. Concludiamo che la continuità adiabatica è valida anche per sistemi contenenti quasibuchi.

In conclusione, nel limite di Coulomb (unicamente lievemente modificando il primo pseudopotenziale di Haldane), eseguiamo degli scambi di quasibuchi in sistemi contenenti quattro quasibuchi: manteniamo fissi due di loro e scambiamo la posizione degli altri due, cambiando passo dopo passo la posizione dei loro potenziali di localizzazione. Troviamo che a causa di un tale scambio di posizione, il sistema evolve da uno degli stati del doppietto di Moore e Read all’altro: un segno della statistica di treccia non-Abeliana.