Stability of Ricci-flat spaces and singularities in 4d Ricci flow

DISS. ETH NO. 20385

Stability of Ricci-flat Spaces and Singularities in 4d Ricci Flow

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
Robert Haslhofer
MSc ETH Mathematics
born January 17, 1984
citizen of Austria

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Tom Ilmanen, examiner
Prof. Dr. Michael Struwe, co-examiner
Prof. Dr. Gerhard Huisken, co-examiner

2012

Abstract

In this thesis, we describe some closely related results on Ricci curvature and Ricci flow that we obtained during the last couple of years.

In Chapter 1, we discuss the formation of singularities in higher-dimensional Ricci flow without pointwise curvature assumptions. We prove that the space of singularity models with bounded entropy and locally bounded energy is orbifold-compact in arbitrary dimensions. In dimension four, a delicate localized Gauss-Bonnet estimate even allows us to drop the assumption on energy in favor of (essentially) an upper bound for the Euler characteristic. These results form one of the highlights of this thesis and have been obtained in a joint work with Reto Müller.

In Chapter 2, we investigate the stability of compact Ricci-flat metrics (under the technical assumption that all infinitesimal Ricci-flat deformations are integrable). We prove a Łojasiewicz-Simon inequality for Perelman's λ-functional and establish a transversality estimate that shows that the Ricci flow does not move excessively in gauge directions. As consequences, we obtain a rigidiy result, a new proof of Sesum's dynamical stability theorem for the Ricci flow and, as a sharp complement, a dynamical instability theorem.

In Chapter 3, in order to be able to study stability also in the noncompact case, we introduce a renormalized $\mathcal{F}$-functional for perturbations of noncompact steady Ricci solitons. This functional motivates a stability inequality for Ricci-flat spaces, in particular for Ricci-flat cones. We also introduce a geometric invariant λ_{AF} for asymptotically flat manifolds with nonnegative scalar curvature. This invariant gives a quantitative lower bound for the ADM-mass from general relativity, motivates a proof of the rigidity statement in the positive mass theorem using the Ricci flow, and eventually leads to the discovery of a mass-decreasing flow in dimension three.

In Chapter 4, we thoroughly investigate the above-motivated stability inequality for Ricci-flat cones. We prove that the Ricci-flat cone over $\mathbb{C}P^2$ is stable, showing that the first stable nonflat Ricci-flat cone occurs in the smallest possible dimension in sharp contrast with the case of stable minimal hypersurfaces. On the other hand, we prove that many further examples of Ricci-flat cones over 4-manifolds are unstable, and that Ricci-flat cones over products of Einstein manifolds and over Kähler-Einstein manifolds with $h^{1,1} > 1$ are unstable in dimension less than 10. We also give plenty of motiva-

tions and partly confirm a conjecture of Tom Ilmanen relating the λ-functional, the positive mass theorem and the nonuniqueness of Ricci flows with conical initial data. The results from this chapter have been obtained in a joint work with Stuart Hall and Michael Siepmann.

In Chapter 5, we finally investigate the above-mentioned mass-decreasing flow for asymptotically flat 3-manifolds with nonnegative scalar curvature. Our flow is defined by iterating a suitable Ricci flow with surgery and conformal rescalings. It exists for all times, preserves the class of asymptotically flat metrics with nonnegative scalar curvature, and decreases the mass. Wormholes pinch off and nontrivial spherical space forms bubble off in finite time. Moreover, we show that our quantity λ_{AF} is monotone along the flow. Assuming a certain inequality between λ_{AF} and the mass a priori, we can prove that the flow squeezes out all the initial mass.

Almost everything said in this thesis is based on the following five articles: A compactness theorem for complete Ricci shrinkers (joint with Reto Müller; Geom. Funct. Anal. 21(5):1091–1116, 2011), Perelman's lambda-functional and the stability of Ricci-flat metrics (Calc. Var. Partial Differential Equations, online first, DOI 10.1007/s00526-011-0468-x), A renormalized Perelman-functional and a lower bound for the ADM-mass (J. Geom. Phys. 61(11):2162–2167, 2011), The stability inequality for Ricci-flat cones (joint with Stuart Hall and Michael Siepmann; arXiv:1111.4981, submitted), A mass-decreasing flow in dimension three (arXiv:1107.3220, submitted).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschreiben wir einige eng verwandte Resultate über Ricci-Krümmung und Ricci-Fluss, die wir im Verlauf der letzten Jahre gefunden haben.

