

# Deformation and duality from the symplectic point of view

**Author(s):**
Jerby, Yochai

**Publication Date:**
2012

**Permanent Link:**
https://doi.org/10.3929/ethz-a-007144120 →

DISS. ETH NO. 19871

# DEFORMATION AND DUALITY FROM THE SYMPLECTIC POINT OF VIEW

A dissertation submitted to
ETH ZÜRICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

Yochay Jerby
M.Sc. Math, Tel Aviv University

born June 20, 1983

citizen of
Israel

accepted on the recommendation of

PROF. DR. PAUL BIRAN, examiner
PROF. DR. DIETMAR A. SALAMON, co-examiner
PROF. DR. FELIX SCHLENK, co-examiner

2012

# Abstract

In this dissertation we study applications of methods of symplectic topology, mainly the theories of Floer and quantum homology, to the following two subjects in complex projective geometry: (1) Morse-Bott degenerations of Kähler Manifolds and (2) manifolds with small dual.

*(1) Morse-Bott degenerations:* A Morse-Bott degeneration is a holomorphic map $\pi : X \to \mathbb{D}$ from a Kähler manifold $(X, \Omega)$ to the unit disc $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ such that $Crit(\pi) \subset \pi^{-1}(0)$ and the holomorphic Hessian of $\pi$ is a a non-degenerate quadratic form when restricted to the normal bundle of $Crit(\pi)$ in $X$. Our first result on the subject is showing that Lagrangian submanifolds in the singularity locus of the degeneration $L \subset Crit(\pi) \subset \Sigma_0$ give rise to Lagrangian submanifolds $N_z(L)$ in $\Sigma_z = \pi^{-1}(z)$ in the smooth fibers $z \neq 0$. Moreover, $N_z(L) \subset \Sigma_z$ is topologically a sphere bundle over $L$. This could be seen as a generalization of the well known result stating that fibers of a Lefschetz fibration admit Lagrangian spheres corresponding to the singularities of the fibration. We then show, based on the construction of $N_z(L)$, that Morse-Bott degenerations admit non-trivial restrictions as an application of the theory of Lagrangian Floer homology in various cases.

*(2) Manifolds with small dual from the symplectic viewpoint:* Let $X \subset \mathbb{C}P^N$ be a projectively embedded manifold and let $X^* \subset (\mathbb{C}P^N)^*$ be its dual. The manifold $X$ is said to be of small dual if $X^*$ is not a hypersurface. Let $\Sigma$ be a smooth hyperplane section of $X$. Our first result is showing the following relation

$$ind(X \setminus \Sigma) \leq dim_{\mathbb{C}}(X) - def(X)$$

where $ind(X \setminus \Sigma)$ is the sub-criticallity index of the Stein manifold $X \setminus \Sigma$ studied in symplectic topology and $def(X) = codim(X^*) - 1$. In particular, the Stein manifold $X \setminus \Sigma$ is subcritical whenever $X$ is a manifold with small dual.

We then turn to study the properties of the quantum cohomology of $QH^*(\Sigma)$ under the additional assumption that $X$ is spherically monotone. Let $\omega_\Sigma$ be the restriction of the Fubini-Study form of $\mathbb{C}P^N$ to $\Sigma$. We show that when $X$ is a spherically monotone manifold with small dual the class $[\omega_\Sigma] \in QH^*(\Sigma)$ is invertible. As an application we obtain new topological restrictions on both $X$ and $\Sigma$. We prove the inevitability of $[\omega_\Sigma]$ by showing that it could be expressed as

the Seidel element $S(\gamma) \in QH^*(X)$ of a non-trivial element $\gamma \in Ham(\pi_1(\Sigma, \omega_\Sigma))$ naturally associated to $\Sigma$.

# Abstract

Diese Dissertation befasst sich mit der Anwendung von Methoden der symplektischen Topologie, in erster Linie Floer-Theorie und Quanten-Homologie, auf die folgenden beiden Bereiche der komplexen projektiven Geometrie: (1) Morse-Bott-Degenerationen von Kähler-Mannigfaltigkeiten, sowie (2) Mannigfaltigkeiten mit kleinem Dual.

*(1) Morse-Bott-Degenerationen:* Eine Morse-Bott-Degeneration ist eine holomorphe Abbildung $\pi : X \to \mathbb{D}$, wobei $(X, \Omega)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit und $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnen, so dass $Crit(\pi) \subset \pi^{-1}(0)$ gilt und die Einschränkung der holomorphen Hesse-Form von $\pi$ auf das Normalenbündel von $Crit(\pi) \subset X$ nicht-ausgeartet ist. Als erstes Resultat zeigen wir, dass Lagrange Untermannigfaltigkeiten $L \subset Crit(\pi) \subset \Sigma_0$ in der singulären Faser der Degeneration Lagrange-Untermannigfaltigkeiten $N_z(L) \subset \Sigma_z = \pi^{-1}(z)$ in den glatten Fasern ($z \neq 0$) induzieren, wobei $N_z(L) \subset \Sigma_z$ topologisch ein Sphärenbündel über $L$ ist. Dies kann als Verallgemeinerung des bekannten Resultats aufgefasst werden, dass in den Fasern einer Lefschetz-Faserung Lagrange-Sphären existieren, die den Singularitäten der Faserung entsprechen. Wir zeigen dann, basierend auf der Konstruktion von $N_z(L)$ und unter Verwendung von Lagrange-Schnitt-Floer-Homologie, dass Morse-Bott-Degenerationen nicht-triviale Einschränkungen zulassen.

*(2) Mannigfaltigkeiten mit kleinem Dual aus der symplektischen Sicht:* Sei $X \subset \mathbb{C}P^N$ eine projektiv eingebettete Mannigfaltigkeit und sei $X^* \subset (\mathbb{C}P^N)^*$ ihr Dual. Wir bezeichen $X$ als Mannigfaltigkeit mit kleinem Dual, falls $X^*$ keine Hyperfläche ist. Sei $\Sigma$ ein glatter Hyperebenenschnitt von $X$. Unser erstes Resultat zeigt die folgende Beziehung:

$$ind(X \setminus \Sigma) \leq dim_{\mathbb{C}}(X) - def(X),$$

wobei $ind(X \setminus \Sigma)$ der in der Symplektischen Topologie betrachtete Subkritikalitätsindex der Stein-Mannigfaltigkeit $X \setminus \Sigma$ ist, und $def(X) := codim(X^*) - 1$.

Danach studieren wir die Eigenschaften der Quanten-Kohomologie $QH^*(\Sigma)$ unter der zusätzlichen Annahme, dass $X$ sphärisch monoton ist. Sei $\omega_\Sigma$ die Einschränkung der Fubini-Study Form von $\mathbb{C}P^N$ auf $\Sigma$. Wir zeigen, dass für eine sphärisch monotone Mannigfaltigkeit $X$ mit kleinem Dual die Klasse $[\omega_\Sigma] \in$

$QH^*(\Sigma)$ invertierbar ist. Als Anwendung davon erhalten wir neue topologische Restriktionen sowohl an $X$ als auch an $\Sigma$. Wir beweisen die Invertierbarkeit der Klasse $[\omega_\Sigma]$, indem wir zeigen, dass sie sich als Seidel-Element $S(\gamma) \in QH^*(X)$ eines nicht-trivialen Element $\gamma \in Ham(\pi_1(\Sigma, \omega_\Sigma))$ ausdrücken lässt, das sich $\Sigma$ auf natürliche Art und Weise zuordnen lässt.