In Kapitel 1 diskutieren wir die Entwicklung von Singularitäten in höherdimensionalem Ricci-Fluss ohne punktweise Krümmungsannahmen. Wir beweisen, dass der Raum der Singularitätsmodelle mit beschränkter Entropie und lokal beschränkter Energie in beliebigen Dimensionen Orbifaltigkeit-kompakt ist. In Dimension vier ermöglicht uns ein delikates Gauss-Bonnet-Argument sogar die Energieannahme (im wesentlichen) durch eine obere Schranke an die Eulercharakteristik zu ersetzen. Diese Resultate bilden einen der Höhepunkte dieser Arbeit und stammen aus einem gemeinsamen Projekt mit Reto Müller.

In Kapitel 2 untersuchen wir die Stabilität von kompakten Ricci-flachen Metriken (unter der technischen Annahme, dass alle infinitesimalen Ricci-flachen Deformationen integrierbar sind). Wir beweisen eine Łojasiewicz-Simon-Ungleichung für Perelman's λ-Funktional und erarbeiten eine Transversalitätsabschätzung, die zeigt, dass sich der Ricci-Fluss nicht zu stark in Eichrichtungen bewegt. Als Folgerungen erhalten wir ein Starrheitsresultat, einen neuen Beweis von Sesum's dynamischen Stabilitätsresultat für den Ricci-Fluss und, als scharfes Gegenstück, ein dynamisches Instabilitätsresultat.

In Kapitel 3 führen ein renormiertes $\mathcal{F}$-Funktional für Störungen von Ricci-Solitonen ein, damit wir Stabilität auch im nichtkompakten Fall untersuchen können. Dieses Funktional motiviert eine Stabilitätsungleichung für Ricci-flache Räume, insbesondere für Ricci-flache Kegel. Wir führen auch eine geometrische Invariante λ_{AF} für asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Skalarkrümmung ein. Diese Invariante gibt eine quantitative untere Schranke für die ADM-Masse aus der allgemeinen Relativitätstheorie, motiviert einen Ricci-Fluss-Beweis der Starrheitsaussage im Positve-Masse-Theorem, und führt schliesslich zur Entdeckung eines massenveringernden Flusses in Dimension drei.

In Kapitel 4 untersuchen wir die oben erwähnte Stabilitätsungleichung für Ricci-flache Kegel. Wir beweisen, dass der Ricci-flache Kegel über $\mathbb{C}P^2$ stabil ist, was zeigt, dass der erste stabile nichtflache Ricci-flache Kegel in der niedrigstmöglichen Dimension auftritt im scharfen Gegensatz zum Fall von minimalen Hyperflächen. Andererseits beweisen wir, dass viele weitere Beispiele von Ricci-flachen Kegeln über 4-Mannigfaltigkeiten in-

stabil sind und, dass Ricci-flache Kegel über Produkten von Einstein-Mannigfaltigkeiten und über Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeiten mit $h^{1,1} > 1$ in Dimension kleiner 10 instabil sind. Wir motivieren das Problem umfassend und bestätigen Teile einer Vermutung von Tom Ilmanen, die das λ-Funktional, das Positive-Masse-Theorem und die Nichteindeutigkeit von Ricci-Flüssen mit konischen Anfangsdaten verbindet. Die Resultate dieses Kapitels stammen aus einer gemeinsamen Arbeit mit Stuart Hall und Michael Siepmann.

In Kapitel 5 untersuchen wir schliesslich den oben erwähnten massenveringernden Fluss für asymptotisch flache 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Skalarkrümmung. Unser Fluss ist als Iteration eines geeigneten Ricci-Flusses mit Chirurgie und konformen Reskalierungen definiert. Er existiert für alle Zeiten, erhält die Klasse der asymptotisch flachen Metriken mit nichtnegativer Skalarkrümmung, und verringert die Masse. Wurmlöcher schnüren ab und sphärische Raumformen lösen sich ab. Desweiteren zeigen wir, dass unser Funktional λ_{AF} monoton entlang des Flusses ist. Unter der a-priori Annahme einer gewissen Ungleichung zwischen λ_{AF} und der Masse könnne wir beweisen, dass der Fluss die gesamte Masse herausquetscht.

Fast alles was in dieser Arbeit gesagt wird beruht auf den folgenden fünf Artikeln: A compactness theorem for complete Ricci shrinkers (zusammen mit Reto Müller; Geom. Funct. Anal. 21(5):1091–1116, 2011), Perelman's lambda-functional and the stability of Ricci-flat metrics (Calc. Var. Partial Differential Equations, online first, DOI 10.1007/s00526-011-0468-x), A renormalized Perelman-functional and a lower bound for the ADM-mass (J. Geom. Phys. 61(11):2162–2167, 2011), The stability inequality for Ricci-flat cones (zusammen mit Stuart Hall und Michael Siepmann; arXiv: 1111.4981, eingereicht), A mass-decreasing flow in dimension three (arXiv:1107.3220, eingereicht).